Вычислительные технологии **Том 4, № 5, 1999**

О ДОСТИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ*

Ю. И. Шокин, З. И. Федотова
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: zf@net.ict.nsc.ru

A brief survey of studies devoted to the theory of difference schemes and carried out in the Siberian Branch of the Russian Academy of sciences is given.

Введение

Развитие теории разностных схем в Сибирском отделении АН СССР связано с именами академиков Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко, под руководством и при непосредственном участии которых создавались новые вычислительные методы и специализированное программное обеспечение для решения широкого круга важнейших прикладных задач науки и техники. Основные результаты обобщены в монографиях [1–43], приведенных в хронологическом порядке в конце статьи.

Исследования по различным направлениям вычислительной математики в Сибирском отделении начались вскоре после создания научного центра, с приездом в Новосибирск Г. И. Марчука (1962 г.) и Н. Н. Яненко (1963 г.), к тому времени уже имевших значительный опыт работы и оригинальные результаты в области разностных схем. В 1964 г. Г. И. Марчук был назначен директором отпочковавшегося от Института математики СО АН СССР Вычислительного центра и занялся, в частности, организацией исследований в области математического моделирования процессов гидротермодинамики атмосферы и океана, а Н. Н. Яненко приступил к созданию в ВЦ отдела, которому предстояло разрабатывать численные методы решения задач механики сплошной среды. Согласно такому разделению по интересам, Г. И. Марчук возглавил кафедру математических методов в динамической метеорологии механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (с 1972 г. — кафедра вычислительной математики), а Н. Н. Яненко организовал в НГУ кафедру численных методов механики сплошной среды (с 1997 г. — кафедра математического моделирования) и оставался ее бессменным руководителем до последних дней жизни.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №97–01–00819.

Решение задач из перечисленных областей требовало внедрения передовой вычислительной техники, развития программного обеспечения и, безусловно, численных методов и алгоритмов. Таким образом, в Вычислительном центре СО АН СССР начали бурно развиваться экономичные сеточные методы решения разнообразных задач математической физики.

В 1976 г. Н. Н. Яненко возглавил Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР, расширив тем самым круг интересующих его проблем в области математического моделирования и вычислительного эксперимента (часть лабораторий руководимого им отдела в ВЦ также перешла в ИТПМ). Этот переход послужил мощным стимулом к развитию вычислительной аэро- и гидродинамики. Об успехах в теории разностных схем, полученных Н. Н. Яненко и его учениками после 1976 г., говорит целый ряд выпущенных в свет монографий. Н. Н. Яненко ушел из жизни в 1984 г. в самом расцвете творческих сил, и это оказалось невосполнимой утратой для Сибирской школы по теории разностных схем.

Из творческих коллективов, возглавляемых академиками Г. И. Марчуком и Н. Н. Яненко, выросла целая плеяда математиков-вычислителей, среди которых академики, члены-корреспонденты, доктора и кандидаты наук, а также немало прекрасных ученых без степеней и титулов, отдавших поискам в вычислительной математике много лет жизни. Созданию научных школ Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко в значительной степени способствовала их педагогическая деятельность. Начиная с первого года работы в Сибирском отделении Г. И. Марчук и Н. Н. Яненко преподавали в НГУ, читая лекции по новейшим достижениям в области вычислительной математики, в которые включались и их собственные результаты. Как следствие, на кафедру приходили способные студенты, многие из которых после защиты дипломов продолжили работу в области вычислительной математики. Ниже при описании достижений в области теории разностных схем многие имена будут названы.

Нельзя не отметить большой вклад в теорию разностных схем С. К. Годунова, однако все его основные исследования в этой области были выполнены в Институте прикладной математики в Москве, и, по его словам, после переезда в Новосибирск в 1969 г., он разностными схемами уже практически не занимался. Однако чтение лекций в НГУ, участие в обсуждении молодежных работ, доклады на конференциях, несомненно, повысили уровень многих работ в теории разностных схем, выполненных в Сибирском отделении.

Ниже дан краткий обзор исследований сотрудников Сибирского отделения АН СССР (СО РАН с 1992 г.) по теории разностных схем, который в значительной степени отражает научные интересы авторов. В связи с ограниченностью объема статьи ссылки сделаны только на обобщающие определенные циклы исследований монографии, где, как правило, приведена обширная библиография.

