

Компактная схема повышенного порядка точности для уравнений Манакова с учетом первой производной по времени

О. С. СИДЕЛЬНИКОВ^{1,2,*}, А. А. РЕДЮК^{1,2}

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Россия

*Контактный e-mail: o.s.sidelnikov@gmail.com

Предложена компактная конечно-разностная схема для численного решения системы уравнений Манакова с учетом первой производной по времени, обладающая абсолютной устойчивостью, вторым порядком точности по эволюционной переменной (координата) и четвертым порядком точности по временной переменной. Численные решения, полученные с помощью компактной схемы, сравнивались с точными решениями скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера и связанных уравнений Шрёдингера для двух поляризационных компонент.

Ключевые слова: конечно-разностная схема, уравнения Манакова, нелинейная волоконная оптика, многомодовое волокно.

Введение

Уравнения Манакова широко используются для численного моделирования нелинейного распространения оптического излучения по многомодовым и многосердцевидным волоконным световодам [1–6]. Одно из важнейших применений уравнений Манакова с учетом первой производной по временной переменной относится к математическому моделированию протяженных волоконно-оптических линий связи (ВОЛС) на основе многомодовых волокон, когда каждая из нескольких возбужденных пространственных мод внутри одного волокна распространяется со своей скоростью и переносит свой информационный сигнал [2–4].

В современных волоконно-оптических линиях связи, построенных на базе одномодовых волокон, задействованы все имеющиеся степени свободы — время, частота, фаза и поляризация сигнала, которые могут быть использованы для его модуляции и мультиплексирования. Текущий рекорд скорости для стандартного одномодового волокна превосходит 100 Тбит/с [7, 8], однако дальнейшее увеличение пропускной способности одномодового волокна затруднено ввиду различных технических ограничений [9, 10]. Развитие систем связи, основанных на многомодовых волокнах (Multi-Mode Fiber — MMF), рассматривается в настоящее время в качестве перспективного технологического пути для дальнейшего увеличения пропускной способности за счет одновременной передачи данных по разным модам волокна.

Наиболее используемым методом численного решения уравнений распространения в оптических волокнах, который также часто используется для численного решения уравнений Манакова, является метод расщепления по физическим процессам с использованием преобразования Фурье на линейном шаге (Split-Step Fourier Method — SSFM) [11]. Данная схема проста в реализации, безусловно устойчива, имеет высокую точность по временной переменной и для ряда задач превосходит по скорости счета многие другие методы. Однако алгоритмы быстрого преобразования Фурье, на которых основан метод расщепления, обладают низкой эффективностью распараллеливания.

Возможность распараллеливания является весьма важной особенностью, поскольку численные расчеты для большинства современных задач математического моделирования ВОЛС оказываются чрезвычайно ресурсоемкими, так как требуют использования порядка 10^6 – 10^7 узлов по временной переменной. Кроме того, при моделировании распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах в некоторых промежуточных режимах связи мод нелинейный оператор в уравнениях Манакова может быть недиагональным. При решении таких уравнений с помощью метода расщепления необходимо вычислять матричную экспоненту на каждом шаге по эволюционной переменной z , что является весьма трудозатратной операцией. При увеличении числа используемых мод M сложность метода расщепления в данном случае будет расти как $O(M^3)$.

Одним из возможных подходов для преодоления сложностей применения метода SSFM является использование конечно-разностных методов численного решения уравнений Манакова. Конечно-разностные схемы хотя и уступают методу расщепления по физическим процессам в точности расчета на фиксированной сетке по временной переменной [12], но некоторые из них легко допускают параллельную реализацию и их сложность при увеличении числа мод увеличивается как $O(M)$.

