

## Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса

Е. А. ВОРОНЦОВА

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

Контактный e-mail: vorontsovaea@gmail.com

Рассматривается интервальная модель межотраслевого экономического баланса. Для системы балансовых уравнений В.В. Леонтьева ставится интервальная линейная задача о допусках. Обосновывается решение этой задачи методом распознающего функционала множества решений С.П. Шарого. Ключевым этапом метода является решение задачи максимизации недифференцируемого вогнутого функционала, для решения которой предлагается метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями.

Приводятся результаты практического решения задачи оценки перспектив развития региональной экономики на примере Приморского края. Результаты вычислительных экспериментов показали эффективность метода с отсечениями и подтвердили преимущества метода распознающего функционала по сравнению с другими методами.

*Ключевые слова:* интервальная система уравнений, линейная задача о допусках, модель “затраты – выпуск”, распознающий функционал, методы отделяющих плоскостей, недифференцируемая оптимизация, региональная экономика.

### Введение

В математической экономике часто возникают задачи с неточными исходными данными. Принятие решений в практической деятельности экономических агентов осложняется необходимостью учета большого количества разнообразных факторов. Часто информация о воздействии данных факторов и их взаимосвязях является неполной. В качестве модели описания неопределенных данных можно использовать, например, вероятностно-статистическую, нечеткую и интервальную модели.

В интервальной модели описания данных, которая рассматривается в настоящей работе, неопределенность параметра  $x$  описывается только границами его возможных значений, т. е. задается интервалом  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ . Интервалы неопределенности позволяют описать неоднозначные, переменные и/или неточные исходные данные. Все значения внутри интервала предполагаются равновероятными.

В ряде прикладных экономических задач интервальная модель оказывается наиболее предпочтительной (см., например, [1]). Одной из задач такого класса, который



интервалов. Арифметические операции с интервалами — это операции классической интервальной арифметики [10–13]. Далее в работе будут использоваться следующие обозначения:

- $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\underline{\mathbf{a}}$  — соответственно верхний и нижний концы интервала  $\mathbf{a}$ ;
- $\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})$  — радиус интервала;
- $\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})$  — середина интервала;
- $|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\}$  — модуль интервала.

Интервальные уравнения могут иметь различные множества решений.

*Объединенным множеством решений* ИСЛАУ называется множество, образованное всевозможными решениями точечных систем линейных уравнений  $Ax = b$ , где  $A \in \mathbf{A}$ ,  $b \in \mathbf{b}$  (см., например, [10, 11, 13]).

В настоящей работе рассматривается другое, так называемое допусковое множество решений.

*Допусковым множеством решений* ИСЛАУ называется множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (Ax \in \mathbf{b})\}, \end{aligned} \quad (4)$$

образованное всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что произведение  $Ax$  попадает в  $\mathbf{b}$  для любого  $A \in \mathbf{A}$  [14].

Допусковое множество решений часто возникает в задачах математической экономики. В данной статье рассматривается модель межотраслевого экономического баланса (1), т. е. классическое уравнение В.В. Леонтьева.

Интервальный аналог уравнения Леонтьева (1) записывается в следующем виде:

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{y}. \quad (5)$$

Если в вещественном случае решение системы (1) относительно  $x$  позволяет спрогнозировать необходимые для запланированного потребления  $y$  объемы производства по отраслям, то в интервальном случае важная прикладная задача для интервального уравнения Леонтьева может быть сформулирована следующим образом [15]: для каких объемов производства  $x$  при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат  $c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}$  конечное потребление будет принадлежать заданным интервалам  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ?

Множество всех таких векторов  $x$  образует допусковое множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{E} - \mathbf{C})x = \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ .

Допусковое множество решений ИСЛАУ является выпуклым многогранником в  $\mathbb{R}^n$ . Доказательство данного факта можно найти, например, в [12, 16]. Тем не менее прямое описание допускового множества решений для систем большой размерности слишком трудоемкое: количество ограничивающих гиперплоскостей растет пропорционально  $m \cdot 2^n$ . Поэтому вместо прямого описания допускового множества гораздо проще найти некоторые его *оценки*, а еще лучше — подмножества. Исходная задача заменяется на так называемую линейную задачу о допусках.

*Линейной задачей о допусках* называется задача нахождения (по возможности, большего) бруса, который содержится в допусковом множестве решений данной интервальной линейной системы уравнений.

## 2. Исследование разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели “затраты — выпуск”

Важной подзадачей линейной задачи о допусках является задача исследования ее разрешимости, поскольку допусковое множество может оказаться пустым даже для “хороших” интервальных данных. В таких случаях говорят, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*.

