

# Схемы расщепления высокого порядка точности для интегрирования нелинейного уравнения Шрёдингера

С. В. Смирнов

Новосибирский государственный университет, Россия

Контактный e-mail: [smirnov@lab.nsu.ru](mailto:smirnov@lab.nsu.ru)

Представлен краткий обзор численных методов, используемых для интегрирования нелинейного уравнения Шрёдингера. Выполнен сравнительный анализ эффективности численных схем второго, четвертого и шестого порядков точности с расщеплением шага по физическим процессам с использованием преобразования Фурье на линейном шаге. На примере задачи распространения связанного состояния солитонов исследован вопрос об оптимальном выборе численной схемы в зависимости от требуемой точности и начальных условий задачи Коши.

*Ключевые слова:* нелинейное уравнение Шрёдингера, метод расщепления по физическим процессам.

## Введение

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) широко используется для численного моделирования в области телекоммуникаций [1–4] и лазерной физики [5–13]. Включение в уравнение дополнительных членов, описывающих хроматическую дисперсию групповых скоростей высшего порядка и вынужденного комбинационного рассеяния, позволяет успешно моделировать распространение сверхкоротких оптических импульсов с длительностью в фемтосекундном диапазоне, а также эффект генерации суперконтинуума — сверхшироких оптических спектров с шириной до нескольких октав в видимом и ближнем инфракрасном диапазоне длин волн [14–16].

Несмотря на то что НУШ может быть проинтегрировано точно методом обратной задачи рассеяния [17], точные аналитические решения оказываются полезны при решении лишь относительно узкого класса задач. В этой связи для практических приложений в области лазерной физики и телекоммуникаций для интегрирования НУШ, как правило, используются численные методы, наиболее употребительны из которых конечно-разностные и псевдоспектральные.

Конечно-разностные методы можно, в свою очередь, разделить на явные (включая “классическую” явную схему, а также трехслойные схемы [18] и схемы с чередованием [19]) и неявные [20, 21]. Последний подкласс включает в себя, в частности, неявно-явную схему (неявную для линейной части и явную для нелинейной), схему Кранка — Николсона и методы на основе обратной задачи рассеяния [20, 22, 23]. Важным достоинством конечно-разностных схем является относительно высокая эффективность их распараллеливания, что стимулирует активную разработку новых схем [24, 25].

Широкое распространение для решения практических задач получили спектральные методы [26–29], использующие быстрое преобразование Фурье для интегрирования жесткой линейной части НУШ в частотном представлении.

Одним из наиболее широко используемых для интегрирования НУШ подклассов спектральных методов является метод расщепления по физическим процессам [27, 28]. Схема расщепления безусловно устойчива, относительно проста в программировании и превосходит по скорости счета многие конечно-разностные методы [20]. Первоначально предложенный вариант метода расщепления по физическим процессам обеспечивал первый порядок точности по шагу  $h$  эволюционной координаты. Впоследствии были разработаны симметричные схемы второго [30] и четвертого [31] порядков точности, получившие широкое распространение.

Еще одной разновидностью спектральных методов является схема с переходом к представлению взаимодействия [29], которая предполагает переход к спектральному представлению для точного интегрирования жесткой линейной части НУШ, что роднит ее с методом расщепления. Однако, в отличие от схемы расщепления, разделение линейной и нелинейной частей выполняется в данном случае не приближенно, но точно, путем формальной замены, так что точность схемы в целом определяется исключительно конечно-разностным методом, используемым для интегрирования уравнения в представлении взаимодействия. В частности, в работе [29] и многочисленных дальнейших исследованиях используется схема Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Как отмечается в работе [29], использование разностных методов более высокого порядка для интегрирования НУШ в представлении взаимодействия нецелесообразно ввиду резкого увеличения числа преобразований Фурье на каждом шаге.

Интенсивное использование НУШ для решения актуальных задач в области лазерной физики и телекоммуникаций обуславливает потребность в высокоэффективных численных методах. Несмотря на это, в большинстве работ используются методы второго и четвертого порядков точности, при этом ни в одной известной автору работе не проводилось сравнительное исследование эффективности схем шестого и более высоких порядков точности для численного интегрирования НУШ, использующих метод расщепления по физическим процессам. Данная работа направлена на устранение этого пробела.