В работе [5] предложена компактная конечно-разностная схема повышенного порядка точности для решения уравнений Манакова с первой производной по времени. Для данной схемы были численно подтверждены второй порядок точности по эволюционной переменной z и четвертый порядок по временной переменной t , а также продемонстрировано, что ее использование позволяет сократить время расчетов по сравнению с методом расщепления при моделировании нелинейного распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах в промежуточных режимах связи мод. Однако предложенная схема являлась условно устойчивой, что ограничивало спектр актуальных задач, к которой она могла быть применена. В данной работе решена проблема устойчивости и получена компактная схема повышенного порядка точности, которая является абсолютно устойчивой.

1. Нелинейное распространение оптических сигналов в многомодовых волокнах

В общем случае распространение света в оптическом волокне описывается системой уравнений Максвелла [13]. Однако, если сделать некоторые упрощения и представить электрическое поле в многомодовом волокне в виде

$$\tilde{E}(x, y, z, \omega) = \frac{\sum_{m=1}^M e^{i\beta_m(\omega)z} \tilde{A}_m(z, \omega) F_m(x, y)}{\sqrt{N_m}},$$

то для задач телекоммуникаций система уравнений Максвелла может быть сведена к обобщенным уравнениям Манакова [2]. Здесь $\tilde{A}_m(z, \omega) = [\tilde{A}_{mx}(z, \omega), \tilde{A}_{my}(z, \omega)]^T$ является фурье-образом огибающей поля во временной области m -й моды, включающим в себя амплитуды обеих компонент поляризации пространственной моды m с пространственным распределением $F_m(x, y)$ и постоянной распространения $\beta_m(\omega)$, выраженной в виде диагональной матрицы для учета двойного лучепреломления, т. е. $\beta_m = \text{diag}[\beta_{mx}, \beta_{my}]$. Константа нормализации N_m может быть выражена как

$$N_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{n}_{eff} c I_m,$$

где

$$I_m = \frac{\bar{n}_m}{\bar{n}_{eff}} \iint F_m^2(x, y) dx dy,$$

ϵ_0 — электрическая постоянная, \bar{n}_{eff} — эффективный показатель преломления фундаментальной моды и \bar{n}_m — эффективный показатель преломления m -й моды.

Наибольший интерес представляет частный случай распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах — режим слабой связи мод. При этом связь между различными пространственными модами слаба по сравнению со связью между двумя поляризационными компонентами одной пространственной моды. Нелинейное распространение оптических сигналов в многомодовых волокнах в режиме слабой связи мод описывается следующими уравнениями Манакова [2]:

$$\frac{\partial A_p}{\partial z} + \beta_{1p} \frac{\partial A_p}{\partial t} + i \frac{\beta_{2p}}{2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial t^2} = i \gamma \left(f_{pppp} \frac{8}{9} |A_p|^2 + \sum_{m \neq p} f_{mmp} \frac{4}{3} |A_m|^2 \right) A_p, \quad p = 1, \dots, M. \quad (1)$$

Здесь $A_p(z, t)$ — медленно меняющаяся огибающая во временной области p -й моды; β_{1p} и β_{2p} — обратная групповая скорость и дисперсия групповой скорости p -й пространственной моды соответственно; $\gamma = \omega_0 n_2 / c A_{eff}$ — нелинейный параметр волокна, где n_2 — коэффициент Керра стекла и A_{eff} — эффективная площадь фундаментальной моды при центральной частоте ω_0 ; f_{lmnp} — коэффициенты нелинейной связи между пространственными модами, которые имеют следующий вид:

$$f_{lmnp} = \frac{A_{eff}}{(I_l I_m I_n I_p)^{1/2}} \iint F_l F_m F_n F_p dx dy.$$

Для численного решения подобной системы уравнений предлагается использовать математический аппарат конечно-разностных методов.

2. Разностная схема

Ранее была предложена компактная схема повышенного порядка точности для решения уравнений Манакова с первой производной [5]. Для данной схемы теоретически и численно подтвержден порядок точности $O(q^2 + \tau^4)$ и продемонстрировано, что ее использование позволяет сократить время расчетов по сравнению с методом расщепления при моделировании нелинейного распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах в промежуточных режимах связи мод. Однако предложенная схема являлась условно устойчивой, что ограничивало спектр задач, к которым она могла быть применена.

