О повышении порядка точности по эволюционной переменной компактных разностных схем, аппроксимирующих уравнения нелинейной волоконной оптики

В. И. Паасонен[1,2,*], М. П. Федорук[1,2]
[1]Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский государственный университет, Россия
[*]Контактный e-mail: paas@ict.nsc.ru

Компактная разностная схема для уравнений нелинейной волоконной оптики, ранее разработанная авторами, имеет второй порядок аппроксимации по эволюционной переменной, и вопрос о его повышении без существенного усложнения схемы оставался открытым. С целью исследования этой возможности применено параметрическое осреднение искомого решения и сформулированы условия на параметры, при выполнении которых порядок аппроксимации повышается.

Показано, что при симметричном осреднении порядок аппроксимации удается повысить до четвертого, однако схема оказывается абсолютно неустойчивой. В случае несимметричного осреднения удается построить схемы третьего порядка аппроксимации, однако условие их устойчивости оказывается настолько ограничительным, что не возникает никаких преимуществ по сравнению с ранее разработанной авторской технологией.

Ключевые слова: компактная разностная схема, уравнение Шрёдингера, уравнение Гинзбурга—Ландау, повышенный порядок точности, нелинейная волоконная оптика.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле (или периодическая начально-краевая задача для одномерного уравнения Гинзбурга—Ландау (см., например, [1, 2]). В нелинейной оптике оно обычно используется в форме

$$i\,\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{D}{2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2\,U = i\,\delta\,U + i\,\varepsilon\,|U|^2\,U + i\,\beta\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (i\,\mu - \nu)\,|U|^4\,U, \qquad (1)$$

где комплексная искомая функция U зависит от эволюционной переменной t, имеющей смысл нормированной длины распространения, и от так называемого медленного времени x. Здесь i — мнимая единица, коэффициент $D = 1$ в случае нормальной дисперсии; коэффициенты $\delta, \varepsilon, \beta, \mu, \nu$ в правой части вещественны, причем $\beta \geq 0$. В частном случае, когда вся правая часть уравнения (1) заменена нулем, получается уравнение Шрёдингера.

Рассматриваемые здесь уравнения описывают процессы, протекающие в волоконных лазерах, волоконно-оптических линиях связи и в различных оптических устройствах [2–4]. Типичными решениями таких уравнений являются функции, содержащие ряд изолированных взаимодействующих сигналов в форме солитонов с малым носителем. В случае применения традиционных разностных схем такой существенно неоднородный характер решений требует чрезвычайно детальной сетки и больших вычислительных затрат, в связи с этим для решения подобных задач чаще используются методы, основанные на быстром преобразовании Фурье [5]. Однако в случае больших задач становится необходимой параллельная реализация, которая для спектральных методов, в отличие от разностных, довольно затруднительна. Поэтому повышение порядка точности разностных схем представляется одним из актуальных путей для совершенствования технологии расчетов, что неоднократно подтверждено результатами решения тестовых задач, свидетельствующими о колоссальном преимуществе высокоточных схем [6–8] перед традиционными схемами второго порядка. В работах авторов [7, 8] созданы абсолютно устойчивые трехслойные схемы четвертого порядка аппроксимации относительного шага по “медленному времени” и второго порядка по эволюционной переменной. В данной работе исследуется возможность повышения порядка аппроксимации по эволюционной переменной без существенного усложнения схемы, путем более тонкого использования ресурса трехслойности.

Для удобства представим уравнение (1) в канонической форме, умножив его на $-i$. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(U), \tag{2}$$

где

$$a = \beta + \frac{D}{2}\,i, \quad f(U) = U\,(\delta + z|U|^2 + w\,|U|^4), \tag{3}$$
$$z = \varepsilon + i, \quad w = \mu + \nu\, i.$$

В зависимости от типа коэффициента a и характера правой части f уравнение (2) может быть уравнением теплопроводности (вещественное $a > 0$, правая часть f — произвольная вещественная функция; в этом случае t — время, x — пространственная переменная), уравнением Шрёдингера (мнимое $a = Di/2$ и кубичная нелинейность в правой части $f(U) = iU|U|^2$) и уравнением Гинзбурга—Ландау (комплексное a и функция $f(U)$ в виде (3)).