Исследование разрешимости линейной задачи о допусках впервые сделано в работе [15], но приведенные формулы могли применяться только для интервальных матриц  $\mathbf{A}$  специального вида и неотрицательных правых частей  $\mathbf{b}$ . В работе [17] для проверки разрешимости использовался “тест средней системы” (вычисляется решение  $x^*$  точечной системы  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ , затем оно тестируется на включение  $\mathbf{A}x^* \subseteq \mathbf{b}$ ). В [12] приведены контрпримеры, показывающие, что данный тест не всегда является верным.

Другим подходом к определению разрешимости ЛЗД может быть так называемый формально-алгебраический подход [12, гл. 11], при котором сначала решается ИСЛАУ и только затем принимается решение о пустоте или непустоте допускового множества. Недостатком этого подхода является необходимость решения ИСЛАУ (актуально для прямоугольных систем уравнений). Кроме того, формально-алгебраический подход не всегда позволяет до конца исследовать разрешимость задачи, поскольку в результате может быть получено формальное решение с неправильными, “вывернутыми” интервалами. Поэтому более перспективным методом, предназначенным для полного исследования разрешимости ЛЗД, представляется техника, основанная на использовании *распознающего функционала* множества решений [18].

Изложение техники распознающего функционала во многом следует [12]. Пусть даны интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор правой части  $\mathbf{b}$ , а выражением

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (6)$$

определяется распознающий функционал  $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда принадлежность  $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна выполнению неравенства  $\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ . Кроме того, функционал  $\text{Tol}(x)$  является вогнутым и достигает конечного максимума на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Итак, алгоритм исследования разрешимости интервальной ЛЗД выглядит следующим образом.

*Шаг 1.* Решить задачу безусловной максимизации по  $x$  вогнутого функционала

$$\max \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T^*. \quad (7)$$

*Шаг 2.* Если  $T^* \geq 0$ , то  $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , т. е. ЛЗД для  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  разрешима. Иначе перейти к шагу 4.

*Шаг 3.* Если  $T^* > 0$ , то  $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$  и принадлежность точки  $\tau$  допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных. Перейти к шагу 5.

*Шаг 4.*  $T^* < 0$ , следовательно, ЛЗД для  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  неразрешима.

*Шаг 5.* Конец.

Как следует из приведенного алгоритма, при практическом решении ЛЗД для интервального уравнения Леонтьева необходимо решить задачу максимизации недиффе-

ренцируемой вогнутой функции (7) (или, что эквивалентно, задачу минимизации выпуклой функции), поскольку распознающий функционал  $\text{Tot}(x)$  — негладкая функция. В данной работе для решения задачи (7) применяется метод отделяющих плоскостей (МОП) с дополнительными отсечениями [8, 9]. Метод относится к семейству методов отделяющих плоскостей [19] и предназначен для решения задачи вычисления  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ , где  $f(x)$  — выпуклая, не обязательно дифференцируемая функция. Метод отделяющих плоскостей с отсечениями является методом первого порядка, для его работы на каждой итерации необходимо вычислять значения целевой функции  $f(x_k)$  и значения одного из субградиентов  $g$  целевой функции  $f$ , взятого из субдифференциала  $\partial f$  в точке  $x_k$ .

Множество

$$\partial f(x_k) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \text{dom } f \quad f(x) - f(x_k) \geq g(x - x_k)\}$$

называется *субдифференциалом* функции  $f$  в точке  $x_k$ . Элемент  $g \in \partial f(x_k)$  называется *субградиентом* функции  $f(x)$  в точке  $x_k$ . Здесь и далее при умножении векторов пространства  $\mathbb{R}^n$  берется их скалярное произведение. Если функция  $f(x)$  конечна в окрестности точки  $x_k$ , выпукла и дифференцируема в точке  $x_k$ , то субградиент  $g \in \partial f(x_k)$  единственен и совпадает с градиентом функции  $f$  в точке  $x_k$  (см., например, [20]).

Никакой дополнительной информации, кроме значений целевой функции и субградиентов, для работы метода не требуется. Таким образом, МОП с отсечениями является методом оракульного типа.