В данной работе мы предлагаем компактную схему повышенного порядка точности, которая является абсолютно устойчивой. Перепишем уравнение распространения (1) в следующем виде:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = ib_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{b_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \gamma f,$$

где f соответствует нелинейной части уравнения. Тогда для численного решения такого уравнения предлагается использовать следующую компактную схему:

$$i \frac{A^{n+1} - A^n}{q} = ib_1 \left(T (\alpha_1 A^{n+1} + (1 - \alpha_1) A^n) + \alpha_2 \Lambda A^n \right) + \frac{b_2}{2} \Lambda (\alpha_3 A^{n+1} + (1 - \alpha_3) A^n) - \gamma \left(\frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \alpha_2 T f^n + \alpha_4 \Lambda f^n \right), \quad (2)$$

где q и τ — шаги по z и t соответственно; T — оператор центральной разности по времени; Λ — разностный оператор, аппроксимирующий вторую производную по времени.

Если воспользоваться методом неопределенных коэффициентов и определить коэффициенты α_i следующим образом:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - i \frac{\tau^2}{6b_2q} + \frac{\tau^2}{2}, \quad \alpha_2 = i \frac{\tau^2 b_1}{6b_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\tau^2}{6b_2q} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{b_1^2 \tau^2}{6b_2^2}, \quad \alpha_4 = \frac{\tau^2}{12},$$

то полученная компактная схема будет иметь порядок аппроксимации $O(q^2 + \tau^4)$. С помощью спектрального метода Неймана можно показать, что данная схема является абсолютно устойчивой.

Так как данная схема имеет кубическую нелинейность на верхнем слое, необходимо использовать внутренние итерации по нелинейности. На каждом слое n по переменной z определяется последовательность приближений решений на $n + 1$ -м слое: $v^0, v^1, \dots, v^k, \dots$. В качестве начального приближения используется решение, полученное по явной схеме. Тогда итерационный процесс для схемы (2) имеет следующий вид:

$$\left(iE - iq b_1 \alpha_1 T - q \frac{b_2}{2} \alpha_3 \Lambda \right) \frac{v_p^{k+1} - A_p^n}{q} - \left(ib_1 T + \frac{b_2}{2} \Lambda + ib_1 \alpha_2 \Lambda \right) A_p^n + \gamma \left(\frac{\tilde{f}^k + f^n}{2} + \alpha_2 T f^n + \alpha_4 \Lambda f^n \right) = 0,$$

где \tilde{f}^k — нелинейная часть, вычисленная для итерационной переменной v^k .

Следует отметить, что в случае $b_1 = 0$ данная схема сводится к известной компактной разностной схеме повышенного порядка точности для нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) [14].

3. Некоторые результаты расчетов

Для предложенной схемы проводились тестовые расчеты. Численные решения, полученные с помощью компактной схемы, сравнивались с точными решениями скалярного НУШ и связанного НУШ для двух поляризационных компонент. Ошибка численного решения вычислялась следующим образом: $\delta = \max |A_j^n - A(z_n, t_j)|$. Для каждого расчета также находились коэффициенты убывания ошибки K при измельчении сетки.

3.1. Сравнение с точным решением при распространении одного солитона

Сначала оценим точность предложенной схемы на точном решении нелинейного уравнения Шрёдингера с первой производной по времени:

$$A(z, t) = \exp \frac{iz}{2} \operatorname{sech}(t + b_1 z)$$

при значениях параметров $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $\gamma = 1$. Задача решалась в области $(0 \leq z \leq 10) \times (-20 \leq t \leq 20)$. Результаты расчетов представлены в табл. 1, где в первых двух столбцах даны размеры сетки по переменным z и t . Также таблица содержит ошибки численного решения и коэффициенты убывания ошибки при измельчении сетки.