1. Метод дробных шагов

Начнем изложение результатов, полученных в Сибирском отделении АН СССР, с метода расщепления, так как к решению этой проблемы в той или иной степени причастно большинство исследователей в области сеточных методов. В конце 50-х гг. возникла острая необходимость в создании экономичных конечно-разностных методов для решения сложных многомерных задач с уравнениями в частных производных. Решение проблемы было найдено в различных способах редукции сложной задачи к набору более простых, а на первом этапе исследования — заменой многомерной дифференциальной задачи последовательностью одномерных задач. В решении этой проблемы, то есть в развитии и обосновании методов расщепления, участвовали многие ныне хорошо известные математики-вычислители Сибирского отделения: Н. Н. Яненко, Г. И. Марчук, С. К. Годунов, В. П. Ильин, А. Н. Коновалов, Б. Г. Кузнецов, Ю. Е. Бояринцев, Г. В. Демидов, В. М. Ковеня, В. В. Пененко и их многочисленные ученики. Опубликованы по крайней мере четыре солидные монографии, где название проблемы вынесено в заголовок (Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*, 1967; Ковеня В. М., Яненко Н. Н. *Методы расщепления в задачах газовой динамики*, 1981; Марчук Г. И. *Методы расщепления*, 1988; Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. *Применение метода расщепления в задачах аэродинамики*, 1990).

Первая схема расщепления описана в работе К. А. Багриновского и С. К. Годунова (1957 г.). Эта разностная схема аппроксимирует явным образом гиперболическую систему уравнений. Неявная схема расщепления по независимым пространственным переменным для уравнения теплопроводности была опубликована два года спустя Н. Н. Яненко. Это была первая экономичная абсолютно устойчивая разностная схема, аппроксимирующая на целом шаге многомерное уравнение, для применения которой требовались скалярные трехточечные прогонки.

Развитие методов расщепления позволило значительно обогатить теорию разностных схем. Н. Н. Яненко ввел обобщающие понятия суммарной аппроксимации и слабой аппроксимации многомерного уравнения системой одномерных, послужившие теоретическим обоснованием метода расщепления. Это позволило производить расщепление не только по независимым переменным, но и по различным физическим процессам, по отдельным членам дифференциальных и разностных уравнений с целью упростить решение исходных задач. Введение физического, аналитического и геометрического расщепления привело к построению экономичных разностных схем, реализуемых на каждом дробном шаге скалярными прогонками. Впоследствии методы расщепления для различных уравнений математической физики разрабатывались и применялись многими вычислителями.

К 1967 г. сибирскими учеными были построены схемы расщепления для всех основных типов уравнений, и известная монография Н. Н. Яненко [3] по методу дробных шагов, вышедшая через десять лет после первой публикации на эту тему, содержит оригинальные результаты автора, а также результаты Г. И. Марчука, А. Н. Коновалова, Б. Г. Кузнецова, В. П. Ильина, Ю. Е. Бояринцева, Г. В. Демидова и др. В книге описаны методы расщепления для гиперболических, параболических, эллиптических, интегродифференциальных и некоторых других уравнений, а также приложения к задачам упругости (А. Н. Коновалов), метеорологии (Г. И. Марчук), гидродинамики (Н. Н. Яненко, Б. Г. Кузнецов, И. К. Яушев). Среди достижений в рамках метода дробных шагов, полученных к этому времени, особо можно отметить открытие Н. Н. Яненко и Б. Г. Кузнецовым [3] метода искусственной сжимаемости, который состоит во введении в уравнения Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости производной по времени t с малым параметром ϵ: $\epsilon \partial p/\partial t$, p — давление. Эта процедура (в общей формулировке — метод стационирования) позволяет перейти к уравнениям типа Коши — Ковалевской с малым параметром. Впоследствии в работах Н. Н. Яненко, Ю. Я. Белова и зарубежных ученых были доказаны соответствующие теоремы сходимости решения аппроксимирующей системы к решению исходной. Для решения аппроксимирующей системы уравнений Н. Н. Яненко предложил неявные схемы расщепления, оказавшиеся эффективным методом решения задач гидродинамики. Методы типа предиктор — корректор, получившие широчайшее распространение в различных вариантах, можно также рассматривать как разновидность метода расщепления [3, 13, 36, 6].

Большое внимание в монографии [3] уделено общим формулировкам метода расщепления, принадлежащим автору книги и Г. И. Марчуку. Сформулирован метод слабой аппроксимации.

В последующие годы метод расщепления плодотворно развивался. Так, существенный вклад в развитие и обоснование схем расщепления в теории переноса был сделан учениками Г. И. Марчука У. М. Султангазиным и В. В. Пененко.

Исключительно плодотворное применение метод расщепления нашел в аэрогидродинамике. Монография [26] посвящена построению и исследованию эффективных неявных разностных схем для уравнений Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Она написана по оригинальным работам авторов и их учеников. Работы в указанном направлении продолжаются при расширении круга решаемых задач. Для решения сложнейших задач гидрогазодинамики В. М. Ковеней и его непосредственными учениками, среди которых С. Г. Черный, Г. А. Тарнавский, А. С. Лебедев, В. Б. Карамышев и др., применяются, совершенствуются, разрабатываются самые современные методики и технологии из области конечно-разностных схем.

