

Применение смешанных неконформных вариационных постановок для решения задачи Дарси

Н. Б. ИТКИНА^{1,*}, С. А. ТРОФИМОВА^{1,2}

¹Новосибирский государственный технический университет, Россия

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия

*Контактный e-mail: itkina.nat@yandex.ru

Предлагается и анализируется построение вычислительной схемы для задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды при использовании смешанной конечно-элементной аппроксимации на базе разрывного метода Галёркина. Рассматривается построение базиса для скорости в специальном функциональном пространстве H^{div} , а также базиса для давления в пространстве L_2 . Проводится верификация полученной вычислительной схемы на классе задач, имеющих аналитическое решение, а также представляются результаты экспериментов с контрастным тензорным коэффициентом проницаемости среды.

Ключевые слова: теория фильтрации, модель Дарси, смешанный конечно-элементный метод, разрывный метод Галёркина.

Введение

Значительная часть мировых нефтяных и газовых месторождений имеет слоисто-пористую структуру. Накопление углеводородов в этих пористых пластах-коллекторах, а также основные технологии извлечения управляются законами теории фильтрации [1, 2]. Математическое моделирование процессов просачивания жидкости (газа) в пористую среду — это актуальная задача для нефтедобывающей отрасли. Фильтрационный перенос флюида описывается фундаментальными законами сохранения массы, импульса, энергии. Однако применить эти законы непосредственно для описания фильтрации в пористых средах чрезвычайно сложно, поэтому на практике используется полуэмпирический подход, основанный на применении модели Дарси, которая достаточно точно позволяет описать движение жидкости в пористой среде под действием давления.

Смешанный метод конечных элементов на базе разрывного метода Галёркина является одним из современных подходов для численного решения задачи Дарси. Термин “смешанный метод” впервые использован в 1960-х гг. при решении задач теории упругости для описания конечно-элементных методов, в которых одновременно аппроксимируются поля смещения и напряжения. Основная идея данного метода заключается в нахождении как первичной, так и дуальной переменной, при этом осуществляется поиск критической точки соответствующего функционала над конечно-элементным пространством допустимых пробных функций, которое представимо в виде прямой суммы двух

или более подпространств. Сложность метода состоит в том, что критическая точка функционала — седловая точка [3–5]. Такой подход позволяет найти решение, соответствующее физике моделируемых процессов, и имеет ряд достоинств и недостатков.

Для некоторого класса задач, например задачи Стокса, прямые вариационные постановки оказываются непрактичными, а смешанные методы показывают эффективные результаты и широко применимы [6–8]. Зачастую возникают ситуации, когда необходимо знать дуальную переменную (напряжение для задач эластичности, тепловой поток или скорость движения жидкости и т. п.), в этом случае смешанный метод позволяет сразу найти значения этой переменной, в отличие от прямых постановок, в которых дуальные переменные определяются а posteriori путем дифференцирования.

Другим преимуществом смешанных методов является возможность избежать использования C^1 -элементов для решения уравнений четвертого порядка (например, для модели пластины Кирхгофа). Это становится возможным благодаря тому, что в функционал, полученный смешанным методом, входят производные не выше второго порядка, а следовательно, после соответствующего интегрирования по частям данный функционал может быть оценен в конечно-элементном пространстве с использованием непрерывных элементов. При прямой постановке, однако, придется применять C^1 -элементы (либо неконформные).

Еще одним плюсом смешанных постановок является устойчивость к наличию некоторых ограничений и экстремальных ситуаций. Например, для задачи линейной эластичности в случае несжимаемого материала тензор соответствий становится сингулярным, а значит, его обратный тензор эластичности перестает быть ограниченным, т. е. становится бесконечно большим для почти несжимаемых материалов. Аналогично для модели пластины E. Reissner'a требуется устойчивость метода по отношению к такому параметру, как толщина пластины. Применение смешанных вариационных постановок позволило R. Ewing, M. Wheeler и др. получить вычислительную схему повышенной устойчивости для моделирования вытеснения нефти из пористой среды [9, 10]. L.D. Marini и A. Savini рассмотрели применение смешанных методов для расчета электрических полей в полупроводниковых устройствах [11], обнаружив при этом устойчивость данных методов к быстрому изменению коэффициентов уравнений. A. Masud и T.J.R. Hughes предложили стабилизированную конечно-элементную формулировку [12], в которой надлежащим образом “взвешенная” невязка была добавлена к стандартной смешанной формулировке для задачи Дарси. F. Brezzi, T.J.R. Hughes, L.D. Marini, A. Masud предложили устойчивую конечно-элементную вычислительную схему, основанную на разрывном методе Галёркина [13], для задачи Дарси со скалярным коэффициентом проницаемости среды, используя при этом комбинацию двух изначально неустойчивых методов Bassy — Rebay [14] и Baumann — Oden [15].