Формально уравнение (2) выглядит как уравнение теплопроводности, а для него известна классическая схема повышенного порядка точности Микеладзе [9], обладающая точностью $O(\tau^2 + h^4)$, где h и τ — шаги равномерной сетки по x и t соответственно. В работах [7, 8] с целью избежать итераций по нелинейности схема Микеладзе записывалась в виде трехслойной с удвоенным шагом по эволюционной переменной, причем в аппроксимациях дифференциальных операторов решение на среднем слое вообще не фигурировало, а нелинейная правая часть, напротив, аппроксимировалась исключительно на среднем слое. Этот прием позволил одновременно сохранить повышенный порядок точности схемы, не потерять свойства абсолютной устойчивости и избежать нелинейности на верхнем слое. Запишем соответствующую схему в виде

$$S\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\,\tau} = a\,\Lambda\frac{U^{n+1} + U^{n-1}}{2} + Sf^n, \tag{4}$$

где Λ — трехточечный разностный аналог двойного дифференцирования по x; E — тождественный оператор; S — оператор специального осреднения,

$$Sw(x) = \left(E + \frac{h^2}{12}\Lambda\right) w(x) = \frac{w(x+h) + w(x-h)}{12} + \frac{5}{6}w(x). \tag{5}$$

Мысль о возможном повышении порядка аппроксимации по τ за счет использования трехслойности схемы возникла в связи с тем, что в похожем случае трехслойной схемы для уравнения колебаний был достигнут положительный результат [10, 11] при попытке повышения порядка точности по времени до четвертого.

2. Схема с симметричным осреднением

Для нашего случая идея повышения порядка точности состоит в том, чтобы вместо полусуммы в трехслойную схему (4), (5) ввести параметрическое осреднение по трем слоям, а значения параметров выбрать так, чтобы слагаемые порядка $O(\tau^2)$ в разложении погрешности обратились в нуль.

Итак, рассмотрим схему вида

$$S\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\,\tau} = a\,\Lambda(\delta U^{n+1} + (1-2\delta)U^n + \delta U^{n-1}) + \Omega f^n, \tag{6}$$

где δ и Ω — пока не определенные параметр и разностный оператор. Разложением по формуле Тейлора в окрестности центра шаблона схемы вычислим ее погрешность на достаточно гладких решениях исходного уравнения (2). С учетом разложений

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + O(h^4) = S\frac{\partial^2}{\partial x^2} + O(h^4),$$

$$\delta U^{n+1} + (1-2\delta)U^n + \delta U^{n-1} = U + \delta\tau^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O(\tau^4)$$

и следствий исходного уравнения (2), полученных его дифференцированием, для погрешности схемы получим выражение

$$\Psi = \tau^2 S\left(\left(\frac{1}{6} - \delta\right) a\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(\Omega f - f - \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right) + O(\tau^4 + h^4).$$

Выберем параметр и правую часть в виде

$$\delta = \frac{1}{6}, \quad \Omega f^n = Sf^n + \frac{\tau^2}{6}\frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2}. \tag{7}$$

Тогда погрешность симметричной схемы (6), (7) составит величину $O(\tau^4 + h^4)$.

Анализ устойчивости симметричной схемы. Исследуем устойчивость схемы (6), (7) для однородного уравнения в предположении $a > 0$. Дисперсионный анализ приводит к квадратному уравнению для коэффициента ρ возрастания гармоники $\exp(i\omega x)$:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)(\rho^2 - 1) + \frac{4}{3}K\lambda(\rho^2 + 4\rho + 1) = 0, \quad \lambda = \sin^2\frac{\omega\,h}{2}, \quad K = \frac{a\,\tau}{h^2}.$$

Для оценки корней дисперсионного уравнения представляется целесообразным воспользоваться критерием Гурвица (см., например, [12]), в общем случае определяющим необходимые и достаточные условия принадлежности всех корней полинома с вещественными коэффициентами комплексной полуплоскости $Rez < 0$. При специальном дробно-линейном преобразовании полуплоскость взаимно-однозначно переходит в единичный круг, поэтому критерий можно переформулировать как условие принадлежности корней единичному кругу $|\rho| \leq 1$. В интересующем нас частном случае квадратного уравнения критерий Гурвица во второй формулировке гласит: корни квадратного уравнения $A\rho^2+B\rho+C=0$ с вещественными коэффициентами тогда и только тогда лежат в единичном круге $|\rho| \leq 1$ комплексной плоскости, когда выполняются два неравенства:

$$\left|\frac{C}{A}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{B}{A}\right| \leq 1+\frac{C}{A}.$$

В нашем случае коэффициенты квадратного уравнения имеют вид

$$A = 4K\lambda + 3 - \lambda, \quad B = 16K\lambda, \quad C = 4K\lambda - 3 + \lambda.$$

Ясно, что $K > 0$, а λ пробегает интервал $(0, 1)$, когда частота гармоники пробегает весь спектр, поэтому здесь $A > 0$. Простой подстановкой в неравенства конкретных выражений коэффициентов нетрудно установить, что первое из неравенств критерия истинно для всех гармоник. Второе же неравенство, напротив, ложно для любой гармоники, так как $A+C = 8K\lambda < 16K\lambda = B$. Следовательно, симметричная схема (6) абсолютно неустойчива и поэтому для расчетов, к сожалению, непригодна.

