

Полулагранжевый метод решения двумерного уравнения неразрывности с законом сохранения

А. В. ВЯТКИН^{1,*}, Е. В. КУЧУНОВА², В. В. ШАЙДУРОВ¹

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

²Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

*Контактный e-mail: vyatkin@icm.krasn.ru

Рассмотрен полулагранжевый метод численного решения уравнения неразрывности. Он основан на тождестве, связывающем двумерные интегралы решения на соседних слоях по времени и интегралы потоков на входе и выходе из области. Описана технология аппроксимации и вычисления интегралов, позволяющая найти численное решение с первым порядком сходимости на гладких решениях. Обоснован дискретный закон сохранения для численного решения при переходе с одного слоя по времени на следующий слой без использования поправочных коэффициентов.

Ключевые слова: уравнение неразрывности, полулагранжевый метод, закон сохранения, балансовое соотношение.

Введение

Одними из первых методов численного решения уравнения неразрывности с теоретическим обоснованием аппроксимации и устойчивости были конечно-разностные схемы [1, 2]. В настоящее время они получили большое распространение и развитие, однако их применение накладывает определенные ограничения на шаг по времени для обеспечения устойчивости [3, 4].

С 1960-х годов параллельно развивается другой подход [5, 6], вытекающий из метода характеристик и позволяющий для ряда задач использовать большие шаги по времени и сократить время расчетов. Совокупность таких методов называется полулагранжевым подходом. Современные версии метода [7, 8] основаны на интегральном соотношении при переходе с одного временного слоя на следующий. Построение алгоритма поиска численного решения при этом разделяется на такие три этапа, как: аппроксимация интеграла на верхнем слое по времени, построение характеристических траекторий с верхнего временного слоя на нижний слой, приближенное вычисление интегралов решения на нижнем слое по времени и потока на входе. Для некоторых алгоритмов получено обоснование сходимости с учетом краевых условий [9, 10]. Консервативные версии метода, в которых численное решение удовлетворяет (дискретному) закону сохранения [11], как правило, теоретически обосновываются только для внутренних узлов сетки. При этом учет потока на границе вытекания обычно не проводится, поскольку не участвует в формировании приближенного решения.

В данной работе описана технология аппроксимации и вычисления интегралов, позволяющая найти численное решение с первым порядком сходимости на гладких решениях. Обоснован дискретный закон сохранения при переходе с текущего слоя по времени на следующий слой с учетом потоков на входе и выходе области.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольная область $(0, 1) \times (0, 1)$ с границей $\partial\Omega$, а $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. На замкнутом множестве $[0, T] \times \bar{\Omega}$ рассмотрим двумерное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $\rho(t, \mathbf{x})$ — искомая функция; $u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x})$ — достаточно гладкие известные функции; $\mathbf{x} = (x, y)$. Функции $u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x})$ являются компонентами вектора скорости $\mathbf{U} = (u, v)$. Граница $\partial\Omega$ состоит из объединения трех частей: $\partial\Omega = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \cup \Gamma_{\text{rigid}}$. Здесь Γ_{in} — граница втекания (для определенности являющаяся отрезком прямой $x = 0$), Γ_{out} — граница вытекания (для определенности являющаяся отрезком прямой $x = 1$) и Γ_{rigid} — граница с твердой стенкой. Полагаем, что на них выполнены соответственно условия

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{in}}} \leq 0, \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{\text{out}}} \geq 0, \quad \mathbf{U}|_{\Gamma_{\text{rigid}}} \equiv 0, \quad (2)$$

где символ (\cdot) означает скалярное произведение двух векторов; \mathbf{n} — двумерный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Будем считать, что искомая функция $\rho(t, \mathbf{x})$ известна в начальный момент времени на всем множестве $\bar{\Omega}$:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_{\text{init}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (3)$$

и в любой момент времени t на границе втекания

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{\text{in}}. \quad (4)$$

Здесь $\rho_{\text{init}}(\mathbf{x})$ и $\rho_{\text{in}}(t, \mathbf{x})$ — известные достаточно гладкие функции.