Внутренние итерации проводились до достижения различия между итерациями $\epsilon = 10^{-8}$. По данным, представленным в таблице, можно сделать вывод о совпадении порядков сходимости схемы при их теоретической и численной оценке.

3.2. Сравнение с точным решением при распространении двух солитонов

Точность предложенной схемы также проверялась на решении связанного нелинейного уравнения Шрёдингера (CNLSE), описывающего распространение сигналов в двух поляризационных компонентах одной моды [12]:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \delta \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + (|A_1|^2 + e|A_2|^2) A_1 &= 0, \\ i \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} - \delta \frac{\partial A_2}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + (|A_1|^2 + e|A_2|^2) A_2 &= 0, \end{aligned}$$

где δ соответствует групповой скорости, e — коэффициент связи поляризационных компонент, в нашем случае предполагается равным 1.

Точное решение связанного нелинейного уравнения Шрёдингера имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1(z, t) &= \sqrt{\alpha} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(t - vz)) \exp i \left((v - \delta)t - \left[\frac{v^2 - \delta^2}{2} - \alpha \right] z \right), \\ A_2(z, t) &= \pm \sqrt{\alpha} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(t - vz)) \exp i \left((v + \delta)t - \left[\frac{v^2 - \delta^2}{2} - \alpha \right] z \right), \end{aligned}$$

где α и v — произвольные постоянные. При расчетах использовались следующие параметры: $0 \leq z \leq 10$, $-20 \leq t \leq 20$, $\delta = 0.1$, $\beta_2 = -1$, $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $v = 1$.

Т а б л и ц а 1. Результаты расчетов для случая одного солитона

N_z	N_t	δ	K
80	80	1.223e-01	—
320	160	7.189e-03	17.01
1280	320	4.472e-04	16.08
5120	640	2.787e-05	16.05
20 480	1280	1.745e-06	15.97

Т а б л и ц а 2. Результаты расчетов для случая двух солитонов

N_z	N_t	δ	K
80	80	1.166e-00	—
320	160	5.839e-02	19.97
1280	320	3.525e-03	16.56
5120	640	2.205e-04	15.99
20 480	1280	1.377e-05	16.01

В табл. 2 представлены результаты расчетов для случая двух солитонов по аналогии с табл. 1. Для численного решения с помощью компактной схемы внутренние итерации проводились до достижения различия между итерациями $\epsilon = 10^{-8}$. В этом случае также можно отметить совпадение теоретических и практических порядков сходимости.

3.3. Сравнение времени расчетов при решении уравнений распространения в промежуточных режимах связи

Предложенная схема также тестировалась на решении уравнений распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах в промежуточных режимах связи мод. В этом случае использование конечно-разностных схем позволяет значительно сократить время вычислений по сравнению с методом расщепления по физическим процессам, который требует вычислений на каждом шаге матричной экспоненты с размерностью, равной удвоенному числу мод.

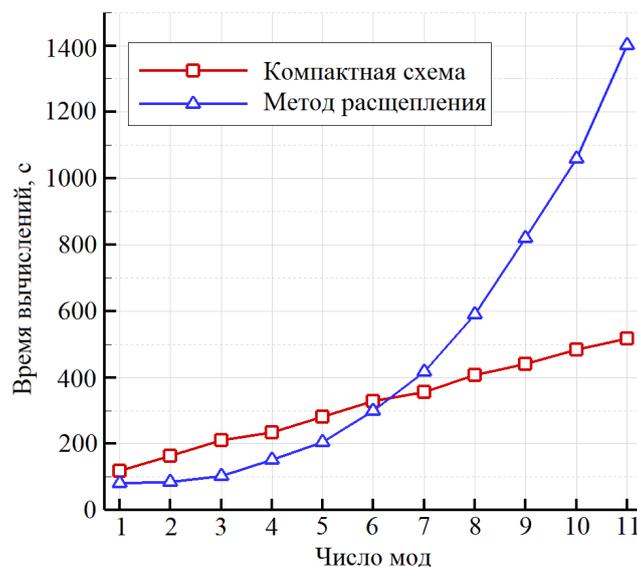
Нелинейное распространение сигналов в промежуточных режимах связи мод может быть описано с помощью следующего уравнения [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial z} = -\beta_{1p} \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial t} - i \frac{\beta_{2p}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_p}{\partial t^2} + i \sum_{lmn} f_{lmnp} \frac{\gamma}{3} [(\mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_m) \mathbf{A}_n^* + 2(\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_m) \mathbf{A}_n].$$