## 1. Описание численных схем

Нелинейное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{L} + \hat{N})A, \quad (1)$$

где  $i^2 = -1$ ;  $A$  — огибающая напряженности электрического поля волны;  $z$  — эволюционная координата (в волоконной оптике и телекоммуникациях — расстояние вдоль волокна);  $\hat{L}$  и  $\hat{N}$  — дисперсионный и нелинейный операторы соответственно. В простейшем случае операторы имеют вид

$$\hat{L}A = \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \quad \hat{N}A = -\gamma|A|^2 A, \quad (2)$$

где  $t$  — время;  $\beta_2$  и  $\gamma$  — дисперсионный и нелинейный коэффициенты среды соответственно. Данное приближение хорошо описывает распространение квазинепрерывного

излучения и импульсов с шириной спектра вплоть до нескольких терагерц [32]. Для моделирования распространения лазерных импульсов длительностью менее  $10^{-12}$  с и генерации оптического излучения с широким спектром (суперконтинуума) необходимо включить в уравнение высшие порядки разложения хроматической дисперсии групповых скоростей, вынужденное комбинационное рассеяние (задержанный нелинейный отклик среды) и ряд других поправок, так что вид операторов  $\hat{L}$  и  $\hat{N}$  становится более сложным [31, 33], что, однако, непринципиально в контексте данной работы.

Метод расщепления по физическим процессам в самом простом виде [27, 28] основан на разделении шага  $h$  численного интегрирования на две части, на одной из которых действует только оператор  $\hat{L}$ , на другой — только  $\hat{N}$ , так что численное решение  $\Psi(z, t)$  имеет вид

$$\Psi(z + h, t) = \exp(h\hat{N}) \exp(h\hat{L})\Psi(z, t). \quad (3)$$

Действие линейного оператора  $\exp(h\hat{L})$  выполняется в фурье-представлении [33], что обеспечивает безусловную устойчивость численного решения. Действие нелинейного оператора  $\exp(h\hat{N})$  во временном представлении может быть выполнено любым способом, обеспечивающим требуемый порядок точности. Погрешность численного решения, построенного по формуле (3), возникает в результате замены оператора эволюции  $\exp(h(\hat{N} + \hat{L}))$  на произведение  $\exp(h\hat{N}) \exp(h\hat{L})$  и связана с некоммутативностью операторов  $\hat{N}\hat{L} \neq \hat{L}\hat{N}$ . В частности, погрешность схемы (3) на одном шаге составляет  $O(h^2)$  и  $O(h)$  при использовании  $l/h$  шагов, где  $l$  — длина промежутка интегрирования. Поскольку для решения практических задач наибольший интерес представляет последняя из двух указанных погрешностей, условимся далее всюду указывать только ее. Схема (3) имеет первый порядок точности (погрешность  $R \propto h^1$ ), поэтому практически не используется в расчетах. Несложно повысить порядок точности метода расщепления до второго ( $R = O(h^2)$ ), используя симметричную формулу [30]

$$\Psi(z + h, t) = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right)\Psi(z, t) \equiv \hat{S}_2(h)\Psi(z, t). \quad (4)$$

В работе [34] в контексте исследования гамильтоновых механических систем предложен регулярный способ повышения порядка точности интеграторов на 2 за счет использования симметричной схемы

$$\begin{aligned} \hat{S}_{2n+2}(h) &= \hat{S}_{2n}(b_{2n}h) \hat{S}_{2n}(a_{2n}h) \hat{S}_{2n}(b_{2n}h), \\ a_{2n} &= -\frac{2^{1/(2n+1)}}{2 - 2^{1/(2n+1)}}, \quad b_{2n} = \frac{1}{2 - 2^{1/(2n+1)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждое применение формулы (5) увеличивает число операторов  $\hat{S}_2$  втрое — во столько же раз возрастают число дискретных преобразований Фурье и машинное время для продолжения численного решения на величину шага  $h$ . В этой связи в работе [34] предложено альтернативное решение — построение экономичных схем вида

$$\hat{S}^{(m)}(h) = \hat{S}_2(w_m h) \times \dots \times \hat{S}_2(w_1 h) \hat{S}_2(w_0 h) \hat{S}_2(w_1 h) \times \dots \times \hat{S}_2(w_m h), \quad (6)$$

где  $w_k$  — коэффициенты, найденные в работе [34] численно в частных случаях  $m = 3$  и  $m = 7$ , обеспечивающих шестой и восьмой порядки точности интеграторов  $\hat{S}^{(3)}$  и  $\hat{S}^{(7)}$  соответственно. Ниже будет проведен анализ эффективности схем расщепления применительно к интегрированию НУШ. В сравнении использованы симметричная схема