2. Базовые интегральные равенства

Построим в $\bar{\Omega}$ равномерную квадратную сетку

$$\bar{\Omega}_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh, \quad i, j = 0, \dots, N\}$$

с шагом $h = 1/N$ и целым $N \geq 2$. На отрезке $[0, T]$ используем равномерную сетку $T_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, k = 0, \dots, K\}$, где $\tau = T/K$ с целым $K \geq 1$. Каждому узлу $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$ сетки $\bar{\Omega}_h$ сопоставим окрестность

$$\omega_{i,j} = (x_i - h/2, x_i + h/2) \times (y_j - h/2, y_j + h/2) \cap \bar{\Omega}.$$

Решение задачи (1)–(4) будем искать в виде кусочно-постоянной функции $\rho^h(t, \mathbf{x})$, которая на каждом временном слое t_k постоянна в каждой окрестности $\omega_{i,j}^k = \{t_k\} \times \omega_{i,j}$. Введем обозначения $\rho_{i,j}^{h,k} = \rho^h(t_k, x_i, y_j)$ и $\rho_{i,j}^k = \rho(t_k, x_i, y_j)$. Будем считать, что при

$t = t_{k-1}$ численное решение ρ^h известно во всех узлах сетки $\bar{\Omega}_h$ и требуется вычислить значение функции ρ^h на k -м слое по времени. Для решения задачи (1)–(4) используем подход, описанный в [7, 10], который основан на интегральном равенстве

$$\int_{\omega_{i,j}^k} \rho(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + I(Q_{i,j}^{k-1}), \quad (5)$$

где

$$I(Q_{i,j}^{k-1}) = \begin{cases} \int_{Q_{i,j}^{k-1}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) ds, & \text{если } Q_{i,j}^{k-1} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

и $d\mathbf{x} = dx dy$, $ds = dy dt$. Здесь $Q_{i,j}^{k-1}$ — (чаще всего) некоторый криволинейный четырехугольник на нижнем слое по времени. Его стороны определяются характеристиками уравнения (1), исходящими из границы области $\omega_{i,j}^k$. Детальное описание построения множества $Q_{i,j}^{k-1}$ представлено в работах [7, 10]. Если область $\omega_{i,j}^k$ расположена достаточно близко к границе втекания Γ_{in} , то некоторые траектории могут достигать плоскости $P_{\text{in}} = [0, T] \times \Gamma_{\text{in}}$ при $t > t_{k-1}$ и образовывать на ней множество $Q_{i,j}^{k-1}$ (рис. 1). В этом случае возникает интеграл по области $Q_{i,j}^{k-1} \subset P_{\text{in}}$. В общем случае каждое из множеств $Q_{i,j}^{k-1}$ и $Q_{i,j}^{k-1}$ может быть тре-, четырех-, пятиугольным или пустым множеством.

Для проверки дискретного закона сохранения для численного решения $\rho^h(t, \mathbf{x})$ рассмотрим также выходящий поток на плоскости $P_{\text{out}} = [0, T] \times \Gamma_{\text{out}}$. Пусть ω_{out} — произвольный прямоугольный четырехугольник в P_{out} . Построим характеристики уравнения (1), исходящие из точек $A_{\text{out}} = (A_{\text{out}}^t, A_{\text{out}}^x, A_{\text{out}}^y)$, лежащих на границе четырехугольника ω_{out} , вплоть до нижнего временного слоя t_{k-1} . Характеристика (по существу, траектория движения частицы массы) определяется решением задачи Коши обратно во времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = u(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = v(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \quad t \in [A_{\text{out}}^t, t_k], \quad (6)$$

с начальными данными $\tilde{x}(A_{\text{out}}^t) = A_{\text{out}}^x$, $\tilde{y}(A_{\text{out}}^t) = A_{\text{out}}^y$. Множество траекторий, выпущенных из всех точек одной стороны границы четырехугольника ω_{out} , образует поверхность E_α , $\alpha = \overline{1, 4}$. Пересечение поверхностей E_α ($\alpha = \overline{1, 4}$) с плоскостью $t = t_{k-1}$

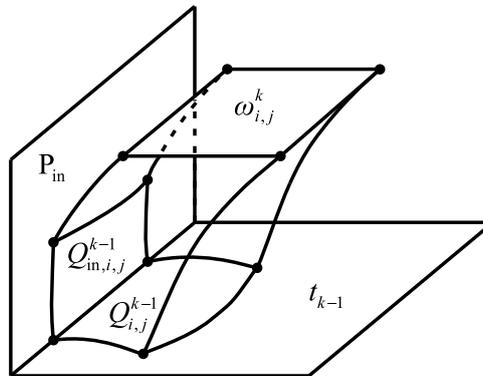


Рис. 1. Области интегрирования на соседних слоях по времени и на плоскости P_{in}

образует на ней четырехугольник Q_{out}^{k-1} с криволинейными сторонами. Для ω_{out} и Q_{out}^{k-1} справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для решения задачи (1)–(4) справедливо равенство

$$\int_{\omega_{\text{out}}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \rho ds = \int_{Q_{\text{out}}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим через V_{out} трубку тока, ограниченную поверхностями ω_{out} , Q_{out}^{k-1} и E_α , $\alpha = \overline{1, 4}$, границу множества V_{out} — через $\Gamma_V = Q_{\text{out}}^{k-1} \cup \omega_{\text{out}} \cup \bigcup_{\alpha=1}^4 E_\alpha$.