Динамическая метеорология также является областью успешного применения методов математического моделирования на основе сеточных методов. Мощным средством решения широкого круга задач метеорологии оказались неявные разностные схемы расщепления, описанные и обоснованные в книгах [2, 11, 16]. В разработку разностных схем для задач метеорологии существенный вклад внесли Г. И. Марчук, В. В. Пененко, В. П. Дымников и многие другие сотрудники Вычислительного центра СО АН СССР. Для задач циркуляции атмосферы построен метод расщепления симметризованной формы уравнений гидротермодинамики в сферической системе координат [32]. В работе [29] предложен основанный на расщеплении метод построения энергетически сбалансированных дискретных моделей динамики атмосферы. Новые дискретные модели по проблемам окружающей среды приведены в [32, 33]. Сибирскими учеными был сделан также крупный вклад в решение задач океанологии. Здесь следует в первую очередь отметить исследования Г. И. Марчука, В. П. Кочергина, В. П. Дымникова, В. Б. Залесного и др. [8, 11, 16, 25]. На основе методов расщепления построена модель крупномасштабного взаимодействия глобальной атмосферы и Мирового океана [32].

Рассказать о всех результатах по методам расщепления в задачах математической физики из-за ограниченного объема обзорной статьи нет возможности. Укажем лишь, что в процитированных выше монографиях приводится полная библиография работ сибирских ученых на эту тему.

2. Метод слабой аппроксимации

К важнейшим достижениям теории разностных схем следует отнести теоретическое обоснование метода расщепления, который удалось представить как слабую аппроксимацию исходного дифференциального уравнения некоторым другим, более простым. Остановимся на этом вопросе подробнее и сформулируем суть *метода слабой аппроксимации* (МСА).

Рассмотрим в банаховом пространстве задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{L}(\sqcup)\sqcap = \{(\sqcup), \quad \sqcap\Big|_{\sqcup=\prime} = \sqcap_\prime, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}(\sqcup) = \sum_{\rangle=\infty}^{\Updownarrow} \mathcal{L}_{\rangle}(\sqcup),$$

где $\mathcal{L}(\sqcup)$ и $\mathcal{L}_{\rangle}(\sqcup)$ — операторы, действующие из банахова пространства $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$. Предполагается, что операторы $\mathcal{L}_{\rangle}(\sqcup)(\rangle = \infty, \ldots, \Updownarrow)$ имеют более простую структуру по сравнению с оператором $\mathcal{L}(\sqcup)$. Наряду с задачей (1) рассмотрим задачу

$$\frac{du_\tau}{dt} + \mathcal{L}_\tau(\sqcup)\sqcap_\tau = \{(\sqcup), \quad \sqcap_\tau\Big|_{\sqcup=/} = \sqcap_/. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_\tau(\sqcup) = \sum_{\rangle=\infty}^{\Updownarrow} \alpha_{\rangle,\tau}(\sqcup)\mathcal{L}_{\rangle}(\sqcup),$$

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & \text{если } \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \le \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, [T/\tau]$. Коэффициенты $\alpha_{i,\tau}(t)$ слабо аппроксимируют единицу в том смысле, что

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \alpha_{i,\tau}(\theta)d\theta = 1.$$

Говорят, что оператор $\mathcal{L}_\tau(\sqcup)$ слабо аппроксимирует оператор $\mathcal{L}(\sqcup)$.

Согласно [3] замену задачи (1) задачей (2) и исследование вопроса о сходимости решения u_τ задачи (2) к решению u задачи (1) будем называть методом слабой аппроксимации.

Задачу (2) естественно называть расщеплением задачи (1). При этом в правой части уравнения (2) вместо функции f можно брать функцию f_τ, слабо аппроксимирующую f (см. [3]).

Впервые МСА был применен Н. Н. Яненко для исследования линейной системы уравнений в частных производных. При условии корректности исходной и каждой из расщепленных задач доказана сходимость решения u_τ расщепленной задачи к исходной в некоторой норме со скоростью $\mathcal{O}(\tau), \tau \longrightarrow /$. Н. Н. Яненко и Г. В. Демидовым исследовалась задача Коши для линейных абстрактных дифференциальных операторных уравнений в банаховом пространстве. Доказаны теоремы сходимости МСА на основе корректности расщепленных задач и их дифференциальных продолжений. Основным предположением указанных работ по сходимости МСА является требование устойчивости оператора решения $S(t, t+\tau)$ однородной задачи. Это требование при некоторых дополнительных предположениях можно ослабить. Например, С. А. Кантор сделал это за счет запаса гладкости начальных данных. Некоторые результаты о сходимости МСА получены Г. В. Демидовым и С. А. Кантором. В наиболее полном виде МСА для линейных уравнений дан Г. В. Демидовым и В. А. Новиковым. З. Г. Гегечкори исследовал расщепление эллиптических операторов, содержащих смешанные производные, на одномерные (по различным направлениям) и сходимость таких методов для параболических задач.