второго порядка с оператором  $\hat{S}_2$  (4), схемы четвертого и шестого порядков ( $\hat{S}_4$  и  $\hat{S}_6$ ), построенные в соответствии с (5), экономичные схемы шестого порядка (6) [34], а также схема четвертого порядка, предложенная в работе [31]:

$$\hat{S}_{BW}(6h) = (\hat{S}_2(h))^4 \hat{S}_2(-2h) (\hat{S}_2(h))^4.$$

## 2. Сравнение численных схем

Для сравнения численных схем написан программный код на языке Си/Си++; для выполнения быстрого преобразования Фурье (БПФ) использовалась библиотека FFTW. Численное решение для каждой из рассматриваемых численных схем сравнивалось с точным аналитическим решением для задач распространения фундаментальных солитонов и солитонов второго порядка на целом числе периодов. В результате установлено, что численное решение в каждом случае аппроксимирует точное решение. Для целей сравнения численных схем оценка погрешности производилась по методу Рунге; счет производился на последовательности  $z$ -сеток с отношением числа узлов, равным степеням двойки. Использование метода Рунге позволило исключить вклад в погрешность конечности шага  $t$ -сетки и влияние на ответ симметрии по  $z$  осциллирующей динамики многосолитонных решений. Для выполнения вычислений использовались 64- и 128-битные числа с плавающей точкой, соответствующие стандарту IEEE 754.

Обратим внимание, что все участвующие в сравнении численные схемы могут быть записаны в виде (6), а следовательно, отличаются друг от друга лишь количеством  $m$  членов в формуле и набором коэффициентов  $w_k$ . В этой связи для сравнения схем удобно использовать зависимость погрешности численного решения от числа БПФ, выполненных для его построения. Обратим внимание, что число БПФ в расчетах может быть легко сокращено приблизительно в 1.5 раза за счет объединения соседних линейных операторов при подстановке  $\hat{S}_2$  (4) в произведение (6):

$$\exp\left(\frac{1}{2}w_j h \hat{L}\right) \exp\left(\frac{1}{2}w_{j+1} h \hat{L}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(w_j + w_{j+1}) h \hat{L}\right).$$

Таким образом, для построения численного решения  $\Psi(l, t) = (\hat{S}^{(m)}(l/q))^q \Psi(0, t)$  с использованием  $q$  шагов по схеме (6) необходимо  $2q(2m+1) + 1$  БПФ — данная величина будет использована ниже в сравнительном анализе численных схем. Для удобства в таблице собраны данные обо всех рассматриваемых схемах, включая порядок схемы  $p$ :  $R = O(h^p)$ , количество членов  $m$  и коэффициенты  $w_k$  в (6). (Коэффициент  $w_0$  может быть вычислен из условия  $1 = w_0 + 2 \sum_{k=1}^m w_k$  и для краткости не указан в таблице.) Схемы, соответствующие операторам  $\hat{S}_a^{(3)}$ ,  $\hat{S}_b^{(3)}$  и  $\hat{S}_c^{(3)}$ , отнесены в работе [34] к экономичным ввиду того, что требуют меньшего числа БПФ на каждом шаге по сравнению со схемой  $\hat{S}_6$ , также имеющей шестой порядок точности. Коэффициенты  $w_k$  в схемах  $\hat{S}_{a,b,c}^{(3)}$  найдены численно [34] и уточнены в данной работе.

Погрешность численного интегрирования НУШ  $R \equiv \max_t |\Psi(l, t) - A(l, t)|$  в зависимости от числа БПФ показана на рис. 1 точками (маркерами) в двойном логарифмическом масштабе; соответствие маркеров и схем показано на легенде в правом верхнем углу. Для удобства результаты, полученные для схем второго и четвертого порядков, показаны на рис. 1, а, для схем шестого порядка — на рис. 1, б. Три сплошные прямые (одинаковые для обоих рисунков) проведены методом наименьших квадратов для