Проинтегрируем соотношение (1) по множеству V_{out} и получим

$$\int_{V_{\text{out}}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} \right) dV = 0,$$

где $dV = dt dx dy$. Применим к левой части этого тождества формулу Гаусса — Остроградского и получим равенство нулю интеграла по поверхности

$$\int_{\Gamma_V} \left((\rho, u\rho, v\rho) \cdot (n_\tau, n_x, n_y) \right) d\sigma = 0, \quad (8)$$

где (n_τ, n_x, n_y) — трехмерный вектор внешней нормали к поверхности Γ_V , а $d\sigma$ — элемент поверхности Γ_V . На поверхности Q_{out}^{k-1} выполняется равенство $(n_\tau, n_x, n_y) = (-1, 0, 0)$. А на поверхности ω_{out} первая компонента обращается в нуль: $n_\tau = 0$, так что $(n_x, n_y) = \mathbf{n}$. Таким образом, из (8) следует, что

$$- \int_{Q_{\text{out}}^{k-1}} \rho d\mathbf{x} + \int_{\omega_{\text{out}}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \rho ds + \sum_{\alpha=1}^4 \int_{E_\alpha} ((1, u, v) \cdot (n_\tau, n_x, n_y)) \rho d\sigma = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим произвольную точку $A = (A^t, A^x, A^y)$ на поверхности E_α . Она принадлежит некоторой траектории $\ell \in R^3$, построенной из решения системы уравнений (6), которую будем считать заданной параметрически:

$$t = t', \quad x = \tilde{x}(t'), \quad y = \tilde{y}(t').$$

С учетом уравнений (6) направляющий вектор касательной к траектории ℓ имеет вид $(1, u, v)$. Вектор внешней нормали (n_τ, n_x, n_y) в точке $A \in \Gamma_{\text{out}}$ ортогонален, в том числе этой касательной, а значит,

$$(1, u, v) \cdot (n_\tau, n_x, n_y) = 0.$$

Подставляя последнее равенство в (9), получим соотношение (7). Теорема доказана. ■

3. Аппроксимация интегралов на верхнем и нижнем слоях по времени

Для вычисления интеграла в левой части тождества (5) используем приближение

$$\iint_{\omega_{i,j}^k} \rho(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \rho_{i,j}^k \text{meas}(\omega_{i,j}), \quad (10)$$

где $\text{meas}(\omega_{i,j})$ — площадь множества $\omega_{i,j}$. Пусть $V_\alpha = (t_k, V_\alpha^x, V_\alpha^y)$, $\alpha = \overline{1,4}$, — вершины окрестности $\omega_{i,j}^k$. В этом случае каждая точка V_α определяет характеристическую траекторию либо до предыдущего слоя по времени, образуя в плоскости $t = t_{k-1}$ точку $(t_{k-1}, W_\alpha^x, W_\alpha^y)$, либо достигает плоскости P_{in} при $t > t_{k-1}$. Приближенные значения координат точки W_α найдем по формулам

$$W_\alpha^x = V_\alpha^x - \tau u(V_\alpha), \quad W_\alpha^y = V_\alpha^y - \tau v(V_\alpha). \quad (11)$$

Будем считать, что траектория, выпущенная из вершины V_α , достигает плоскости P_{in} при $t > t_{k-1}$, если точка $W_\alpha \notin \{t_{k-1}\} \times \overline{\Omega}$. В зависимости от числа вершин, достигших плоскости P_{in} , множество $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ может быть тре-, четырех-, пятиугольным или пустым множеством. Рассмотрим все эти варианты.

Случай, когда ни одна из траекторий не пересекла плоскость втекания. Рассмотрим случай, когда все $W_\alpha \in \{t_{k-1}\} \times \overline{\Omega}$, $\alpha = \overline{1,4}$. Мы аппроксимируем криволинейный четырехугольник $Q_{i,j}^{k-1}$ прямолинейным четырехугольником $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ с вершинами в точках W_α , $\alpha = \overline{1,4}$. Для вычисления интеграла по области $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ подынтегральную функцию $\rho(t_{k-1}, \mathbf{x})$ аппроксимируем численным решением $\rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x})$ и получим

$$\int_{Q_{i,j}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \int_{\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \int_{\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (12)$$