3. Несимметричная схема

Рассмотрим схему вида

$$\begin{gathered} S\left(\sigma\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}+(1-\sigma)\frac{U^n-U^{n-1}}{\tau}\right) = a\,\Lambda\Sigma U^n+\Omega f^n, \\ \Sigma U^n = \left(\delta_+U^{n+1}+(1-\delta_+-\delta_-)U^n+\delta_-U^{n-1}\right), \end{gathered} \tag{8}$$

где оператор правой части Ω и параметры осреднения σ, δ_+ и δ_- пока неизвестны и подлежат определению исходя из условий аппроксимации. Вычислим погрешность схемы (3) на классе достаточно гладких решений исходного уравнения (2). Из разложений

$$\delta_+U^{n+1}+(1-\delta_+-\delta_-)U^n+\delta_-U^{n-1} = U+\tau(\delta_+-\delta_-)\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}(\delta_++\delta_-)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+O(\tau^3),$$

$$\sigma\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}+(1-\sigma)\frac{U^n-U^{n-1}}{\tau} = \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\tau}{2}(2\sigma-1)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+O(\tau^3)$$

с учетом дифференциальных следствий исходного уравнения (2) для погрешности схемы получим выражение

$$\Psi = S\left(\tau(\sigma-\frac{1}{2}-\delta_++\delta_-)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{1}{3}-\delta_+-\delta_-\right)\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\right)-$$

$$-\Omega f+S\left(f+\tau(\delta_+-\delta_-)\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}(\delta_++\delta_-)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)+O(\tau^3+h^4).$$

Следовательно, если параметры схемы (3) связать соотношениями

$$\delta_+ - \delta_- = \sigma - \frac{1}{2}, \quad \delta_+ + \delta_- = \frac{1}{3}, \tag{9}$$

где σ остается свободным параметром, а правую часть аппроксимировать выражением

$$\Omega f^n = S\left(f^n + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\frac{f^{n+1} - f^{n-1}}{2\tau} + \frac{\tau^2}{6}\frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2}\right), \tag{10}$$

то погрешность Ψ составит величину $O(\tau^3 + h^4)$. Из системы уравнений (9) находим параметры осреднения

$$\delta_+ = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{12}, \quad \delta_- = \frac{5}{12} - \frac{\sigma}{2}. \tag{11}$$

Таким образом, получено однопараметрическое семейство компактных схем (3) с условиями (10), (11), аппроксимирующих уравнение (2) с погрешностью $O(\tau^3 + h^4)$.

Анализ устойчивости несимметричной схемы. Исследуем устойчивость схемы (3) для однородного уравнения и в предположении $a > 0$. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)\big(\sigma(\rho^2 - \rho) + (1-\sigma)(\rho - 1)\big) + 2K\lambda\left(\left(\sigma - \frac{1}{6}\right)\rho^2 + \frac{4}{3}\rho + \frac{5}{6} - \sigma\right) = 0.$$

Оно представляется в виде канонического квадратного уравнения $A\rho^2 + B\rho + C = 0$ с коэффициентами

$$A = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)\sigma + 2K\lambda\left(\sigma - \frac{1}{6}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)(1 - 2\sigma) + \frac{8}{3}K\lambda,$$

$$C = \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)(\sigma - 1) + 2K\lambda\left(\frac{5}{6} - \sigma\right).$$

Предположим, что $A > 0$. Это справедливо, в частности, при $\sigma \geq 1/6$, а дальнейший анализ показывает, что потребуется еще более жесткое ограничение на σ. При положительном A требования критерия Гурвица означают систему неравенств

$$-A \leq C \leq A, \quad -A - C \leq B \leq A + C.$$

Заметим, что A, B и C линейно зависят от λ, поэтому достаточно исследовать неравенства только на концах промежутка, т. е. при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Подставив в систему неравенств выражения коэффициентов при этих значениях, нетрудно получить точные условия ее истинности $\forall\lambda \in (0, 1)$:

$$\sigma \geq \frac{1}{2}, \quad K \leq 2\sigma - 1. \tag{12}$$

Заключение

Следует подчеркнуть, что при повышении порядка точности в правую часть (3) пришлось ввести осредненные по трем слоям значения функции f, зависящей от решения, и тем самым пожертвовать важным свойством безытерационности. В этом смысле схемы семейства (3) проигрывают ранее построенной безытерационной схеме [7, 8].