Несмотря на достоинства смешанных методов, существуют и очевидные недостатки. Из-за того что одновременно аппроксимируются как первичные, так и дуальные переменные, происходит резкое увеличение количества степеней свободы, а соответственно, и рост размерности системы алгебраических уравнений. Поскольку смешанная задача — это задача о седловой точке, то результирующая дискретная система будет неопределенной, т. е. содержащей как положительные, так и отрицательные собственные значения, и для ее решения невозможно будет непосредственно использовать разложение Холецкого или итерационные методы, такие как метод сопряженных градиентов. Третьим недостатком является то, что дискретные аналоги смешанных постановок менее устойчивы, чем дискретные аналоги прямых постановок, в которых выбор конечно-эле-

ментных пространств обусловлен только свойствами аппроксимации и удобством реализации. Из-за наличия такого рода недостатков эффективное построение смешанных вычислительных схем требует большого опыта, а также порождает необходимость детального анализа смешанных постановок, наложения более жестких ограничений на построение конечно-элементных пространств, выбора специального базиса из заданных конечно-элементных подпространств, а также построения специального решателя для дискретного аналога.

На современном этапе для получения конечно-элементной аппроксимации все чаще применяется разрывный метода Галёркина (DG-метод). Основная идея данного метода заключается в использовании на конечных элементах кусочно-полиномиальных разрывных базисных функций, что приводит к независимости степеней свободы. Согласованность решения обеспечивается путем определения на межэлементных границах специальных операторов следа — численных потоков, которые входят в вариационную постановку, при этом выбор конкретного вида численных потоков существенно влияет на конечный вид вариационной постановки. В DG-методе, в отличие от “классического” метода Галёркина, снимается требование конформности аппроксимации, что дает больше свободы в построении сетки, а также в выборе аппроксимирующих пространств [16–19].

1. Смешанная вариационная формулировка на базе разрывного метода Галёркина

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная n -мерная область с границей $\partial\Omega = \Gamma_D$, модель Дарси описывается краевой задачей с эллиптическим оператором

$$\begin{aligned} -\nabla K \nabla p &= f \quad \text{в } \Omega, \\ -K \nabla p n &= g \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

которую можно записать в виде системы уравнений для скорости u и давления p :

$$\begin{cases} u = -K \nabla p & \text{в } \Omega, \\ \nabla u = f & \text{в } \Omega, \\ un = g & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где K — симметричный положительно определенный тензор.

Введем бесконечномерное пространство Лебега $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} v w d\Omega$ и нормой $\|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)_{L_2(\Omega)}^{1/2}$ и пространство векторных функций

$$H_0^{div}(\Omega) = \{v \in (L_2(\Omega))^n, \nabla v \in L_2(\Omega), vn|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Смешанная формулировка для задачи Дарси имеет следующий вид: найти $(u, p) \in H_0^{div}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ такие, что

$$\begin{cases} (K^{-1}u, v)_{L_2(\Omega)} - (p, \nabla v)_{L_2(\Omega)} = 0 & \forall v \in H_0^{div}, \\ (\nabla u, q)_{L_2(\Omega)} = (f, q)_{L_2(\Omega)} & \forall q \in L_2(\Omega). \end{cases}$$

Пусть $\Xi_h = \{T\}$ — разбиение расчетной области Ω на конечные элементы T . Тогда $\Gamma = \bigcup_T \partial T$ — множество границ элементов T , $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$. Введем конечно-элементные подпространства следующим образом:

$$V_h = \{v \in (L_2(\Omega))^n : v|_T \in (P_k(T))^n \forall T \in \Xi_h\},$$

$$Q_h = \{q \in L_2(\Omega) : q|_T \in P_l(T) \forall T \in \Xi_h\},$$

где $P_{k,l}(T)$ — пространства полиномов степени $k \geq 1$ и $l \geq 1$ соответственно, определенных на элементе T .

Скалярно умножим уравнения системы (1) на пробные функции v и q и применим формулу Грина вида

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \varphi d\Omega = - \int_{\Omega} \psi \nabla \varphi d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\psi n) \varphi.$$

Получим

$$\begin{cases} \int_T K^{-1} u v dT - \int_T p \nabla v dT + \int_{\partial T} \hat{p}(v n) dS, \\ - \int_T u \nabla q dT + \gamma \int_{\partial T \in \Gamma^0} (\hat{u} n) q dS = \int_T f q dT - \gamma \int_{\partial T \in \Gamma^D} (u^{out} n) q dS, \end{cases}$$

где \hat{p} , \hat{u} — численные потоки давления и скорости на границе ∂T конечного элемента T , u^{out} — значение скорости на границе конечного элемента $\partial T \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Таким образом, с учетом того что нормальная компонента вектора скорости u равна g на границе расчетной области $\partial\Omega$, запишем

$$\begin{cases} \int_T K^{-1} u v dT - \int_T p \nabla v dT + \int_{\partial T} \hat{p}(v n) dS = 0, \\ - \int_T u \nabla q dT + \gamma \int_{\partial T \in \Gamma^0} (\hat{u} n) q dS = \int_T f q dT - \gamma \int_{\partial T \in \Gamma^D} g q dS. \end{cases} \quad (2)$$

Определим скалярный численный поток $\hat{p} = (\hat{p}_T)_{T \in \Xi_h}$ и векторный численный поток $\hat{u} = (\hat{u}_T)_{T \in \Xi_h}$ как линейные операторы:

$$\hat{p} : H^1(\Xi_h) \rightarrow T(\Gamma),$$

$$\hat{u} : H^2(\Xi_h) \times [H^1(\Xi_h)]^2 \rightarrow [T(\Gamma)]^2.$$

Функции из пространства $T(\Gamma) = \prod_{T \in \Xi_h} L_2(\Omega)$ принимают два значения на множестве внутренних границ конечных элементов Γ_0 и одно значение на границе $\partial\Omega$.