Далее, разобьем четырехугольник $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ со сторонами L_α , $\alpha = \overline{1,4}$, на замкнутые прямоугольники S_n , $n = \overline{1,5}$, со сторонами, параллельными координатным осям. Для этого обозначим через $C_\alpha = (t_{k-1}, C_\alpha^x, C_\alpha^y)$ центр стороны L_α , $\alpha = \overline{1,4}$. Четыре прямоугольника S_n , $n = \overline{1,4}$, соответствуют четырем вершинам W_α , $\alpha = \overline{1,4}$, четырехугольника $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$. Без ограничения общности опишем построение одного из них, например S_1 , которому соответствует вершина W_1 . Пересечение плоскостей $t = t_{k-1}$, $x = C_1^x$ и $y = C_4^y$ определяет точку P_1 , которая является правой верхней вершиной прямоугольника S_1 . С учетом параллельности сторон координатным осям эти вершины целиком определяют S_1 (рис. 2). Аналогичным образом получим другие прямоугольники S_n , $n = \overline{2,4}$. Четыре точки P_α , $\alpha = \overline{1,4}$, формируют прямоугольник S_5 , который следует добавить при аппроксимации $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$, если не произошло перекрытия пары S_1, S_3 или S_2, S_4 . Описанный способ построения прямоугольников S_n обеспечивает выполнение тождества $\text{meas}(\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}) = \text{meas}(S_{i,j})$, где

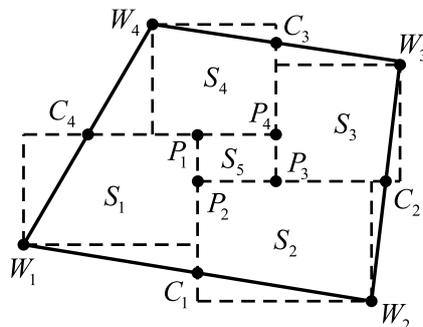


Рис. 2. Приближение выпуклого прямостороннего четырехугольника пятью прямоугольниками

$$S_{i,j} = \begin{cases} \left(\bigcup_{n=1}^4 S_n \right) \cup S_5, & \text{если } S_n \text{ не имеют общих точек, кроме общих границ,} \\ \bigcup_{n=1}^4 S_n & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_{\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{n=1}^4 \int_{S_n} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \zeta \int_{S_5} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (13)$$

где

$$\zeta = \begin{cases} 1, & \text{если } S_n \text{ не имеют общих точек, кроме общих границ,} \\ -1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интеграл по каждому прямоугольнику S_n , $n = \overline{1,5}$, со сторонами, параллельными осям координат, ищется в следующем виде:

$$\int_{S_n} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{p,q} \rho_{p,q}^{h,k-1} \text{meas}(S_n \cap \omega_{p,q}), \quad (14)$$

где суммирование ведется по всем узлам (x_p, y_q) сетки с непустым пересечением $S_n \cap \omega_{p,q}$. Соотношения (13), (14) позволяют вычислять интеграл по области $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ без применения квадратурных формул.

Три траектории достигли границы втекания. Рассмотрим случай, когда три вершины окрестности $\omega_{i,j}^{k-1}$ достигли плоскости втекания при $t > t_{k-1}$. Без ограничения общности рассмотрим случай, когда $W_\alpha \notin t_{k-1} \times \bar{\Omega}$, $\alpha = 1, 3, 4$, при этом $W_2 \in t_{k-1} \times \bar{\Omega}$ (рис. 3, а). Здесь $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ является треугольным множеством со стороной, параллельной одной из координатных осей. Треугольник $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ аппроксимируем множеством $S_{i,j}$, состоящим из двух прямоугольников. Расположение прямоугольников, аппроксимирующих треугольник $S_{i,j}$, должно быть согласовано с другими прямоугольниками, аппроксимирующими соседние множества $S_{p,q}$. На рис. 3, б изображен способ аппроксимации треугольника $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ с учетом соседних прямоугольников, построенных для аппроксимации множества $\tilde{Q}_{i,j+1}^{k-1}$.