Первые результаты о сходимости метода слабой аппроксимации для нелинейных уравнений принадлежат Г. И. Марчуку и Г. В. Демидову, доказавшим сходимость метода расщепления для одной из задач краткосрочного прогноза погоды. Ю. Я. Беловым и Г. В. Демидовым исследована сходимость МСА различных вариантов расщеплений квазилинейной системы уравнений типа Бюргерса. Здесь расщепленные задачи могут быть некорректными на некоторых дробных шагах и в то же время сходимость МСА имеет место.

В. А. Новиков исследовал модельную задачу газовой динамики. В случае задачи Коши доказана сходимость МСА при достаточно малых t (“в малом”). Им же исследована сходимость МСА для существенно нелинейной задачи, регуляризующей задачу для одной системы переменного типа. Г. В. Демидовым, В. Ф. Рапутой МСА изучался для абстрактных нелинейных операторных уравнений, частными случаями которых являются системы типа Коши — Ковалевской. Ю. Я. Белов на основе МСА исследовал вопросы разрешимости и устойчивости стационарных решений распадающихся квазилинейных параболических систем уравнений и систем уравнений первого порядка вида $u_t + \mathcal{L}\sqcap = \{(\sqcup, \S, \sqcap)$, где $\mathcal{L}$ — эллиптический оператор. Им же для произвольных расщеплений получена скорость сходимости МСА на основании оценок решений расщепленных задач. Ю. Е. Бояринцевым доказаны достаточно общие теоремы сходимости МСА для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследована возможность применения метода к задачам оптимального управления.

3. Проблемы аппроксимации и устойчивости, схемы высокого порядка аппроксимации

Такие понятия теории разностных схем, как аппроксимация, устойчивость и сходимость, являются фундаментальными. В середине 50-х гг. почти одновременно и с разных позиций рядом ученых был сформулирован основной результат, получивший название теоремы эквивалентности, суть которой состоит в том, что устойчивость разностной схемы, аппроксимирующей корректную линейную однородную дифференциальную задачу, является необходимым и достаточным условием для сходимости решения этой разностной схемы к решению исходной задачи. К важным результатам в теории устойчивости, полученным в Сибирском отделении, следует отнести обоснование Ю. Е. Бояринцевым метода “замороженных коэффициентов” для ряда разностных схем (локальный критерий Бояринцева). Энергетический метод исследования устойчивости развивался в работах А. Н. Коновалова [4, 37]. Интересный и весьма плодотворный подход к исследованию устойчивости был предложен Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокиным на основе метода дифференциальных приближений (см. следующий раздел). Б. Г. Кузнецовым и Ш. Смагуловым плодотворно развивался метод априорных оценок для доказательства устойчивости нелинейных разностных схем. В частности, Б. Г. Кузнецовым, Ш. Смагуловым и Б. Р. Рысбаевым исследована устойчивость и сходимость ряда разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу вязкой одномерной газовой динамики в лагранжевых координатах.

Г. И. Марчук и В. В. Шайдуров [19, 22] выполнили большой цикл исследований по проблеме повышения точности разностных схем путем использования последовательностей сеток. Лежащий в основе этих работ метод экстраполяции по Ричардсону был распространен на различные классы задач (системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эллиптические уравнения, нестационарные задачи). Ими был также предложен эффективный способ учета особенностей решения в зависимости от малого параметра (метод экстраполяции по малому параметру).

Значительное внимание уделялось построению схем повышенного порядка аппроксимации. Так, Г. В. Демидовым построены устойчивые разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для некоторых равномерно корректных задач Коши в банаховом пространстве. Метод дробных шагов для повышения точности разностных схем применялся А. Н. Валиуллиным [12] для гармонических и бигармонических уравнений, для уравнения

Пуассона в полярной системе координат и некоторых других уравнений, А. Н. Коноваловым — для задач фильтрации двухфазной жидкости [9, 37] и теории упругости [4].

Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокиным, Л. А. Тушевой, В. И. Паасоненом, В. И. Пинчуковым построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для гиперболических систем уравнений, доказана их устойчивость, исследованы различные условия диссипативности [23, 36].

Для построения разностных схем повышенного порядка аппроксимации применяются различные способы. Например, можно использовать следствия из дифференциальных уравнений [23, 36]. Схема четвертого порядка Л. А. Тушевой построена с использованием закона сохранения и формулы Симпсона.

В ряде случаев удается получить приближенное решение с заданной точностью путем построения более точных аппроксимаций на основе информации о гладкости решения. Такая точка зрения привела к удобным и достаточно универсальным методам построения разностных уравнений на основе вариационных методов Ритца, Галеркина, метода наименьших квадратов [24, 27].