Для того чтобы определить численные потоки на границах конечных элементов, необходимо ввести операторы среднего значения $\{\cdot\}$ и скачка $[\cdot]$ скалярной и векторной функций. Пусть $e \in \Gamma_0$ — внутреннее ребро, разделяющее элементы T_1 и T_2 , для которых на ребре e определены внешние нормали n_1 и n_2 соответственно. Тогда операторы среднего значения и скачка скалярной функции $q \in T(\Gamma)$ можно определить следующим образом:

$$\{q\} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad [q] = q_1 n_1 + q_2 n_2,$$

где $q_i = q|_{T_i}$, $i = 1, 2$. Операторы $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ для векторной функции $u \in [T(\Gamma)]^2$ примут вид

$$\{u\} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad [u] = u_1 n_1 + u_2 n_2.$$

Для граничного ребра $e \in \partial\Omega$, принадлежащего элементу T с внешней нормалью n , операторы среднего значения и скачка функций $q \in T(\Gamma)$ и $u \in [T(\Gamma)]^2$ определяются следующим образом:

$$\{q\} = q, \quad [q] = qn, \quad \{u\} = u, \quad [u] = un.$$

В качестве потоков выберем среднее значение скорости на границе конечного элемента и скачок давления через границу, т. е.

$$\hat{p} = [p] \quad \text{на} \quad \Gamma = \Gamma^0 \cup \partial\Omega,$$

$$\hat{u} = \{u\} \quad \text{на} \quad \Gamma = \Gamma^0 \cup \partial\Omega.$$

Подставим выражения для потоков в систему (2) и просуммируем по всем конечным элементам, а для дополнительной стабилизации вариационной постановки введем штраф на скачки давления p и скорости u , следуя подходу, описанному в [13]. Получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} K^{-1} u v d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_0} [p] \{v\} dS + \int_{\Gamma_D} (pn) v dS - \\ - \theta \int_{\Omega} (K^{-1} u + \nabla p) v d\Omega = 0, \\ - \int_{\Omega} \nabla u q d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{u\} [q] dS + \int_{\Gamma_D} u (qn) dS + \delta \theta \int_{\Omega} (u + K \nabla p) \nabla q d\Omega = \\ = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} g q dS, \end{array} \right.$$

где θ — выбираемый параметр; $\delta = \pm 1$.

2. Построение базисов в пространстве H^{div} и L_2

Рассмотрим один из способов построения иерархического конформного базиса в пространстве H^{div} . Базисные функции будем строить как результат тензорного произведения ортогональных полиномов, заданных на данном носителе, само пространство при этом представляется в виде суммы двух подпространств: подпространства дивергентно свободных функций и подпространства недивергентно свободных функций [20].

Рассмотрим ортогональные полиномы Лежандра (рис. 1), определенные на отрезке $[-1, 1]$ в виде рекуррентного соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = 1, \\ L_1(x) = x, \\ L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{array} \right.$$

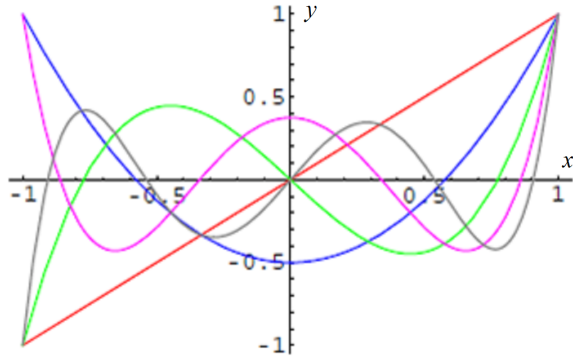


Рис. 1. Полиномы Лежандра степени от 1 до 5

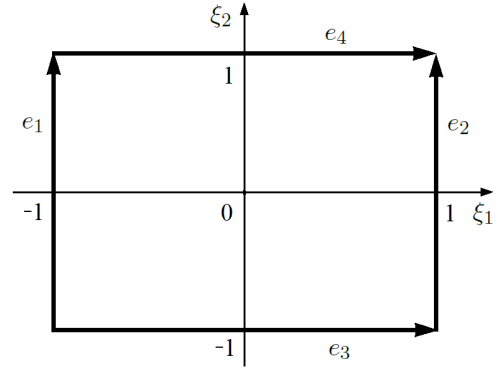


Рис. 2. Прямоугольный мастер-элемент T_{quad}^{div}

Для них выполнено условие ортогональности

$$\int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x)dx = \frac{2}{2i+1}\delta_{ij}.$$

Диаграмма De Rham'a

$$H^1 \xrightarrow{\nabla} H^{curl} \xrightarrow{\nabla \times} H^{div} \xrightarrow{\nabla} L_2.$$

Конформность подразумевает требование непрерывности нормальных компонент базисных функций на межэлементных границах.

Рассмотрим прямоугольный мастер-элемент $T_{quad}^{div} = [-1, 1] \times [-1, 1]$, изображенный на рис. 2. Будем формировать базисные функции двух типов: дивергентно свободные edge-функции высокого порядка и базисные функции недивергентно свободные высокого порядка, определенные во внутренних узлах конечного элемента (bubble-функции).