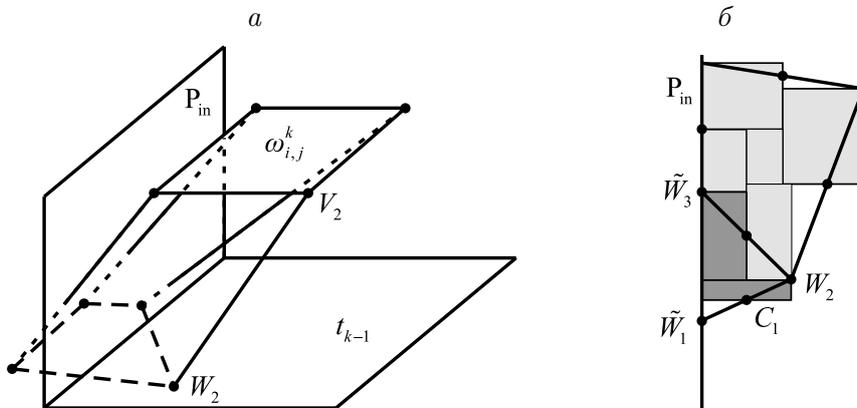


Рис. 3. Достижение тремя вершинами окрестности $\omega_{i,j}^{k-1}$ плоскости втекания (а); аппроксимация треугольника $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ и множества $\tilde{Q}_{i,j+1}^{k-1}$ (б)

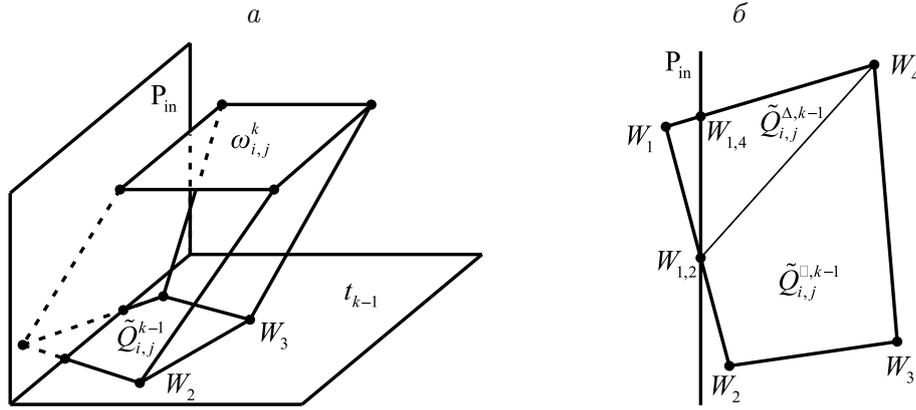


Рис. 4. Достижение плоскости втекания только одной вершиной окрестности $\omega_{i,j}^k$ (а); разложение пятиугольника $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ на треугольник и четырехугольник (б)

Две траектории достигли границы втекания. Пусть две траектории достигли плоскости втекания при $t > t_{k-1}$. В этом случае $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ является прямолинейным четырехугольником, а алгоритм его аппроксимации аналогичен алгоритму для случая, когда ни одна из траекторий не достигла плоскости втекания.

Одна траектория достигла границы втекания. Рассмотрим случай, когда только одна траектория достигла плоскости втекания при $t > t_{k-1}$. Без ограничения общности будем считать, что $W_1 \notin t_{k-1} \times \bar{\Omega}$, при этом $W_\alpha \in t_{k-1} \times \bar{\Omega}$, $\alpha = \overline{2,4}$ (рис. 4, а). Здесь множество $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ является пятиугольным. Для вычисления интеграла по $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ разложим $\tilde{Q}_{i,j}^{k-1}$ на треугольник $\tilde{Q}_{i,j}^{\Delta,k-1}$ с вершинами в точках $W_4, W_{1,4}, W_{1,2}$ и четырехугольник $\tilde{Q}_{i,j}^{\square,k-1}$, как это показано на рис. 4, б. У треугольника $\tilde{Q}_{i,j}^{\Delta,k-1}$ одна из сторон параллельна одной из координатных осей. Алгоритм вычисления интеграла по такому треугольнику описан ранее. Способ вычисления интеграла по четырехугольнику $\tilde{Q}_{i,j}^{\square,k-1}$ также описан ранее.

4. Аппроксимация интегралов на плоскости втекания

Если окрестность $\omega_{i,j}^k$ расположена достаточно близко к P_{in} , то некоторые траектории достигают ее и образуют на ней множество $Q_{\text{in},i,j}^{k-1}$. В этом случае необходимо вычислить интеграл $I(Q_{\text{in},i,j}^{k-1})$, входящий в правую часть тождества (5). Для этого в плоскости P_{in} построим сетку

$$\bar{\Omega}_{h,\text{in}} = \{(t_k, 0, y_q) : q = 0, \dots, N; k = 0, \dots, K\}.$$

Для каждого узла сетки $\bar{\Omega}_{h,\text{in}}$ построим окрестность

$$\omega_{\text{in},q}^k = (t_k - \tau/2, t_k + \tau/2) \times \{0\} \times (y_q - h/2, y_q + h/2).$$