В. В. Остапенко провел ряд исследований по выявлению соотношений между формальным порядком аппроксимации и эффективным порядком точности, получив ряд нетрадиционных результатов для разрывных решений систем квазилинейных уравнений. В своих работах он использовал метод, основанный на экспериментальной проверке сходимости первых интегралов от разностного решения по областям, содержащим особенности точного решения аппроксимируемых уравнений [42].

Для возможности эффективного выполнения сложных расчетов нелинейных задач математической физики требуется, чтобы устойчивая разностная схема обладала дополнительным набором свойств, среди которых чаще других встречаются монотонность, консервативность, полная консервативность, сохранение тех или иных инвариантов. Построение схем с требуемыми свойствами можно осуществлять разными способами. Наиболее часто применяются методы асимптотических разложений (среди которых наиболее обоснован метод дифференциальных приближений Яненко — Шокина), методы элементарных решений и разновидности интегроинтерполяционного метода с привлечением законов сохранений и разнообразных балансных соотношений, в том числе метод интегральных тождеств Марчука [14, 18].

Как правило, требования к вычислительным алгоритмам возникают на этапе анализа исходной дифференциальной задачи. Так, при исследовании динамики задач океана выяснилось, что наиболее важным свойством численных алгоритмов должно быть свойство сохранения основного энергетического баланса, присущего дифференциальной физической модели. Это свойство реализуется за счет сохранения положительной определенности и кососимметричности при переходе к конечномерным операторам. Такие конечно-разностные схемы описаны, например, в [32]. Требование сохранения энергетического баланса исключает из рассмотрения монотонные разностные схемы, в которых свойство монотонности достигается за счет введения схемной вязкости, приводящей к появлению в модели трудноконтролируемых источников диссипации. В. П. Кочергиным, А. В. Щербаковым [20] предложен способ исключения ошибок схемной вязкости при использовании решений, полученных на последовательности сеток. Впоследствии этими авторами для исключения схемной вязкости был предложен метод последовательных приближений при использовании одной сетки. Эти идеи удалось применить к эллиптическому уравнению с малым параметром при старших производных, что привело к построению схемы повышенного порядка точности.

Построению и обоснованию разностных схем для эллиптических уравнений, изучению алгебраических особенностей сеточных систем уравнений и построению эффективных методов их решения, распараллеливанию алгоритмов в задачах электрофизики и других посвящено много работ В. П. Ильина и его учеников [7, 15, 35, 41].

Интересный цикл исследований конечно-разностных алгоритмов выполнен для нелинейных параболических уравнений с изменяющимся направлением параболичности, впервые введенных Н. Н. Яненко в 1973 г. в связи моделированием течений вязкой жидкости. Вопросы корректной постановки начально-краевых задач для уравнений со знакопеременной вязкостью рассмотрены в [30], а свойства разностных схем для таких уравнений изучены Н. Н. Масловой и В. П. Воронко.

4. Метод дифференциального приближения

Основные достижения Сибирского отделения в теории разностных схем для задач газовой динамики несомненно связаны со школой академика Н. Н. Яненко [6, 21, 23, 26, 34, 36]. В монографиях [23, 26, 34, 36] изложены новые направления в теории разностных схем: метод дифференциального приближения (МДП) [23, 36], метод расщепления в задачах газовой динамики [26] и метод локализации особенностей в численных решениях [34].

В настоящее время МДП стал широко используемым рабочим аппаратом теории разностных схем и его эффективность подтверждена практикой. МДП позволяет строить новые разностные схемы с заранее указанными свойствами, проводить анализ свойств разностных схем и сравнивать их между собой по ряду признаков. Такие возможности метода позволили принять его за основу при разработке концепции автоматизированной системы построения и исследования разностных схем.

Строгое понятие дифференциального приближения для произвольной разностной схемы, аппроксимирующей гиперболическую систему уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, было сформулировано в 1968 г. в работах Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина. Начиная с этого времени МДП активно развивался как в работах российских, так и зарубежных ученых, причем лидирующее положение занимали сотрудники Сибирского отделения АН СССР.

Основная идея метода дифференциального приближения заключается в замене исследования разностной схемы изучением некоторых специально построенных уравнений, занимающих промежуточное положение между исходной схемой и аппроксимируемой дифференциальной задачей.

Впервые систематическое изложение основ МДП дано в монографии [23]. Список работ, выполненных сотрудниками СО АН СССР на эту тему, содержит более сотни наименований. Полная библиография работ до 1985 г. приведена в [36]. Впоследствии развитием МДП продолжали заниматься Ю. И. Шокин, З. И. Федотова, А. И. Урусов, Л. А. Компаниец и др.