Диаграмма De Rham'a предполагает, что конечный элемент T_{quad}^{div} будет оснащен полиномиальным пространством

$$V_{quad} = \{v \in Q_{p^{b,1}+1, p^{b,2}} \times Q_{p^{b,1}, p^{b,2}+1}, \text{ } \forall n |_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), j = \overline{1, 4}\}, \quad (3)$$

где $p^{b,1}$, $p^{b,2}$ — степени полиномов для bubble-функций, p^{e_j} — степени полиномов для edge-функций.

Следы нормальных компонент edge-функций $\gamma_k^{e_i}$ связаны с полиномами Лежандра L_k степени $k = 0, 1, \dots, p^{e_i}$ на ребре e_i , $i = \overline{1, 4}$, и равны нулю на остальных ребрах:

$$\gamma_k^{e_1} = l_0(\xi_1)L_k(\xi_2)\tau_1, \quad 0 \leq k \leq p^{e_1}, \quad (4)$$

$$\gamma_k^{e_2} = l_1(\xi_1)L_k(\xi_2)\tau_1, \quad 0 \leq k \leq p^{e_2}, \quad (5)$$

$$\gamma_k^{e_3} = L_k(\xi_1)l_0(\xi_2)\tau_2, \quad 0 \leq k \leq p^{e_3}, \quad (6)$$

$$\gamma_k^{e_4} = L_k(\xi_1)l_1(\xi_2)\tau_2, \quad 0 \leq k \leq p^{e_4}, \quad (7)$$

где $\tau_1 = (1, 0)$ и $\tau_2 = (0, 1)$ — направления; $l_0(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$, $l_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$.

Bubble-функции строятся таким образом, что их нормальные компоненты равны нулю на всех ребрах:

$$\gamma_{k_1, k_2}^{b,1} = l_{k_1}(\xi_1)L_{k_2}(\xi_2)\tau_1, \quad 2 \leq k_1 \geq p^{b,1} + 1, \quad 0 \leq k_2 \geq p^{b,2}, \quad (8)$$

$$\gamma_{k_1, k_2}^{b,2} = L_{k_1}(\xi_1)l_{k_2}(\xi_2)\tau_2, \quad 0 \leq k_1 \geq p^{b,1}, \quad 2 \leq k_2 \geq p^{b,2} + 1. \quad (9)$$

Рассмотрим еще один подход к построению иерархического конформного базиса в пространстве H^{div} с использованием интегрированных полиномов Лежандра [21], обозначаемых $(l_n)_{2 \leq i \leq p}$:

$$l_n(x) = \int_{-1}^x L_{n-1}(\xi)d\xi, \quad x \in [-1, 1], \quad n \geq 2.$$

Полиномы l_n , $n \geq 2$, принимают нулевое значение на концах отрезка $[-1, 1]$, т.е. $l_n(-1) = l_n(1) = 0$. В виде рекуррентного соотношения интегрированные полиномы Лежандра (рис. 3) можно определить как

$$\begin{cases} l_1(x) = x, \\ l_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \\ l_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{n+1}xl_n(x) - \frac{n-2}{n+1}l_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим прямоугольный мастер-элемент $\tilde{T}_{quad}^{div} = [0, 1] \times [0, 1]$, изображенный на рис. 4, который оснащен полиномиальным пространством (3).

Следуя подходу из [21], введем билинейные функции λ_i , равные единице в вершине i и нулю в остальных вершинах,

$$\lambda_1 = (1-x)(1-y), \quad \lambda_2 = x(1-y), \quad \lambda_3 = xy, \quad \lambda_4 = (1-x)y$$

и линейные функции σ_i :

$$\sigma_1 = (1-x) + (1-y), \quad \sigma_2 = x + (1-y), \quad \sigma_3 = x + y, \quad \sigma_4 = (1-x) + y.$$

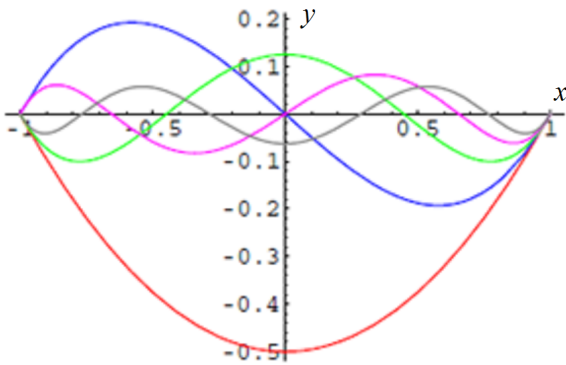


Рис. 3. Интегрированные полиномы Лежандра степени от 2 до 6

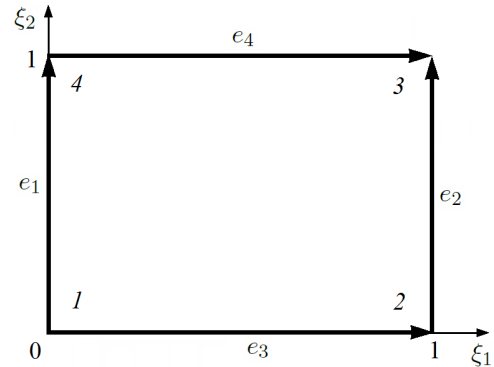


Рис. 4. Прямоугольный мастер-элемент \tilde{T}_{quad}^{div}

Ребро $E = [e_1, e_2]$ может быть параметризовано на интервал $[-1, 1]$ как

$$\xi_E = \sigma_2 - \sigma_1 \in [-1, 1].$$

Единичная нормаль к ребру $E = [e_1, e_2]$ может быть определена в виде

$$n_E = \nabla(\lambda_1 + \lambda_2).$$

В качестве edge-функций низкого порядка выберем функции для Raviart — Thomas конечного элемента [22], при этом нормальная компонента будет равна единице на ребре, с которым ассоциирована, и нулю на всех остальных ребрах:

$$\psi_{e_1}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{Curl}(\sigma_4 - \sigma_1)(\lambda_4 + \lambda_1), \quad (10)$$

$$\psi_{e_2}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{Curl}(\sigma_3 - \sigma_2)(\lambda_3 + \lambda_2), \quad (11)$$

$$\psi_{e_3}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{Curl}(\sigma_2 - \sigma_1)(\lambda_2 + \lambda_1), \quad (12)$$

$$\psi_{e_4}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{Curl}(\sigma_3 - \sigma_4)(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (13)$$

где $\text{Curl} = \left(\frac{\partial q}{\partial y}, -\frac{\partial q}{\partial x} \right)$.

Edge-функции высоких порядков связаны с интегрированными полиномами Лежандра и строятся таким образом, что след нормальной компоненты не равен нулю только на том ребре, на котором определена соответствующая базисная функция:

$$\psi_{e_1}^k = \text{Curl}(l_{k+2}(\sigma_4 - \sigma_1)(\lambda_4 + \lambda_1)), \quad (14)$$

$$\psi_{e_2}^k = \text{Curl}(l_{k+2}(\sigma_3 - \sigma_2)(\lambda_3 + \lambda_2)), \quad (15)$$

$$\psi_{e_3}^k = \text{Curl}(l_{k+2}(\sigma_2 - \sigma_1)(\lambda_2 + \lambda_1)), \quad (16)$$

$$\psi_{e_4}^k = \text{Curl}(l_{k+2}(\sigma_3 - \sigma_4)(\lambda_3 + \lambda_4)), \quad (17)$$

где $0 \leq k \leq p^{e_i} - 1$, $i = \overline{1, 4}$, — порядок базисной функции.

Bubble-функции также связаны с интегрированными полиномами Лежандра и строятся таким образом, что следы нормальных компонент равны нулю на всех ребрах конечного элемента:

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, k_2}^{b_1} &= \text{Curl}(l_{k_1+2}(2x-1)l_{k_2+2}(2y-1)) = \\ &= 2(l'_{k_1+2}(2x-1)l_{k_2+2}(2y-1)\tau_2 - l_{k_1+2}(2x-1)l'_{k_2+2}(2y-1)\tau_1), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\psi_{k_1, k_2}^{b_2} = l'_{k_1+2}(2x-1)l_{k_2+2}(2y-1)\tau_2 + l_{k_1+2}(2x-1)l'_{k_2+2}(2y-1)\tau_1, \quad (19)$$

$$\psi_{k_1}^{b_3} = l_{k_1+2}(2y-1)\tau_2, \quad (20)$$

$$\psi_{k_1+p^{b_3}}^{b_3} = l_{k_1+2}(2y-1)\tau_1, \quad (21)$$

где $0 \leq k_1, k_2 \leq p^{b_i} - 1$, $i = \overline{1, 3}$, а $\tau_1 = (1, 0)$ и $\tau_2 = (0, 1)$ — направления.

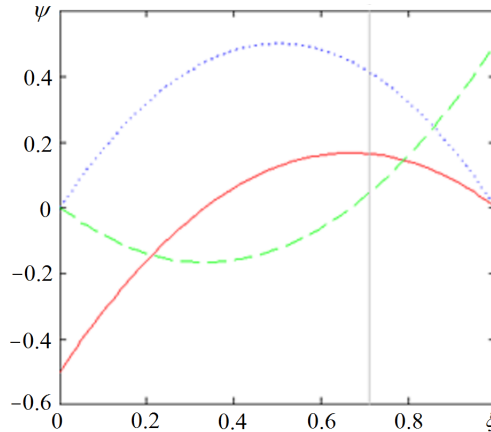


Рис. 5. Квадратичные базисные функции

Перейдем к построению базиса для давления в пространстве L_2 . Для построения одномерного базиса введем две разрывные функции и дополним одной непрерывной функцией. Квадратичные базисные функции для одномерного случая определяются формулами [23]

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)(1 - 3\xi),$$

$$\psi_2(\xi) = -2\xi^2 + 2\xi,$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)(1 - 3\xi)$$

и имеют вид, показанный на рис. 5. Двумерные биквадратичные базисные функции получаем в виде тензорного произведения одномерных квадратичных базисных функций.

3. Вычислительные эксперименты

3.1. Эксперименты с использованием разных базисных систем для скорости

Рассмотрим расчетную область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, на верхней и нижней границах которой заданы краевые условия Дирихле, а на левой и правой — краевые условия Неймана.

Коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, шаг сетки $h = 0.1$, базис давления — квадратичный. Аналитические функции давления, скорости и правая часть имеют вид

$$p = e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)},$$

$$u = \begin{pmatrix} 20(x - 0.5)e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} \\ 20(y - 0.5)e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} \end{pmatrix},$$

$$f = e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}(40 - (20x - 10)^2 - (20y - 10)^2).$$

В табл. 1 представлены результаты вычислительных экспериментов с использованием базиса скорости первого типа, т. е. определяемого по формулам (4)–(9). Видно, что включение bubble-функций в структуру иерархического базиса позволяет уменьшить относительную погрешность вычислений и повысить гладкость получаемого решения.

Т а б л и ц а 1. Относительные погрешности в норме L_2

Функции	Кол-во итераций	Относительная погрешность		
		давления	x -компоненты скорости	y -компоненты скорости
Edge-функции 0-го и 1-го порядков	137	0.00217674	0.0300599	0.0300542
Edge-функции 0-го и 1-го порядков + bubble-функции 2-го порядка	118	0.00070821	0.00546042	0.00529398

Т а б л и ц а 2. Относительные погрешности в норме L_2

Функции	Кол-во итераций	Относительная погрешность		
		давления	x -компоненты скорости	y -компоненты скорости
Edge-функции Raviart — Thomas (RT), 0-го порядка	100	0.00184703	0.0289859	0.0289423
Edge-функции RT, 0-го порядка + bubble-функции 1-го типа	91	0.00183731	0.02865	0.0286128
Edge-функции RT, 0-го порядка + bubble-функции 1- и 2-го типов	124	0.000690639	0.0203425	0.0202886
Edge-функции RT, 0-го порядка + bubble-функции 1-, 2- и 3-го типов	192	0.000748997	0.00749306	0.00735056

В табл. 2 представлены результаты вычислительных экспериментов с использованием базиса скорости второго типа, т. е. определяемого по формулам (10)–(21). Из таблицы следует, что включение в иерархическую базисную систему дивергентно свободных (т. е. функций первого типа) bubble-функций не дает уменьшения относительной погрешности решения. Однако после добавления базисных функций недивергентно свободных (т. е. второго и третьего типов) погрешность решения сокращается.

3.2. Плотный тензор проницаемости среды

Пусть расчетная область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, при этом на верхней и нижней границах области также заданы первые краевые условия, а на боковых границах — вторые; коэффициент проницаемости среды плотный: $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, шаг сетки $h = 0.5$.

Т а б л и ц а 3. Погрешности в норме L_2

Погрешность	Давление, p	x -компонента скорости, u_x	y -компонента скорости, u_y
Относительная	0.000129925	0.00204122	0.00182095
Абсолютная	2.0623e-7	2.50971e-5	2.23889e-5

Рассмотрим базис скорости первого типа, т. е. определяемый соотношениями (4)–(9), базис давления квадратичный. Аналитические функции для давления и скорости имеют вид

$$p = x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2,$$

$$u = \begin{pmatrix} -2xy(x-1)(y-1)[(x-1)(y-1)(2y+x) + xy((x-1) + 2(y-1))] \\ -2xy(x-1)(y-1)[(x-1)(y-1)(2x+y) + xy(2(x-1) + (y-1))] \end{pmatrix}.$$

В табл. 3 представлены относительные $\frac{\|u^* - u^h\|_{L_2}}{\|u^*\|_{L_2}}$ и абсолютные $\frac{\|u^* - u^h\|_{L_2}}{\|u^*\|_{L_2}}$ погрешности вычислений. На рис. 6 и 7 представлены численные поля давления и скорости.