Здесь, в отличие от режима слабой связи мод (1), матрица, соответствующая нелинейному оператору, не будет диагональной, что усложняет применение метода расщепления.

Для проведения сравнения времени расчета предложенной компактной схемы и метода расщепления рассматривалась волоконно-оптическая линия связи, основанная на многомодовом волокне с градиентным профилем показателя преломления с “траншеей” в оболочке, подробно описанная в работе [4].

На рисунке представлена зависимость времени вычислений от числа используемых мод для компактной схемы и метода расщепления. Можно заметить, что уже при семи модах компактная схема опережает метод расщепления по времени вычисления и с ростом числа мод это превосходство растет.



Время вычислений в зависимости от числа мод

Заключение

В работе предложена компактная конечно-разностная схема для численного решения системы уравнений Манакова с учетом первой производной по времени, обладающая абсолютной устойчивостью, вторым порядком точности по эволюционной переменной и четвертым порядком точности по временной переменной. Для предложенной схемы проведены тестовые расчеты при решении скалярного НУШ и связанного НУШ для двух поляризационных компонент и подтвержден общий порядок точности. Продемонстрировано, что предложенная схема позволяет сократить время расчетов по сравнению с методом расщепления по физическим процессам при моделировании нелинейного распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах в промежуточных режимах связи мод.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-42-543379).

Список литературы / References

- [1] **Marcuse, D., Menyuk, C.R., Wai, P.K.A.** Application of the Manakov-PMD equation to studies of signal propagation in optical fibers with randomly varying birefringence // *J. of Lightwave Technology*. 1997. Vol. 15, No. 9. P. 1735–1746.
- [2] **Mumtaz, S., Essiambre, R., Agrawal, G.P.** Nonlinear propagation in multimode and multicore fibers: Generalization of the Manakov equations // *J. of Lightwave Technology*. 2013. Vol. 31, No. 3. P. 398–406.
- [3] **Mecozzi, A., Antonelli, C., Shtaiif, M.** Coupled Manakov equations in multimode fibers with strongly coupled groups of modes // *Optics Express*. 2012. Vol. 20, No. 21. P. 23436–23441.
- [4] **Сидельников О.С., Редюк А.А.** Нелинейные эффекты при передаче оптического сигнала в многомодовом волокне в режиме слабой связи мод // *Квантовая электроника*. 2017. Т. 47, № 4. С. 330–334.
Sidelnikov, O.S., Redyuk, A.A. Nonlinear effects in optical signal transmission using a multimode fibre with weak coupling // *Quantum Electronics*. 2017. Vol. 47, No. 4. P. 330–334.
- [5] **Федорук М.П., Сидельников О.С.** Алгоритмы численного моделирования оптических линий связи на основе многомодовых волокон // *Вычисл. технологии*. 2015. Т. 20, № 5. С. 105–119.
Fedoruk, M.P., Sidelnikov, O.S. Algorithms for numerical simulation of optical communication links based on multimode fiber // *Comput. Technologies*. 2015. Vol. 20, No. 5. P. 105–119. (In Russ.)
- [6] **Бурдин В.А., Бурдин А.В.** Результаты моделирования нелинейного маломодового распространения оптического импульса в волоконном световоде // *Прикладная фотоника*. 2016. Т. 3, № 3. С. 309–320.
Burdin, V.A., Burdin, A.V. Simulation results of optical pulse nonlinear few-mode propagation over optical fiber // *Appl. Photonics*. 2016. Vol. 3, No. 3. P. 309–320. (In Russ.)
- [7] **Qian, D., Huang, M.-F., Ip, E., Huang, Y., Shao, Y., Hu, J., Wang, T.** 101.7-Tb/s (370×294-Gb/s) PDM-128QAM-OFDM transmission over 3×55-km SSMF using pilot-based phase noise mitigation // *Optical Fiber Commun. Conf. and Exposition and the National Fiber Optic Eng. Conf. (OFC/NFOEC)*. Los Angeles, 2011. Paper PDPB5. Doi:10.1364/NFOEC.2011.PDPB5.