Отличительная особенность семейства методов отделяющих плоскостей заключается в том, что работа методов происходит в расширенном сопряженном пространстве значений субградиентов и сопряженной функции Лежандра—Фенхеля  $f^*(g) = \sup_x \{gx - f(x)\}$ ,  $g \in \partial f$ . Для выпуклых недифференцируемых функций классическое условие экстремума гладких функций — равенство 0 производной  $f'$  в точке оптимума  $x^*$  — заменяется на задачу нахождения корня субдифференциального отображения:  $0 \in \partial f(x^*)$ . С помощью несложных преобразований можно показать, что задача нахождения минимума функции многих переменных  $f(x)$  эквивалентна задаче нахождения значения сопряженной функции  $f^*$  в точке 0:

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\sup_x \{0 \cdot x - f(x)\} = -f^*(0), \quad (8)$$

т. е. оптимальная точка  $x^*$  удовлетворяет необходимым, а следовательно, и достаточным условиям экстремума для задачи безусловной выпуклой минимизации. Надграфик сопряженной функции  $f^*(x)$  аппроксимируется двумя полиэдрами — внутренним, полностью лежащим в  $\text{epi } f^*(x)$ , и внешним, содержащим  $\text{epi } f^*(x)$ . Из вершины внешнего полиэдра (по сути, являющейся текущим рекордом функции  $f(x)$  — точкой, дающей минимальное на текущий момент значение  $f(x)$ ) делается проекция на внутренний полиэдр, что позволяет построить гиперплоскость, отделяющую текущий рекорд от полиэдра внутренней аппроксимации. Для улучшения свойств монотонности МОП с отсечениями на каждой итерации производятся дополнительные отсечения по верхней оценке значения  $f^*(0)$ .

Метод отделяющих плоскостей с отсечениями был успешно применен при исследовании разрешимости ЛЗД для интервальной модели межотраслевого баланса. Кроме того, для решения задачи были применены другие методы минимизации недифференцируемых функций. (Результаты см. в следующих разделах.)

### 3. Создание модели задачи на языке моделирования AMPL

Для изучения возможностей решения ЛЗД с помощью существующих методов решения задач недифференцируемой оптимизации (НДО) необходимо описать модель задачи на одном из языков моделирования. В качестве такого языка выбран один из самых широко применяемых для решения задач математического программирования язык так называемого алгебраического моделирования AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming) [21].

Код для модели представлен в алгоритме 1. Для записи исходных данных создается еще один файл, начинающийся со служебного слова `data`. В этом файле задаются все параметры модели (задаваемые служебным словом `param`).

---

А л г о р и т м 1. Линейная задача о допусках для модели межотраслевого баланса как задача НДО

---

```

Data: Другой файл inoutdata.ampl
1 set Y 'y - output' ordered; # Потребление продукции
2 set X 'x - input' ordered; # Выпуск продукции
3 set C := Y cross X;
4 param ly_real{Y} >= 0; # Потребление в разрезе отраслей
5 param io{C} >= 0; # Матрица коэф-в прямых произв. затрат
6 param otkl >= 0; # Ширина отклонения для интервальной матрицы коэф-в
7 param io1_ot {i in Y, j in X} = (io[i, j] - otkl*io[i, j]);
8 param io2_ot {i in Y, j in X} = (io[i, j] + otkl*io[i, j]);
9 param E{i in Y, j in X} := if (ord(i,Y)=ord(j, X)) then 1 else 0;
10 param io1 {i in Y, j in X} = E[i, j] - io2_ot[i, j];
11 param io2 {i in Y, j in X} = E[i, j] - io1_ot[i, j];
12 param uy {j in Y} = 1.2*ly_real[j];
13 param ly {j in Y} = if (j = 'y1') then 1.1*ly_real['y1'] else
    ly_real[j];
14 var x {i in X};
15 var s1 {i in Y} = 0.5*(ly[i]+uy[i]) -  $\sum$  {k in X} io1[i,k]*x[k];
16 var s2 {i in Y} = 0.5*(ly[i]+uy[i]) -  $\sum$  {k in X} io2[i,k]*x[k];
17 var sus {i in Y} = max (s1[i], s2[i]);
18 var los {i in Y} = min (s1[i], s2[i]);
19 var mags {i in Y} = max (abs(los[i]), abs(sus[i]));
20 minimize minosTol: -(min {i in Y} (0.5*(uy[i]-ly[i]) - mags[i])); #
    Распознающий функционал

```

---

После описания модели необходимо выбрать программный пакет для решения оптимизационной задачи. Наиболее известным и крупнейшим в мире сервером, предоставляющим возможность решать задачи оптимизации в режиме онлайн, является NEOS (Network-Enabled Optimization Server) [22]. Были сделаны попытки решить представленную в следующем разделе задачу оценки перспектив развития региональной экономики (на примере Приморского края) с применением интервальной модели межотрас-