Проиллюстрируем здесь один из способов получения дифференциального приближения для двухслойной разностной схемы

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} = \Lambda u^n(x), \tag{3}$$

аппроксимирующей в классе достаточно гладких функций дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(D)u. \tag{4}$$

Здесь $u^n(x) = \bar{u}(n\tau, x)$ — разностный аналог решения дифференциального уравнения (4), t — время, τ — шаг по времени, Λ — ограниченный разностный оператор, являющийся аналитической функцией параметра τ и оператора сдвига в сеточном пространстве с шагом h, $h = h(\tau)$. Для разностного уравнения (3) рассмотрим начальное условие

$$u^0(x) = u_0(x).$$

Решение разностной задачи можно записать в виде

$$u^n(x) = \bar{u}(t, x) = (E + \tau\Lambda)^{t/\tau} u^0(x), \quad t = n\tau, \tag{5}$$

где E — тождественный оператор. Представление $\bar{u}(t, x)$ в виде (5) можно аналитически продолжить для всех $t, \tau > 0$. Дифференцирование полученного продолжения по t приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \bar{u}(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \ln[E + \tau\Lambda]\bar{u}(t, x). \tag{6}$$

Формальная запись уравнения (6) в виде ряда по степеням τ при $\|\tau\Lambda\| < 1$

$$\frac{\partial \bar{u}(t, x)}{\partial t} = \left[\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\tau^j}{j+1} \Lambda^{j+1}\right] \bar{u}(t, x) \tag{7}$$

является одним из способов записи исходной разностной схемы. Это уравнение названо П-формой дифференциального представления разностной схемы (3). Его можно преобразовать, если использовать следующее из требования аппроксимации соотношение

$$\Lambda(h) = L(D) + \sum_{j=1}^{\infty} h^j L_j(D),$$

где $L_j(D)$ — дифференциальные операторы, получающиеся при формальном разложении разностного оператора Λ в ряд по степеням h. Подставляя это разложение в правую часть (7), получим П-форму дифференциального представления разностной схемы в виде дифференциального уравнения бесконечного порядка. Удерживая в правой части этого уравнения то или иное число старших членов относительно τ, приходим к дифференциальным приближениям конечного порядка, то есть к уравнениям, занимающим промежуточное положение между исходной разностной схемой и аппроксимируемой дифференциальной задачей.

МДП состоит в установлении связи между свойствами разностной схемы и ее дифференциальных приближений. Оказалось, что изучая ряд свойств этих уравнений с частными производными, можно сделать определенные заключения о свойствах разностных схем, таких как устойчивость, аппроксимация, точность, групповые свойства и др. Кратко перечислим основные применения МДП:

— анализ устойчивости, диссипации и дисперсии разностных схем (Н. Н. Яненко, Л. А. Тушева, Ю. И. Шокин);

— анализ эффектов нелинейных преобразований (Ю. И. Шокин, А. А. Талышев);

— анализ и построение инвариантных разностных схем (Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин, З. И. Федотова, А. И. Урусов);

— построение разностных схем в произвольных системах координат (Ю. И. Шокин, А. И. Урусов);

— анализ консервативности и полной консервативности разностных схем (Ю. И. Шокин, З. И. Федотова, Ан. Г. Марчук, Ф. В. Иванов, В. В. Остапенко).

Выполненная Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокиным, З. И. Федотовой, Л. А. Компаниец классификация разностных схем газовой динамики на основе МДП оказалась весьма плодотворной и явилась основой для концепции автоматизированной системы анализа разностных схем. Разработка и реализация автоматизированной системы построения и исследования разностных схем осуществлена Ю. И. Шокиным, З. И. Федотовой и Ш. Х. Насировым.

В монографии Н. Н. Яненко и Е. В. Ворожцова [34] изложены способы локализации ударных волн и контактных разрывов в газодинамических расчетах, введено понятие центра сглаженной ударной волны, построена теория дифференциальных анализаторов ударных волн. Основным аппаратом исследований является МДП. Развивая теорию дифференциальных анализаторов, удалось существенно продвинуться в решении задач интерпретации получаемых численных результатов и повышения точности численного решения в окрестности сильных разрывов.

5. Методы решения ОДУ

По инициативе Н. Н. Яненко в 70-х гг. были начаты исследования по построению эффективных численных алгоритмов решения задачи Коши для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. В основу алгоритмов положены одношаговые m-стадийные методы типа Рунге—Кутты и Розенброка. А. А. Артемьевым и Г. В. Демидовым даны явные формулы для определения параметров методов типа Розенброка, и для них Л. А. Юматовой и Г. В. Демидовым исследована устойчивость и точность аппроксимации экспоненты. Эффективность алгоритмов интегрирования существенно зависит от способа оценки ошибки, на которой осуществляется контроль точности вычислений и управление величиной шага интегрирования. Г. В. Демидовым и Е. А. Новиковым предложен способ оценки ошибки, позволяющий в ряде случаев организовать контроль точности вычислений фактически без увеличения вычислительных затрат. Алгоритмы интегрирования с таким способом оценки ошибки исследованы в работах Е. А. Новикова, Г. В. Демидова, В. А. Новикова, Л. А. Юматовой.