На множестве P_{in} определим функции ρ_{in}^h и \mathbf{U}^h так, что

$$\rho_{\text{in}}^h(t, 0, y) = \rho_{\text{in}}(t_k, 0, y_q), \quad \mathbf{U}^h(t, 0, y) = \mathbf{U}(t_k, 0, y_q) \quad \forall (t, 0, y) \in \omega_{\text{in},q}^k \cap P_{\text{in}}.$$

В зависимости от числа вершин, достигших плоскости втекания P_{in} , множество $Q_{\text{in},i,j}^{k-1}$ может быть треугольным, четырехугольным, пятиугольным или пустым. Чтобы вычислить интеграл по области $Q_{\text{in},i,j}^{k-1}$, повторим алгоритм, описанный ранее для области $Q_{i,j}^{k-1}$, и получим приближение

$$\int_{Q_{\text{in},i,j}^{k-1}} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) ds \approx \int_{S_{\text{in},i,j}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h(t, \mathbf{x}) ds, \quad (15)$$

где $S_{\text{in},i,j}$ — множество, построенное аналогично множеству $S_{i,j}$. В силу технологии построения множества $S_{\text{in},i,j}$ справедливо тождество

$$\sum_{i,j} \int_{S_{\text{in},i,j}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h(t, \mathbf{x}) ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{\text{in}}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h(t, \mathbf{x}) ds, \quad (16)$$

где суммирование ведется по всем непустым многоугольникам $S_{\text{in},i,j}$ на P_{in} .

Здесь и далее исключается “экзотический” случай, когда траектория движения с началом на P_{in} в течение одного шага по времени заканчивается на P_{out} .

5. Численное решение и закон сохранения

В соответствии с (5), (10), (12), (13), (15) численное решение ρ^h в узле (t_k, x_i, y_j) зададим по формуле

$$\rho_{i,j}^{h,k} = \frac{1}{\text{meas}(\omega_{i,j})} \int_{S_{i,j}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{\text{meas}(\omega_{i,j})} \int_{S_{\text{in},i,j}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h ds, \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (17)$$

Умножим (17) на $\text{meas}(\omega_{i,j})$, просуммируем по всем узлам сетки $\bar{\Omega}_h$ и получим

$$\sum_{i,j} \rho_{i,j}^{h,k} \text{meas}(\omega_{i,j}) = \sum_{i,j} \int_{S_{i,j}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{i,j} \int_{S_{\text{in},i,j}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h ds. \quad (18)$$

Поскольку численное решение ρ^h постоянно в каждой окрестности $\omega_{i,j}^k$, то левую часть соотношения (18) можно переписать в виде

$$\sum_{i,j} \rho_{i,j}^{h,k} \text{meas}(\omega_{i,j}) = \int_{\Omega} \rho^h(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (19)$$

Тогда с учетом (16), (19) из (18) получим

$$\int_{\Omega} \rho^h(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i,j} \int_{S_{i,j}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{\text{in}}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h ds. \quad (20)$$

Для проверки повременного баланса втекающей и вытекающей жидкости определим ее расход за интервал времени (t_{k-1}, t_k) . Для этого рассмотрим объединение множеств

$$S^{(k-1)} = \bigcup_{1 \leq i, j \leq N} S_{i,j},$$

построенных на слое $t = t_k$ (см. разд. 3 и 4). Напомним, что часть из них вблизи границы входа может оказаться пустой, а их объединение не исчерпывает весь слой

$\{t_{k-1}\} \times \bar{\Omega}$. Разность $S_{\text{out}}^{(k-1)} = (\{t_{k-1}\} \times \bar{\Omega}) \setminus S^{(k-1)}$ является аппроксимацией множества координат частиц, которые по своим траекториям уходят за интервал времени (t_{k-1}, t_k) через границу вытекания. Поэтому величину

$$\int_{S_{\text{out}}^{(k-1)}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{S^{(k-1)}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (21)$$

целесообразно положить равной расходу жидкости за время (t_{k-1}, t_k) .

В принципе, с помощью приведенной в разд. 2 теоремы можно определить поэлементный поток жидкости через плоскость вытекания, но не будем останавливаться на этом вопросе.

Добавим к левой и правой частям равенства (20) величину (21). В итоге имеем равенство

$$\int_{\Omega} \rho^h(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{\text{in}}} (\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{n}) \rho_{\text{in}}^h ds - \int_{S_{\text{out}}^{(k-1)}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

описывающее баланс массы на двух соседних слоях по времени, включая поток на входе области и расход на выходе.