Схемы, используемые в сравнении

Оператор	$p$	$m$	$w_k$ ( $k = 1, \dots, m$ )
$\hat{S}_2$	2	0	—
$\hat{S}_4$	4	1	$b_2$ в (5)
$\hat{S}_{BW}$	4	4	1/6, 1/6, 1/6, 1/6
$\hat{S}_6$	6	4	$b_2 a_4, b_2 b_4, a_2 b_4, b_2 b_4$
$\hat{S}_a^{(3)}$	6	3	-1.1776799841788710, 0.23557321335935813, 0.78451361047755726
$\hat{S}_b^{(3)}$	6	3	-2.1322852220014515, $4.2606818707920162 \cdot 10^{-3}$ , 1.4398481679767831
$\hat{S}_c^{(3)}$	6	3	$1.5288622842492702 \cdot 10^{-3}$ , -2.1440353163053893, 1.4477825623992979

схем  $\hat{S}_2$ ,  $\hat{S}_{BW}$  и  $\hat{S}_a^{(3)}$ . Наклон прямых соответствует порядку точности использованных схем ( $R \propto h^2, h^4$  и  $h^6$ ).

При малом числе шагов численного интегрирования (менее 70 БПФ, что соответствует погрешности  $R > 1.5 \cdot 10^{-4}$ ) наилучшую точность обеспечивает симметричная схема второго порядка  $\hat{S}_2$ ; при большем числе шагов становится выгоднее использовать схему четвертого порядка. Обратим внимание, что в данном тесте схема  $\hat{S}_{BW}$  [31] показала более высокую точность по сравнению с другой схемой четвертого порядка  $\hat{S}_4$  [34] независимо от числа разбиений, несмотря на то, что количество БПФ на одном шаге схемы  $\hat{S}_{BW}$  вдвое превышает аналогичное количество для схемы  $\hat{S}_4$ .

При дальнейшем увеличении числа шагов (свыше 300 БПФ, что соответствует погрешности  $R < 2 \cdot 10^{-7}$ ) целесообразно использовать схему шестого порядка  $\hat{S}_a^{(3)}$ . Другие исследованные схемы шестого порядка дают сопоставимые результаты, однако имеют несколько больший коэффициент пропорциональности  $R \sim h^6$ , что хорошо видно на рис. 1, б.

Полученные результаты воспроизводились на временных сетках с различным числом узлов. Изменение верхнего предела интегрирования  $l$  приводит к масштабированию полученных зависимостей по числу БПФ, что соответствует синхронному сдвигу графиков на рисунке вдоль горизонтальной логарифмической оси.

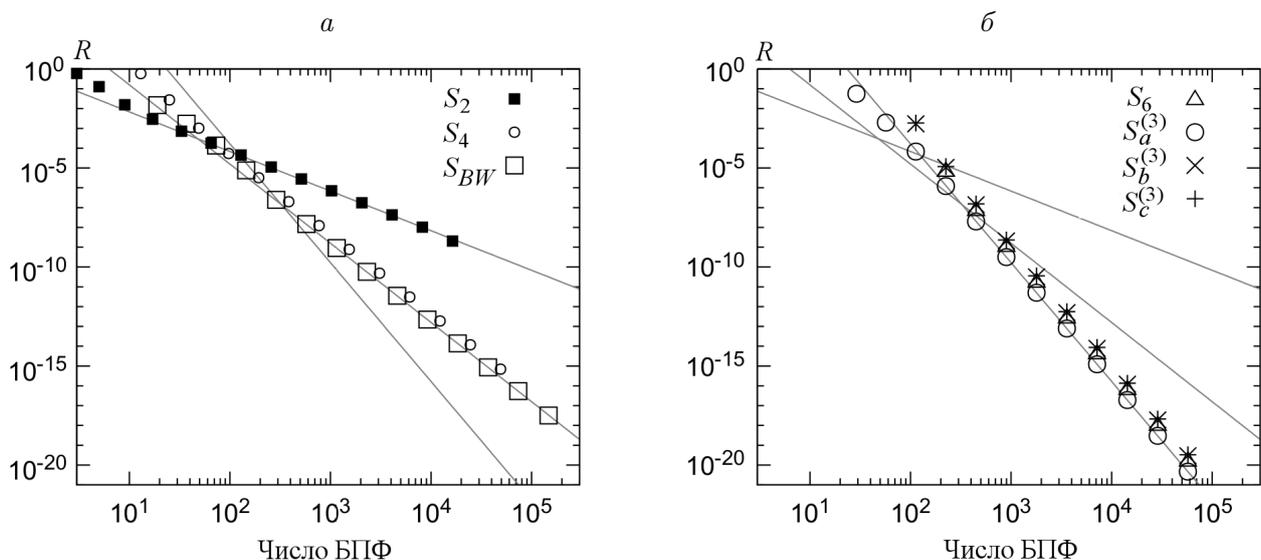


Рис. 1. Зависимость погрешности численного решения от числа БПФ для различных схем