- [8] Sano, A., Kobayashi, T., Yamanaka, S., Matsuura, A., Kawakami, H., Miyamoto, Y., Ishihara, K., Masuda, H. 102.3-Tb/s (224×548-Gb/s) C- and extended L-band all-raman transmission over 240 km using PDM-64QAM single carrier FDM with digital pilot tone // Optical Fiber Commun. Conf. and Exposition and the National Fiber Optic Eng. Conf. (OFC/NFOEC). Los Angeles, 2012. Paper PDP5C.3. Doi:10.1364/OFC.2012.PDP5C.3.
- [9] Essiambre, R.J., Kramer, G., Winzer, P.J., Foschini, G.J., Goebel, B. Capacity limits of optical fiber networks // J. of Lightwave Technology. 2010. Vol. 28, No. 4. P. 662–701.
- [10] Richardson, D.J. Filling the light pipe // Science. 2010. Vol. 330, No. 6002. P. 327–328.
- [11] Hardm, R.H., Tappert, F.D. Applications of the split-step fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations // SIAM Rev. Chronicle. 1973. Vol. 15. P. 423.
- [12] Taha, T., Ablowitz, M. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation // J. of Comput. Physics. 1984. Vol. 55, No. 2. P. 203–230.
- [13] Agrawal, G.P. Nonlinear fiber optics. N.Y.: Acad. Press, 1995. 592 p.
- [14] Паасонен В.И., Федорук М.П. Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 6. С. 68–73.
Paasonen, V.I., Fedoruk, M.P. A compact dissipative scheme for nonlinear Schrödinger equation // Comput. Technologies. 2011. Vol. 16, No. 6. P. 68–73. (In Russ.)

Поступила в редакцию 1 ноября 2017 г.

Compact finite difference scheme of improved accuracy for Manakov equations

SIDELNIKOV, OLEG S.^{1,2,*}, REDYUK, ALEXEY A.^{1,2}

¹Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

²Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

*Corresponding author: Sidelnikov, Oleg S., e-mail: o.s.sidelnikov@gmail.com

Manakov equations are widely used to numerically simulate the nonlinear propagation of optical pulses through multimode and multicore optical fibers. One of the most important applications of the Manakov equations, taking into account the first derivative with respect to the time variable, refers to the mathematical modelling of extended fiber-optic communication lines based on multimode fibers, when each of several excited spatial modes within one fiber propagates with its own velocity and transfers its information signal. Previously, a compact finite-difference conditionally stable scheme of the increased order of accuracy was proposed for solving the Manakov equations with the first order time derivative.

In the paper we propose a new scheme with absolute stability. The scheme has the second order of accuracy in the evolution variable, and the fourth order of accuracy with respect to the time variable. We investigated numerical properties of the proposed scheme and confirm the general order of accuracy using exact solutions of the scalar nonlinear Schrodinger equation and the coupled Schrodinger equations for two polarization components. It was also demonstrated that the proposed scheme allows reduction

of the calculation time compared to the split-step Fourier method for modelling the nonlinear propagation of optical signals in multimode fibers within intermediate mode coupling regimes.

Keywords: finite-difference scheme, Manakov equations, nonlinear fiber optics, multimode fiber.

Acknowledgements. This research was supported by RFBR (grant No. 17-42-543379).

Received 1 November 2017