6. Вычислительный эксперимент

В качестве теста рассмотрим задачу с разрывным решением: параллельный перенос круга в области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ при $t \in [0, 1]$. Начальные данные и значения на границе втекания задавались в виде

$$\rho_{\text{init}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x - 0.2)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.1^2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\rho_{\text{in}}(t, x, y) |_{\Gamma_{\text{in}}} = 0.$$

Функции скорости выберем постоянными: $u(t, x, y) = 0.6$, $v(t, x, y) = 0$. В этом случае точное решение задачи (1)–(4) имеет следующий вид:

$$\rho(t, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x - x_c)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.1^2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $x_c(t) = 0.2 + ut$. К моменту времени $t = 1$ центр круга перемещается из точки $(0.2, 0.5)$ в точку $(0.8, 0.5)$. Сходимость численного решения к точному решению исследовалась в дискретном аналоге нормы пространства $L_1(\Omega)$

$$\|\rho^{h,k}\|_{L_1^h} = \sum_{i,j=0}^N \rho_{i,j}^{h,k} \text{meas}(\omega_{i,j}). \quad (22)$$

При проведении указанного эксперимента зафиксировано отношение τ к h в виде $\tau = h/2$. Для исследования сходимости метода проведены расчеты на последовательности

Значения нормы численного решения на разных сетках

n	N	h	τ	$\ \rho^h(0, x, y)\ _{L_1^h}$	$\ \rho^h(T, x, y)\ _{L_1^h}$
0	50	0.02	0.01	0.0276	0.0276
1	100	0.01	0.005	0.0305000	0.0305000
2	200	0.005	0.0025	0.0307250	0.0307250
3	400	0.0025	0.00125	0.03114825	0.03114825
4	800	0.00125	0.000625	0.031298625	0.031298625
5	1600	0.000625	0.0003125	0.031362252548	0.031362252548

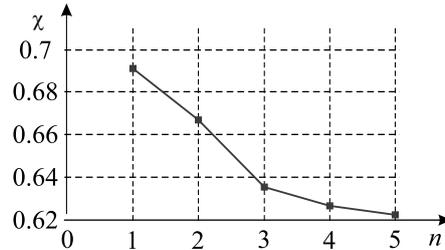


Рис. 5. Порядок сходимости схемы на разрывном решении

сеток Ω_h со значениями $N = 50 \cdot 2^n$, $n = 0, \dots, 5$. Обозначим через ρ_n^h решение, полученное при $N = 50 \cdot 2^n$. На рис. 5 по оси абсцисс отображено число n , а по оси ординат отмечена величина

$$\chi = \log_2 \left(\frac{\|\rho - \rho_{n-1}^h\|_{L_1^h}}{\|\rho - \rho_n^h\|_{L_1^h}} \right),$$

характеризующая порядок сходимости численного решения к точному решению. Чтобы проверить выполнение закона сохранения в описанном тесте, рассмотрим два интеграла

$$\int_{\Omega} \rho^h(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} \rho^h(T, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Поскольку функция ρ^h равна константе в каждой окрестности $\omega_{i,j}^k$, в силу (22) имеем

$$\int_{\Omega} \rho^h(t_k, \mathbf{x}) d\Omega = \sum_{i,j=0}^N \rho_{i,j}^{h,k} \text{meas}(\omega_{i,j}) = \|\rho^{h,k}\|_{L_1^h}.$$

Таким образом, для оценки выполнения закона сохранения достаточно рассмотреть две величины: $\|\rho^h(0, x, y)\|_{L_1^h}$ и $\|\rho^h(T, x, y)\|_{L_1^h}$. В таблице приведены значения этих величин в зависимости от числа узлов сетки. Как видно, для каждого числа N эти величины равны между собой, что подтверждает выполнение закона сохранения.

Заключение

Для полулагранжевого метода решения двумерного уравнения неразрывности описана технология аппроксимации и вычисления интегралов. Представлено теоретическое обоснование выполнения дискретного закона сохранения для численного решения при переходе с одного временного слоя на следующий слой. При описании технологии аппроксимации интегралов рассмотрены случаи интегрирования по плоскостям втекания

и вытекания. В отличие от большинства консервативных полулагранжевых методов [11] данная технология позволяет обеспечить выполнение закона сохранения без использования поправочных коэффициентов. Вычислительные эксперименты полностью подтверждают теоретические выкладки.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта № 16-41-243029.