Далее, необходимый критерий устойчивости (12) однопараметрического семейства несимметричных компактных схем (3) ограничивает шаг τ величиной, пропорциональной квадрату шага h:

$$\tau \leq \frac{2\sigma - 1}{a} h^2.$$

Тестовые расчеты показали, что этот критерий оказался довольно точным на практике в том смысле, что даже минимальные его нарушения приводили к быстрому появлению осцилляций и фатальному их развитию. Схема [7, 8], напротив, является абсолютно устойчивой, но характер ее погрешности $O(\tau^2 + h^4)$ также вынуждает соблюдать соотношение $\tau = O(h^2)$ при стремлении шагов к нулю. Иначе говоря, ограничения на шаг аналогичны, хотя и вызваны разными причинами: для ранее разработанной схемы [7, 8] — условиями аппроксимации, а для схемы (3) — условиями устойчивости. Таким образом, хотя несимметричная схема (3) имеет формально более высокий порядок аппроксимации по эволюционной переменной, чем ее предшественница [7, 8], реально воспользоваться этим для укрупнения шага счета по τ не представляется возможным.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-72-30006).

Список литературы / References

[1] **Akhmediev, N.N., Afanasiev, V.V.** Singularities and special soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginsburg—Landau equation // Physical Review E. 1996. Vol. 53, No. 1. P. 1190–1201.

[2] **Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005. 647 с.
Kiwshar, Ju.S., Agrawal, G.P. Optical solitons. From fiber light guides to photon crystals. Moscow.: Fizmatlit, 2005. 647 p. (In Russ.)

[3] **Agrawal, G.P.** Nonlinear fiber optics. N.Y.: Acad. Press, 2001. 446 p.

[4] **Agrawal, G.P.** Aplications of nonlinear fiber optics. N.Y.: Acad. Press, 2001. 458 p.

[5] **Lu, S., Lu, Q., Twizell, E.H.** Fourier spectral approximation to long-time behaviour of the derivative three-dimensional Ginzburg—Landau equation // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 198. P. 167–186.

[6] **Shu Sen Xie, Guang Xing Li, Sucheol Yi.** Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation b,2 // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 2009. Vol. 198. P. 1052–1061.

[7] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная безытерационная схема с искусственной диссипацией для нелинейного уравнения Шрёдингера // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 3. С. 83–90.
Paasonen, V.I., Fedoruk, M.P. A compact noniterative scheme with artificial dissipation for nonlinear Schrödinger equation // Comput. Technologies. 2012. Vol. 17, No. 3. P. 83–90. (In Russ.)

[8] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Трехслойная безытерационная схема повышенного порядка точности для уравнения Гинзбурга — Ландау // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20, № 3. С. 46–57.
Paasonen, V.I., Fedoruk, M.P. Three-level non-iterative high accuracy scheme for Ginzburg — Landau equation // Comput. Technologies. 2015. Vol. 20, No. 3. P. 46–57. (In Russ.)

[9] **Микеладзе Ш.Е.** О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов // Изв. АН СССР. Математика. 1941. Т. 5, № 1. С. 57–74.
Mikeladze, Sh.E. On the numerical integration of the equations of elliptic and parabolic types // Izv. AN SSSR. Matematika. 1941. Vol. 5, No. 1. P. 57–74. (In Russ.)

[10] **Валиуллин А.Н., Паасонен В.И.** Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Числ. методы мех. сплошн. среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ. 1970. Т. 1, № 1. С. 34–47.
Valiullin, A.N., Paasonen, V.I. Economic difference schemes of the high accuracy order for the multidimensional wave equation // Chisl. Methody Mekhaniki Sploshnoy Sredy. 1970. Vol. 1, No. 1. P. 34–47. (In Russ.)

[11] **Paasonen, V.I.** Compact schemes for system of second-order equations without mixed derivatives // Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling. 1998. Vol. 13, No. 4. P. 335–344.

[12] **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. Л.; М.: Наука, 1988. 552 с.
Gantmakher, F.R. Matrices theory. L.; M.: Nauka, 1988. 552 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 13 октября 2017 г.

Increasing the order of accuracy for the evolutionary variable of the compact difference schemes approximating the equations of nonlinear fiber optics

Paasonen, Viktor I.[1,2,*], Fedoruk, Mikhail P.[1,2]

[1]Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

[2]Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

[*]Corresponding author: Paasonen, Viktor I., e-mail: paas@ict.nsc.ru

The compact finite difference scheme for the equations of nonlinear fiber optics developed by the authors earlier has the second order of approximation with respect to the evolutionary variable so the problem for the improvement of approximation accuracy without essential complication of the scheme is still open. Considering the study of this issue as a goal, we applied parametric averaging and formulated conditions under which the approximation order increases.

It is proved that in case of the symmetric averaging the order of approximation increases to the fourth order; however the scheme becomes absolutely unstable. In case of the asymmetrical averaging it is possible to construct schemes of the third order of approximation, however the condition of their stability is so strong that there are no advantages compared to the earlier schemes developed by the authors.

Keywords: compact difference scheme, Shrödinger equation, Ginzburg — Landau equation, high order accuracy, nonlinear fiber optics.

Acknowledgements. The study was supported by the RSF (project No. 17-72-30006).

Received 13 October 2017