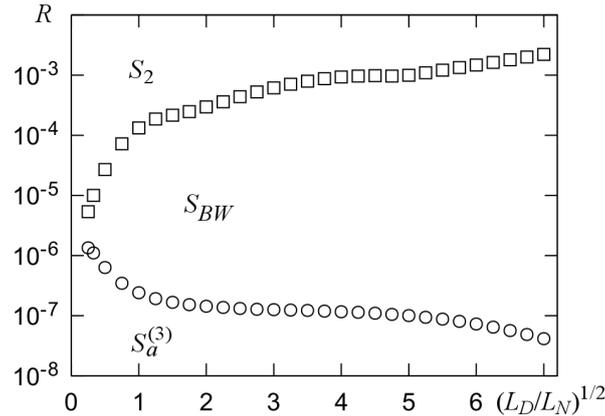


Рис. 2. Выбор оптимальной схемы в зависимости от порядка солитона и требуемой точности  $R$

Некоторые количественные изменения полученных зависимостей погрешности от числа шагов численного интегрирования наблюдаются при изменении мощности входных импульсов (порядка солитона). При этом качественные выводы остаются неизменными: в области относительно низкой точности выигрыш в скорости дает симметричная схема второго порядка  $\hat{S}_2$ , при увеличении требуемой точности расчетов целесообразно использовать схемы более высоких порядков.

Для исследования количественного влияния начальных условий на сделанные выше выводы была исследована зависимость положения точки пересечения степенных асимптотик погрешности  $R$  от порядка солитона (рис. 2). Точки пересечения асимптотик для схем второго ( $\hat{S}_2$ ) и четвертого ( $\hat{S}_{BW}$ ) порядков показаны на рис. 2 квадратными маркерами, четвертого и шестого ( $\hat{S}_a^{(3)}$ ) порядков — круглыми. Соответственно, на графике видны три области параметров, для каждой из которых указана наиболее эффективная схема расщепления из числа исследованных схем высокого порядка точности.

## Заключение

Выполнен сравнительный анализ эффективности численных схем второго, четвертого и шестого порядков точности с расщеплением шага по физическим процессам для интегрирования нелинейного уравнения Шрёдингера. С использованием распространения связанного состояния оптических солитонов в качестве тестовой задачи был исследован вопрос об оптимальном выборе численной схемы в зависимости от требуемой точности и мощности сигнала на входе в нелинейное оптическое волокно.

Показано, что схемы расщепления четвертого ( $\hat{S}_{BW}$ ) и шестого ( $\hat{S}_a^{(3)}$ ) порядков обеспечивают более высокую точность (имеют меньший численный коэффициент пропорциональности в зависимости погрешности от числа шагов,  $R \propto h^p$ ) по сравнению со схемами, построенными регулярным способом [34].

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (гос. задание 3.5572.2017/БЧ, соглашение 14.В25.31.0003).