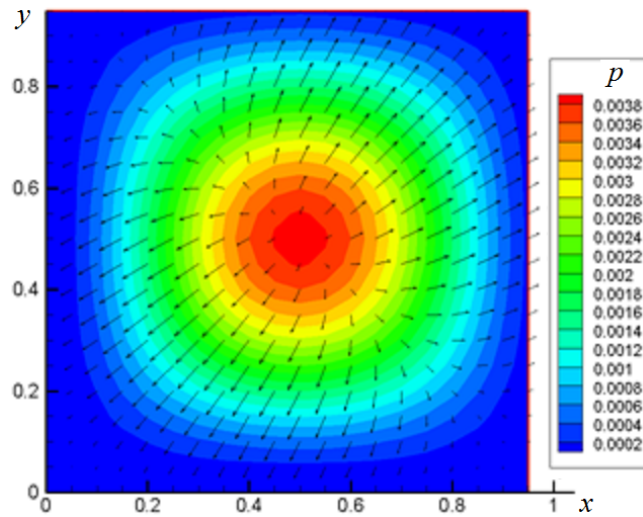


Рис. 6. Численные поля давления

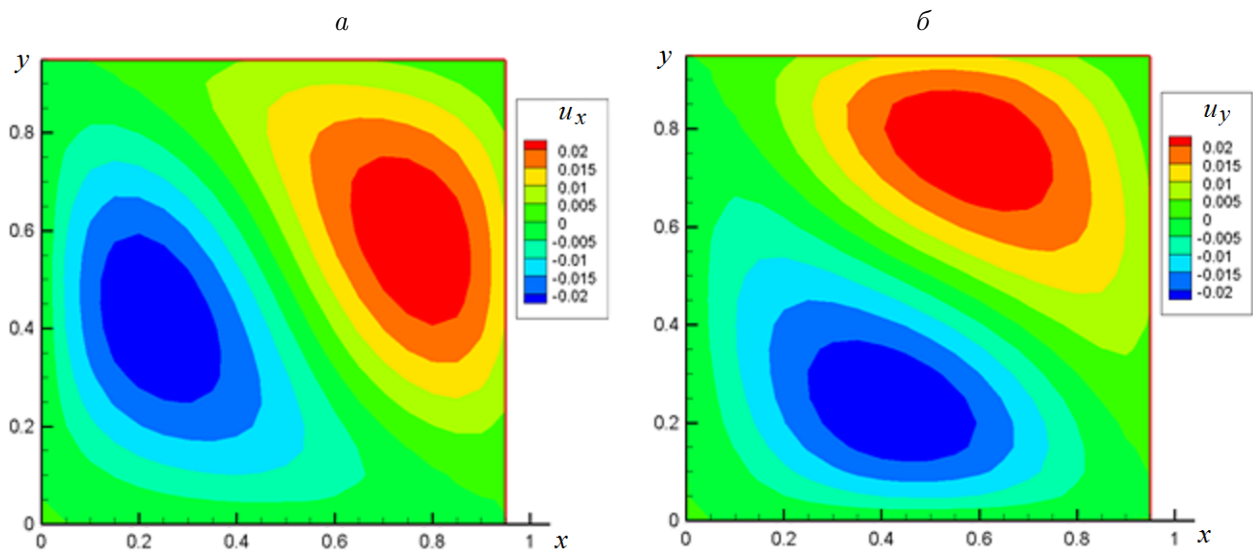


Рис. 7. Численные поля скорости: *а* — *x*-компоненты; *б* — *y*-компоненты

Т а б л и ц а 4. Погрешности в норме L_2

Погрешность	Давление, p	x -компонента скорости, u_x	y -компонента скорости, u_y
при K_1			
Относительная	2.02138e-8	4.65661e-10	1.03811e-7
Абсолютная	1.59448e-8	5.37699e-10	1.1987e-10
при K_2			
Относительная	8.96904e-8	2.05549e-10	2.65629e-7
Абсолютная	7.07488e-8	2.37348e-9	3.06722e-10
при K_3			
Относительная	9.98452e-6	7.50248e-10	2.24299e-7
Абсолютная	7.87589e-6	8.66312e-8	2.58999e-8

3.3. Контрастный тензор проницаемости среды

Пусть расчетная область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, на ее верхней и нижней границах заданы первые краевые условия, а на боковых границах — вторые, шаг сетки $h = 0.1$.

Рассмотрим базис скорости первого типа, т. е. определяемый соотношениями (4)–(9), базис давления — квадратичный. Аналитическая функция для давления

$$p = x^2 + y^2.$$

В табл. 4 представлены относительные $\frac{\|u^* - u^h\|_{L_2}}{\|u^*\|_{L_2}}$ и абсолютные $\|u^* - u^h\|_{L_2}$ погрешности вычислений при различных коэффициентах проницаемости среды:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

Проведенное исследование показало, что при увеличении контрастности тензорного коэффициента проницаемости среды до 10^5 построенная вычислительная схема позволяет обеспечить относительную погрешность вычислений $1.e-6$ для давления и $1.e-7$ для скорости.

Заключение

Построена вычислительная схема смешанной постановки на базе разрывного метода Галёркина для решения задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды. Проведена верификация программного комплекса на классе задач с гладким аналитическим решением.

Сконструированы две иерархические базисные системы из пространства H^{div} для скорости и базис для давления из пространства L_2 . Исследование первой базисной системы показало, что включение bubble-функций в структуру иерархического базиса первого типа позволяет в среднем уменьшить относительную погрешность вычислений в два раза и повысить гладкость получаемого решения, а также уменьшить количество итераций при решении системы линейных алгебраических уравнений. Также обнаружено, что включение в иерархическую базисную систему второго типа дивергентно

свободных (т. е. функций первого типа) bubble-функций не дает уменьшения относительной погрешности решения. Однако после добавления базисных функций недивергентно свободных (т. е. второго и третьего типов) погрешность решения сокращается в среднем на 30–40 %.

Получено, что вычислительная схема с численными потоками F. Brezzi и T.J.R. Hughes устойчива к контрастным значениям тензорного коэффициента проницаемости среды, и даже при увеличении контрастности до 10^5 построенная схема позволяет обеспечивать относительную погрешность вычислений $1.e-6$ для давления и $1.e-7$ для скорости.