левого баланса (МОБ). Для решения задачи использовались следующие программы, доступные на <http://neos-server.org/neos/>:

- CONDOR (CONstrained, Non-linear, Direct, parallel, multi-objective Optimization using trust Region method for high-computing load, noisy objective functions) [23] — программа, специально предназначенная для решения задач НДО, но размерности не более 50 переменных;
- LANCELOT [24] — пакет, предназначенный для решения задач нелинейного программирования большой размерности;
- CONOPT (<http://www.conopt.com/>) — пакет, предназначенный для решения задач нелинейного программирования.

Ни один из перечисленных программных продуктов с задачами, представленными в следующем разделе, не справился.

## 4. Вычислительные эксперименты

Для доказательства эффективности предложенного в работе подхода с применением НДО была использована свободно распространяемая программа для исследования разрешимости интервальной линейной задачи о допусках TOLSOLVITY С.П. Шарого (ИБТ СО РАН, г. Новосибирск), которая выдает заключение о разрешимости задачи о допусках для интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , значение максимума распознающего функционала ее допускового множества решений и доставляющий его вектор аргументов. Программа выложена на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/index.php>.

В данной программе для максимизации распознающего функционала используется вариант алгоритма суперградиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных суперградиентов ( $r$ -алгоритм) [25, 26]. Код  $r$ -алгоритма написан П.И. Стецюком (Институт кибернетики, Киев). Также на основе данной программы написан ее модифицированный вариант на языке `octave`, использующий для решения задачи негладкой оптимизации МОП с отсечениями. Программа имеет название “Алгоритм SPACLIP”. При этом задача на максимум вогнутой функции заменена задачей на минимум выпуклой функции.

### 4.1. Оценка перспектив развития экономики Приморского края с помощью решения линейной задачи о допусках

В качестве практического применения предложенных в работе методов решен ряд задач оценки перспектив развития региональной экономики на примере Приморского края с использованием интервальной модели межотраслевого баланса. В соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 14 февраля 2009 г. № 201-р завершена разработка базовых таблиц “затраты — выпуск” [27] за 2011 г., необходимых для расчетов по интервальной модели Леонтьева. Ожидается, что эти таблицы будут опубликованы в 2017 г. на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики. В связи с этим будет актуальным использование предложенных в работе методов.

Для расчетов приняты данные таблиц “затраты — выпуск” для Приморского края за 2011 г., представленные в работе [28], а также статистические данные ежегодника

“Приморский край. Социально-экономические показатели” за 2013 г. [29]. Экономические показатели региона разбиты на пятнадцать отраслей:

1. Сельское хозяйство, охота и лесоводство.
2. Рыболовство, рыбоводство.
3. Добыча полезных ископаемых.
4. Обрабатывающие производства.
5. Производство и распределение энергии.
6. Строительство.
7. Оптовая и розничная торговля.
8. Гостиницы и рестораны.
9. Транспорт и связь.
10. Финансовая деятельность.
11. Операции с недвижимостью, аренда.
12. Государственное управление.
13. Образование.
14. Здравоохранение и предоставление социальных услуг.
15. Предоставление коммерческих услуг.

По данным таблицы “Межотраслевой баланс экономики региона (Приморского края за 2011 г.)”, взятой из [28, с. 280], построена матрица  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  коэффициентов прямых производственных затрат, представленная в табл. 1. Коэффициенты  $c_{ij}$  рассчитывались по формуле  $c_{ij} = x_{ij}/x_j$ , где  $x_{ij}$  — величина выпуска  $i$ -й отрасли, используемого в качестве ресурса в отрасли с номером  $j$ ;  $x_j$  — выпуск  $j$ -й отрасли,  $i, j = 1, \dots, n$  (см., например, [27]).

Поскольку основное допущение модели “затраты — выпуск” состоит в том, что технологические коэффициенты  $c_{ij}$  принимаются неизменными [30], данную матрицу можно использовать и при моделировании экономики региона в последующие годы. Однако эти коэффициенты могли быть рассчитаны по данным, приведенным с некоторой неизвестной погрешностью. Преимущество интервальной модели в том, что можно учесть эту неопределенность в данных, превратив матрицу  $C$  в интервальную.