## Список литературы / References

- [1] **Gabitov, I., Shapiro, E.G., Turitsyn, S.K.** Optical pulse dynamics in fiber links with dispersion compensation // *Optics Commun.* 1997. Vol. 134, No. 1-6. P. 317–329.
- [2] **Gabitov, I., Shapiro, E.G., Turitsyn, S.K.** Asymptotic breathing pulse in optical transmission systems with dispersion compensation // *Phys. Review E.* 1997. Vol. 55, No. 3. P. 3624.
- [3] **Le, S.T., Prilepsky, J.E., Turitsyn, S.K.** Nonlinear inverse synthesis for high spectral efficiency transmission in optical fibers // *Optics Express.* 2014. Vol. 22, No. 22. P. 26720–26741.
- [4] **Rubenchik, A.M., Chekhovskoy, I.S., Fedoruk, M.P., Shtyrina, O.V., Turitsyn, S.K.** Nonlinear pulse combining and pulse compression in multi-core fibers // *Optics Lett.* 2015. Vol. 40, No. 5. P. 721–724.
- [5] **Turitsyn, S.K., Bale, B.G., Fedoruk, M.P.** Dispersion-managed solitons in fibre systems and lasers // *Phys. Reports.* 2012. Vol. 521, No. 4. P. 135–203.
- [6] **Kobtsev, S.M., Kukarin, S.V., Smirnov, S.V., Turitsyn, S.K., Latkin, A.I.** Generation of double-scale femto/pico-second optical lumps in mode-locked fiber lasers // *Optics Express.* 2009. Vol. 17, No. 23. P. 20707–20713.
- [7] **Turitsyna, E.G., Smirnov, S.V., Sugavanam, S., Tarasov, N., Shu, X., Babin, S.A., Podivilov, E.V., Churkin, D.V., Falkovich, G., Turitsyn, S.K.** The laminar-turbulent transition in a fibre laser // *Nature Photonics.* 2013. Vol. 7, No. 10. P. 783–786.
- [8] **Turitsyn, S.K., Bednyakova, A.E., Fedoruk, M.P., Papernyi, S.B., Clements, W.R.** Inverse four-wave mixing and self-parametric amplification in optical fibre // *Nature Photonics.* 2015. Vol. 9, No. 9. P. 608–614.
- [9] **Babin, S.A., Podivilov, E.V., Kharenko, D.S., Bednyakova, A.E., Fedoruk, M.P., Kalashnikov, V.L., Apolonski, A.** Multicolour nonlinearly bound chirped dissipative solitons // *Nature Commun.* 2014. Vol. 5. P. 4653.
- [10] **Turitsyn, S.K., Shapiro, E.G., Medvedev, S.B., Fedoruk, M.P., Mezentsev, V.K.** Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons // *Comptes Rendus Physique.* 2003. Vol. 4, No. 1. P. 145–161.
- [11] **Turitsyn, S.K., Bednyakova, A.E., Fedoruk, M.P., Latkin, A.I., Fotiadi, A.A., Kurkov, A.S., Sholokhov, E.** Modeling of CW Yb-doped fiber lasers with highly nonlinear cavity dynamics // *Optics Express.* 2011. Vol. 19, No. 9. P. 8394–8405.
- [12] **Blow, K.J., Doran, N.J.** Average soliton dynamics and the operation of soliton systems with lumped amplifiers // *IEEE Phot. Tech. Lett.* 1991. Vol. 3, No. 4. P. 369–371.
- [13] **Blow, K.J., Doran, N.J., Wood, D.** Suppression of the soliton self-frequency shift by bandwidth-limited amplification // *JOSA B.* 1988. Vol. 5, No. 6. P. 1301–1304.
- [14] **Dudley, J.M., Genty, G., Coen, S.** Supercontinuum generation in photonic crystal fiber // *Reviews Modern Phys.* 2006. Vol. 78, No. 4. P. 1135–1184.
- [15] **Kobtsev, S.M., Smirnov, S.V.** Modelling of high-power supercontinuum generation in highly nonlinear, dispersion shifted fibers at CW pump // *Optics Express.* 2005. Vol. 13, No. 18. P. 6912–6918.
- [16] **Smirnov, S.V., Ania-Castañón, J.D., Kobtsev, S.M., Turitsyn, S.K.** Supercontinuum in telecom applications. The supercontinuum laser source. N.Y.: Springer, 2016. P. 371–403.