В. А. Новиковым и Е. А. Новиковым предложен способ контроля устойчивости явных методов, основанный на оценке максимального собственного числа матрицы Якоби. На основе явных формул Рунге—Кутты построены алгоритмы переменного порядка и шага. В. К. Дураковой, В. А. Новиковым и Е. А. Новиковым построен алгоритм, основанный на формулах только первого порядка, но с различными областями устойчивости. Г. В. Демидовым и Е. А. Новиковым на основе явной формулы типа Рунге—Кутты и формул типа Розенброка второго порядка точности построен алгоритм интегрирования, в котором выбор численной схемы автоматически осуществляется из требований устойчивости. На основе метода типа Розенброка второго порядка точности построен алгоритм с “замороженной” матрицей Якоби.

Эти исследования, а также их продолжение и результаты последних лет изложены в монографии [43].

6. Криволинейные и подвижные сетки

Задачи механики сплошной среды являются существенно нелинейными, и для них характерны большие деформации среды, переходные зоны и другие неоднородности. Поэтому для решения таких задач целесообразно строить разностную сетку в соответствии с характером течения и деформации среды (адаптирующуюся сетку). Возникает задача построения криволинейных подвижных сеток, для решения которой разработано множество подходов. В монографии С. К. Годунова и др. [17] приведено несколько способов построения нерегулярных подвижных сеток при решении газодинамических задач. Н. Н. Яненко предложил и обосновал вариационный принцип управления сеткой. Им было сформулировано понятие информационной среды как совокупности дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс, и уравнений для управления сеткой, автоматически адаптирующейся к потоку. При решении практических задач такой подход позволил существенно повысить точность расчетов. Конкретные реализации этого подхода изучались в работах В. Д. Лисейкина, Н. Т. Данаева, Ю. И. Шокина, А. И. Урусова, В. П. Шапеева, Ю. А. Шитова, Ю. П. Мещерякова и других учеников Н. Н. Яненко. В последние годы в области построения сеток активно работают В. Д. Лисейкин (общая теория и алгоритмы), Г. С. Хакимзянов (алгоритмы, применения в волновой гидродинамике) и другие вычислители.

7. Методы решения алгебраических систем

Применение любых сеточных методов приводит к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f$$

с известными вещественными элементами вектора $f = \{f_i\}$ и квадратной невырожденной матрицей $A = \{a_{i,j}(i, j = 1, \ldots, N)\}$. В Сибирском отделении вычислительные методы линейной алгебры развивали Г. И. Марчук, Ю. А. Кузнецов [10], С. К. Годунов [40], В. П. Ильин [41] и их ученики.

Успех применения того или иного сеточного метода зачастую определяется тем, насколько эффективно удается решить полученную систему алгебраических уравнений. Большой вклад в развитие методов неполной факторизации, главными достоинствами которых являются рекордная практическая экономичность и высокие теоретические оценки скорости сходимости итераций, внесен В. П. Ильиным и его учениками [41].

В трудах Г. И. Марчука, Ю. А. Кузнецова, А. М. Мацокина развита теория итерационных методов в подпространствах, на которую опирается большая группа разработанных в последнее время методов решения сеточных уравнений; в их основе лежит разбиение исходной области на простейшие подобласти.

8. Заключение

Какова дальнейшая судьба указанных выше научных школ Сибирского отделения РАН? В 1980 г. с группой сотрудников уехал в Москву Г. И. Марчук, где он организовал Отдел вычислительной математики, сейчас — Институт вычислительной математики РАН. В 1984 г. безвременно оборвалась жизнь Н. Н. Яненко, но “кольцо” конференций и семинаров, созданных им, продолжает работать.

С горечью приходится констатировать, что в последнее десятилетие интерес к теоретическим исследованиям в области численных методов значительно ослаб. Основная причина этого явления — в общем кризисе науки, лишившейся полнокровной государственной поддержки.

Несмотря на обилие нерешенных вопросов в теории разностных схем, ими сейчас занимаются крайне редко. Работы по теоретическому изучению схем продолжаются в основном только в Институте вычислительных технологий СО РАН.

Три десятилетия до 1990 г. можно с уверенностью назвать порой расцвета исследований в области конечно-разностных методов в Сибирском отделении АН СССР.

В настоящее время конечно-разностные схемы, как один из методов математического моделирования, стали неотъемлемой частью вычислительных технологий и применяются наряду с методом конечных элементов и спектральными методами для решения тех или иных задач естествознания.