Список литературы / References

- [1] **Леонтьев Н.Е.** Основы теории фильтрации: Учеб. пособие. М.: Изд-во Центра прикл. исследований при мех.-матем. фак-те МГУ, 2009. 88 с.
Leontiev, N.E. Fundamentals of the filtration theory: Study guide. Moscow: Izd-vo Tsentra prikl. issledovaniy pri mekh.-matem. fak-te MGU, 2009. 88 p. (In Russ.)
- [2] **Лейбензон Л.С.** Подземная гидрогазодинамика. М.: АН СССР, 1953. 544 с.
Leybenzon, L.S. Underground hydrodynamics. Moscow: AN SSSR, 1953. 544 p. (In Russ.)
- [3] **Arnold, D.N.** Mixed finite element methods for elliptic problems // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 1990. No. 82. P. 281–300.
- [4] **Brezzi, F.** On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO Anal. Numer. 1974. No. 8. P. 129–151.
- [5] **Arnold, D.N., Brezzi, F.** Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates // Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling. 1985. No. 19. P. 7–32.
- [6] **Arnold, D.N., Brezzi, F., Fortin, M.** A stable finite element for the Stokes equations // Calcolo. 1984. No. 21. P. 337–344.
- [7] **Crouzeix, M., Raviart, P.-A.** Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations // RAIRO Anal. Numer. 1973. No. 1. P. 33–76.
- [8] **Ainsworth, M., Coggins, P.** The stability of mixed hp-finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements // Siam J. Numer. Anal. 2000. No. 38. P. 1721–1761.
- [9] **Darlow, B., Ewing, R., Wheeler, M.** Mixed finite element methods for miscible displacement in porous media // Proc. Six SPE Symp. on Reservoir Simulation. New Orleans, 1982. P. 137–146.
- [10] **Ewing, R., Russel, T., Wheeler, M.** Simulation of miscible displacement using mixed methods and a modified method of characteristics // Seventh SPE Symp. on Reservoir Simulation. SPE 12241. San Francisco, 1983. P. 71–81.
- [11] **Marini, L.D., Savini, A.** Accurate computation of electric field in reverse-based semiconductor devices: a mixed finite approach // Compel. 1984. No. 3. P. 123–135.
- [12] **Masud, A., Hughes, T.J.R.** A stabilized mixed finite element method for Darcy flow // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 2002. Vol. 191(39-40). P. 4341–4370.
- [13] **Brezzi, F., Hughes, T.J.R., Marini, L.D., Masud, A.** Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow // J. of Sci. Comput. 2005. Vol. 22, No. 1. P. 119–225.
- [14] **Bassi, F., Rebay, S.** Discontinuous finite element high order accurate numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations // Proc. of the Conf. “Numerical methods for fluid dynamics V”. April 3–6, 1995. Oxford: Clarendon Press, 1995. P. 295–302.

- [15] **Baumann, C.E., Oden, J.T.** A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems // *Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng.* 1999. No. 175. P. 311–341.
- [16] **Reed, W.H., Hill, T.R.** Triangular mesh methods for the neutron transport equation: Tech. Report. Los Alamos Sci. Lab. Los Alamos, 1973. 23 p.
- [17] **Lin, Q., Zhou, A.H.** Convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation // *Acta Math. Sci.* 1993. No. 13. P. 207–270.
- [18] **Johnson, C., Pitkaranta, J.** An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equations // *Math. of Comput.* 1986. No. 46. P. 1–26.
- [19] **Arnold, D.N., Brezzi, F., Marini, L.D.** Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for alliptic problems // *SIAM J. on Numer. Anal.* 2002. Vol. 39, No. 5. P. 1749–1779.
- [20] **Beuchler, S., Pillwein, V., Zaglmayr, S.** Sparsity optimized high order finite element functions for $H(\text{div})$ on simplices // *Numerische Mathematik.* 2012. Vol. 22, No. 2. P. 197–225.
- [21] **Zaglmayr, S.** High order finite element methods for electromagnetic field computation: PhD thesis. Linz, Austria: Johannes Kepler Univ., 2006. 162 p.
- [22] **Raviart, P.A., Thomas, J.M.** A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems // *Lecture Notes in Mathematics.* 1987. Vol. 606. P. 3–25.
- [23] **Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б.** Современные многосеточные методы. Ч. I. Многомасштабные методы: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 68 с. **Shokin, Yu.I., Shurina, E.P., Itkina, N.B.** Modern multigrid methods. Pt I. Multiscale Methods: Study Guide. Novosibirsk: Izd-vo NSTU, 2010. 68 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 19 июня 2017 г.

Application of mixed non-conforming variational formulations for solving the Darcy problem

ITKINA, NATALIA B.^{1,*}, TROFIMOVA, SVETLANA A.^{1,2}

¹Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russia

²Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Itkina, Natalia B., e-mail: itkina.nat@yandex.ru

We consider the construction of a computational scheme for the Darcy model with a tensor permeability coefficient. We use the mixed finite element approximation based on the discontinuous Galerkin formulation. Recently the mixed method has become one of the modern approaches for a numerical solution of the Darcy problem. The main idea of this method is to approximate both the primary and dual variables, while searching for the critical point of the corresponding functional over the finite-element space of admissible test functions, which can be represented as a direct sum of two or more subspaces. This approach permits us to find a solution that corresponds to the physics of the simulated processes. The advantages and disadvantages of the mixed method are discussed in this paper.

We use numerical fluxes and jump stabilization following the approach of F. Brezzi, T.J.R. Hughes, L.D. Marini and A. Masud and obtain the computational scheme that is stable at the contrast value of the tensor permeability coefficient. Two hierarchical

basis systems for the velocity from H^{div} space and the basis system for pressure from L_2 space are constructed. The verification of the developed computational scheme is conducted on the class of problems which have an analytical solution.

The analysis of the obtained numerical results shows that the inclusion of bubble-functions in either hierarchical basis systems for velocity allows reducing errors and increasing the smoothness of the solution.

Keywords: filtration theory, Darcy model, mixed finite element method, discontinuous Galerkin formulation.

Received 19 June 2017