- [17] **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперим. и теор. физики. 1972. Т. 61, № 1. С. 118–134.  
**Zakharov, V.E., Shabat, A.B.** Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave P. in nonlinear media // J. of Exper. and Theor. Physics. 1972. Vol. 34, No. 1. P. 62–69.
- [18] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.** Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Review Lett. 1965. Vol. 15, No. 6. P. 240–243.
- [19] **Greig, I.S., Morris, J.L.** A hopscotch method for the Korteweg-de-Vries equation // J. Comput. Phys. 1976. Vol. 20, No. 1. P. 64–80.
- [20] **Taha, T.R., Ablowitz, M.I.** Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 55, No. 2. P. 203–230.
- [21] **Chang, Q., Jia, E., Sun, W.** Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation // J. Comput. Phys. 1999. Vol. 148, No. 2. P. 397–415.
- [22] **Ablowitz, M.J., Ladik, J.F.** A nonlinear difference scheme and inverse scattering // Studies in Appl. Math. 1976. Vol. 55, No. 3. P. 213–229.
- [23] **Ablowitz, M.J., Kaup, D.J., Newell, A.C., Segur, H.** The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems // Studies in Appl. Math. 1974. Vol. 53, No. 4. P. 249–315.
- [24] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная безытерационная схема с искусственной диссипацией для нелинейного уравнения Шрёдингера // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 3. С. 83–90.  
**Paasonen, V.I., Fedoruk, M.P.** A compact noniterative scheme with artificial dissipation for nonlinear Schrödinger equation // Comput. Technologies. 2012. Vol. 17, No. 3. P. 83–90. (In Russ.)
- [25] **Паасонен В.И., Федорук М.П.** Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 6. С. 68–73.  
**Paasonen, V.I., Fedoruk, M.P.** A compact dissipative scheme for nonlinear Schrödinger equation // Comput. Technologies. 2011. Vol. 16, No. 6. P. 68–73. (In Russ.)
- [26] **Fornberg, B., Whitham, G.B.** A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena // Phil. Trans. Roy. Soc. 1978. Vol. 289. P. 373–404.
- [27] **Hardin, R.H., Tappert, F.D.** Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // SIAM Rev. Chronicle. 1973. Vol. 15. P. 423.
- [28] **Fisher, R.A., Bischel, W.K.** Numerical studies of the interplay between self-phase modulation and dispersion for intense plane-wave laser pulses // J. Appl. Physics. 1975. Vol. 45, No. 11. P. 4921–4934.
- [29] **Hult, J.** A fourth-order Runge–Kutta in the interaction picture method for simulating supercontinuum generation in optical fibers // J. Lightwave Techn. 2007. Vol. 25, No. 12. P. 3770–3775.
- [30] **Fleck, Jr.J.A., Morris, J.R., Feit, M.D.** Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere // Appl. Physics. 1976. Vol. 10, No. 2. P. 129–160.
- [31] **Blow, K., Wood, D.** Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers // IEEE J. Quant. Electronics. 1989. Vol. 25, No. 12. P. 2665–2673.

- [32] Smirnov, S.V., Kobtsev, S.M., Kukarin, S.V. Linear compression of chirped pulses in optical fibre with large step-index mode area // Optics Express. 2015. Vol. 23, No. 4. P. 3914–3919.
- [33] Agrawal, G.P. Nonlinear fiber optics. San Diego: Acad. Press, 2004. 529 p.
- [34] Yoshida, H. Construction of higher order symplectic integrators // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 150, No. 5-7. P. 262–268.

*Поступила в редакцию 19 октября 2017 г.*

## High-order step-split Fourier schemes for nonlinear Schrödinger equation

SMIRNOV, SERGEY V.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

Corresponding author: Smirnov, Sergey V., e-mail: smirnov@lab.nsu.ru

**Purpose.** The paper compares efficiency of high (up to 6<sup>th</sup>) order step-split Fourier schemes for nonlinear Schrödinger equation (NLSE) extensively used in telecom and laser physics.

**Methodology.** Different step-split Fourier schemes of the second, fourth and sixth orders for nonlinear Schrödinger equation (NLSE) were implemented using custom C/C++ program code. Each scheme was used to integrate NLSE with solitons of different orders as initial conditions. It was carefully checked that all numerical solutions approximated the exact analytical ones. We used Runge method in order to find integration error what allowed us to eliminate contribution of temporal mesh step size. To estimate the integration error, the Runge method was used, which allowed eliminating the contribution of the  $t$ -grid pitch to the finiteness error. As a quantitative measure of the efficiency of splitting schemes, the numerical integration error calculated by the Runge method as a function of the number of discrete Fourier transforms is used in the paper.

**Findings.** Optimum numerical splitting schemes were found depending on the required accuracy of the numerical solution and the order of the soliton (nonlinearity of the problem). In particular, it was established that for soliton of the second order a widely distributed symmetric numerical scheme of the second order is optimal for an accuracy not exceeding  $10^{-4}$ . For calculations with higher accuracy, the Blow-Wood scheme of the fourth order is preferred. In calculations with the accuracy higher than  $10^{-7}$ , we demonstrated that the sixth-order splitting scheme is advisable.

**Originality/value.** Efficiency of step-split schemes of the sixth order was examined and for the first time compared with the schemes of the second and fourth order.

*Keywords:* nonlinear Schrödinger equation, step-split Fourier method.

**Acknowledgements.** This research was partly supported by Ministry of Education and Science of the RF (grants 3.5572.2017/BCH, 14.B25.31.0003).

*Received 19 October 2017*