Список литературы / References

- [1] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977. 440 с.
Godunov, S.K., Ryaben'kiy, V.S. Difference schemes (introduction to theory). Moscow: Nauka, 1977. 440 p. (In Russ.)
- [2] Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения уравнений в частных производных. М.: Наука, 1963. 444 с.
Forsythe, G.E., Wasow, W.R. Finite-difference methods for partial differential equations. New York; London: John Wiley and Sons, 1960. 444 p.
- [3] Рябенский В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 172 с.
Ryaben'kiy, V.S., Filippov, A.F. On the stability of difference schemes. Moscow: Gostekhizdat, 1956. 172 p. (In Russ.)
- [4] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2003. 630 с.
Bakhvalov, N.S., Zhidkov, N.P., Kobel'kov, G.M. Numerical methods. Moscow: Fizmatlit, 2003. 630 p. (In Russ.)
- [5] Магомедов К.М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1966. Т. 6, № 2. С. 313–325.
Magomedov, K.M. The method of characteristics for numerical modelling of spatial gas flow // USSR Comput. Mathematics and Math. Physics. 1966. Vol. 6, No. 2. P. 313–325. (In Russ.)
- [6] Wiin-Nielson, A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting // Tellus. 1959. Vol. 11. P. 180–186.
- [7] Вяткин А.В., Кучунова Е.В. Параллельная реализация полулагранжевого метода для уравнения неразрывности // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. № 2(14). С. 423–429.
Vyatkin, A.V., Kuchunova, E.V. A parallel semi-Lagrangian algorithm for advection equation // Educat. Res. and Technologies. 2016. № 2(14). P. 423–429. (In Russ.)
- [8] Phillips, T.N., Williams, A.J. Conservative semi-Lagrangian finite volume schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2001. Vol. 17, No. 4. P. 403–425.
- [9] Arbogast, T., Wen-Hao Wang. Convergence of a fully conservative volume corrected characteristic method for transport problems // SIAM. J. Numer. Anal. 2010. Vol. 48, No. 3. P. 797–823.
- [10] Вяткин А.В., Ефремов А.А., Каропова Е.Д., Шайдуров В.В. Использование гибридных вычислительных систем для решения уравнения переноса модифицированным методом траекторий // Тр. V Междунар. конф. “Системный анализ и информационные технологии САИТ-2013”. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2013. С. 45–55.

- Vyatkin, A.V., Efremov, A.A., Karepova, E.D., Shaydurov, V.V. Usage of hybrid computational systems for numerical solution of advection problem by modified method of trajectories // Theses of V Intern. Conf. on Sys. Analysis and Inform. Technologies “SAIT-2013”. Krasnoyarsk: ICM SB RAS, 2013. P. 45–55. (In Russ.)
- [11] Iske, A., Käser, M. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes // Numer. Meth. for Partial Diff. Equations. 2004. Vol. 20, No. 3. P. 388–411.

Поступила в редакцию 16 февраля 2017 г.

Semi-Lagrangian method for two dimensional advection problem with discrete balance equation

VYATKIN, ALEXANDER V.^{1,*}, KUCHUNOVA, ELENA V.², SHAYDUROV, VLADIMIR V.¹

¹Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russia

²Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russia

*Corresponding author: Vyatkin, Alexander V., e-mail: vyatkin@icm.krasn.ru

In this paper, the semi-Lagrangian method (the generalized method of characteristics) is considered for the numerical solution of the two-dimensional (in space) continuity equation for the gas or fluid motion with given velocities. The geometric pattern of the method is represented by a fluid flow tube with an arbitrary two-dimensional rectangular cell at the upper time level constructed by passing flow lines (characteristics of the equation) backward in time to the intersection with the previous time level or the inflow surface. For the obtained three-dimensional (in the time-space coordinates) body, the Gauss — Ostrogradsky theorem is applied. Due to the absence of the gas flow across the side surfaces defined by trajectories, the relation between two-dimensional integrals of a solution at neighbouring time levels (in some cases on the inflow surface) is obtained.

The paper primarily deals with the detailed approximation of these integrals resulting in explicit grid equations where the values of an approximate solution at the upper time level are expressed in terms of the values at the lower level and on the inflow surface. A fluid flow tube for gas issuing through a rectangular cell on the outflow surface is considered in a similar way. After the corresponding approximation, the quantity of issuing gas is expressed in terms of its integrals at the previous time level. The proposed methods of the approximation of integrals provide the fulfillment of the mass conservation law at the discrete level for the motion of gas between two time levels taking into account gas inflow and outflow. Numerical results confirming the fulfillment of the discrete conservation law are presented. Due to the dynamical adaptation of the grid pattern, the Courant — Friedrichs — Lewy condition for the time step size is removed.

Keywords: semi-Lagrangian method, balance equation, advection problem.

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR, Government of Krasnoyarsk Territory, Krasnoyarsk Region Science and Technology Support Fund to the research project No. 16-41-243029.

Received 16 February 2017