Громадные изменения в стране сильно повлияли как на самих ученых, так и на отношение общества к науке. Тем не менее сложившиеся мощные сибирские научные школы продолжают работать, привлекая в свои ряды новые поколения ученых.

Список литературы

[1] Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Лекции для студентов НГУ. Новосиб. гос. ун-т, 1966.

[2] Марчук Г. И. *Численные методы в прогнозе погоды.* Гидрометеоиздат, Л., 1967.

[3] Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Наука, Новосибирск, 1967.

[4] Коновалов А. Н. *Численное решение задач теории упругости.* Новосиб. гос. ун-т, 1968.

[5] Яненко Н. Н. *Введение в разностные методы математической физики.* Ч. 1, 2. Новосиб. гос. ун-т, 1968.

[6] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* Наука, М., 1968.

[7] Ильин В. П. *Разностные методы решения эллиптических уравнений.* Новосиб. гос. ун-т, 1970.

[8] Кочергин В. П. *Введение в теорию и методы расчета океанических течений.* Новосиб. гос. ун-т, 1971.

[9] Коновалов А. Н. *Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.* Новосиб. гос. ун-т, 1972.

[10] Кузнецов Ю. А., Марчук Г. И. *Итерационные методы и квадратичные функционалы.* Наука, Новосибирск, 1972.

[11] Марчук Г. И. *Численное решение задач динамики атмосферы и океана на основе метода расщепления.* Наука, Новосибирск, 1972.

[12] Валиуллин А. Н. *Схемы повышенной точности для задач математической физики.* Новосиб. гос. ун-т, 1973.

[13] Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы.* Наука, М., 1973.

[14] Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.* Наука, Новосибирск, 1973.

[15] Ильин В. П. *Численные методы решения задач электрооптики.* Наука, Новосибирск, 1974.

[16] Марчук Г. И. *Численное решение задач динамики атмосферы и океана.* Гидрометеоиздат, Л., 1974.

[17] Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. *Численное решение многомерных задач газовой динамики.* Наука, М., 1976.

[18] Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.* Наука, М., 1977.

[19] Шайдуров В. В. *Методы повышения точности приближенных задач.* Новосиб. гос. ун-т, 1977.

[20] Кочергин В. П. *Теория и методы расчета океанических течений.* Наука, М., 1978.

[21] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Второе дополненное издание.* Наука, М., 1968.

[22] Марчук Г. И., Шайдуров В. В. *Повышение точности решений разностных схем.* Наука, Новосибирск, 1979.

[23] Шокин Ю. И. *Метод дифференциального приближения.* Наука, Новосибирск, 1979.

[24] Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.* Наука, М., 1980.

[25] Марчук Г. И. и др. *Математические модели циркуляции в океане.* Наука, Новосибирск, 1980.

[26] Ковеня В. М., Яненко Н. Н. *Методы расщепления в задачах газовой динамики.* Наука, Новосибирск, 1981.

[27] Марчук Г. И., Агошков В. И. *Введение в проекционно-сеточные методы.* Наука, М., 1981.

[28] Марчук Г. И., Лебедев В. И. *Численные методы в теории переноса нейтронов.* Атомиздат, М., 1981.

[29] Пененко В. В. *Методы численного моделирования атмосферных процессов.* Гидрометеоиздат, Л., 1981.

[30] Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. *Нелинейные уравнения переменного типа.* Наука, Новосибирск, 1983.

[31] Марчук Ан. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. *Численное моделирование волн цунами.* Наука, Новосибирск, 1983.

[32] Марчук Г. И., Дымников В. П., Лыкосов В. Н. и др. *Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана.* Гидрометеоиздат, Л., 1984.

[33] Пененко В. В., Алоян А. Е. *Модели и методы для задач охраны окружающей среды.* Наука, Новосибирск, 1984.

[34] Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. *Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики.* Наука, Новосибирск, 1985.

[35] Ильин В. П. *Численные методы решения задач электрофизики.* Наука, М., 1985.

[36] Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. *Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике.* Наука, Новосибирск, 1985.

[37] Коновалов А. Н. *Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.* Наука, Новосибирск, 1988.

[38] Марчук Г. И. *Методы расщепления.* Наука, М., 1988.

[39] Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. *Применение метода расщепления в задачах аэродинамики.* Наука, Новосибирск, 1990.

[40] Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилюк О. П. и др. *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах.* Наука, Новосибирск, 1992.

[41] Ильин В. П. *Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем.* Наука, М., 1995.

[42] Годунов С. К. *Воспоминания о разностных схемах: Доклад на Международном симпозиуме “Метод Годунова в газовой динамике”, Мичиганский университет (США), Май, 1997.* Научная книга, Новосибирск, 1997.

[43] Новиков Е. А. *Явные методы для жестких систем.* Наука, Сиб. предприятие РАН, Новосибирск, 1997.

Поступила в редакцию 5 марта 1999 г.