Для решения ЛЗД требуются также данные по региональному конечному спросу (помимо конечного потребления учитываются валовое накопление основного капитала и изменение запасов материальных средств) в разрезе отраслей ( $y_i, i = 1, \dots, n$ , в модели). Расчетные данные представлены в табл. 2, там же для сравнения приведены расчетные объемы производства. Расчет производился на основе данных табл. 1 [28, с. 279], которые были откорректированы с учетом обновленных сведений за 2011 и 2012 гг. из [29] (строка Итого табл. 2). Корректировка сделана с помощью поправки на процент изменения.

С помощью представленных данных можно решить ряд задач прогнозирования развития экономики региона, применив приведенные в работе методы. В следующем подразделе даны примеры таких задач с решениями.

#### ***4.1.1. Прогнозирование увеличения конечного спроса для сельского хозяйства***

Задачи прогнозирования, решенные в данном разделе, относятся к первому классу задач прогнозирования для модели межотраслевых материальных связей региональной экономики, представленных в [30] (определение сбалансированных выпусков отраслей,

Т а б л и ц а 1. Матрица коэффициентов прямых производственных затрат для модели “затраты–выпуск” (Приморский край, 2011 г.)

Отрасль	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.1334	0.0554	0.0283	0.0625	0.0160	0.0100	0.0247	0.0216	0.0065
2	0.0322	0.1720	0.0001	0.1137	0.0176	0.0012	0.0330	0.0124	0.0003
3	0.0135	0.0005	0.0710	0.0247	0.0634	0.0093	0.0051	0.0013	0.0018
4	0.0430	0.0705	0.0890	0.1044	0.1458	0.0912	0.1209	0.0061	0.0799
5	0.0479	0.0532	0.1381	0.0430	0.1240	0.0633	0.0252	0.0186	0.0407
6	0.0313	0.0285	0.0359	0.1253	0.1416	0.0873	0.0034	0.0593	0.0742
7	0.0066	0.0089	0.0128	0.0908	0.0342	0.0669	0.0235	0.1406	0.0744
8	0.0035	0.0059	0.0115	0.0089	0.0088	0.0056	0.0198	0.0049	0.0047
9	0.0196	0.0026	0.0346	0.0622	0.0077	0.0754	0.0428	0.0761	0.0396
10	0.0006	0.0006	0.0010	0.0008	0.0013	0.0012	0.0007	0.0027	0.0009
11	0.0133	0.0115	0.0267	0.0097	0.0452	0.0458	0.0268	0.0598	0.0359
12	0.0078	0.0095	0.0212	0.0073	0.0250	0.0175	0.0028	0.0338	0.0331
13	0.0094	0.0076	0.0287	0.0081	0.0056	0.0023	0.0009	0.0013	0.0144
14	0.0187	0.0177	0.0283	0.0114	0.0268	0.0315	0.0018	0.0202	0.0208
15	0.0009	0.0114	0.0193	0.0068	0.0056	0.0085	0.0026	0.0207	0.0014
Отрасль	10	11	12	13	14	15			
1	0.0105	0.0008	0.0021	0.0053	0.0068	0.0183			
2	0.0056	0.0029	0.0024	0.0038	0.0025	0.0061			
3	0.0176	0.0004	0.0010	0.0005	0.0003	0.0148			
4	0.0133	0.0145	0.0162	0.0133	0.0213	0.0322			
5	0.0169	0.0012	0.0173	0.0256	0.0380	0.0982			
6	0.0239	0.0898	0.0759	0.0577	0.0759	0.0256			
7	0.0428	0.0418	0.0469	0.0658	0.0670	0.0639			
8	0.0162	0.0026	0.0013	0.0035	0.0015	0.0155			
9	0.0492	0.0522	0.0133	0.0062	0.0363	0.0436			
10	0.0077	0.0014	0.0014	0.0017	0.0017	0.0019			
11	0.0232	0.0364	0.0112	0.0174	0.0045	0.0083			
12	0.0569	0.0371	0.0187	0.0463	0.0360	0.0319			
13	0.0379	0.0084	0.0266	0.0416	0.0433	0.0447			
14	0.0239	0.0152	0.0405	0.0276	0.0295	0.0304			
15	0.0225	0.0019	0.0029	0.0046	0.0028	0.0069			

обеспечивающих задаваемые варианты конечного спроса), но с использованием преимуществ интервальной модели.

На сколько процентов можно увеличить конечное потребление данной отрасли в условиях 2014 г.? Как при этом изменятся объемы производства? Сформулированная задача является линейной задачей о допусках для интервального уравнения Леонтьева. Задача была решена с помощью двух методов —  $r$ -алгоритма Н.З. Шора [25, 26] и МОП с отсечениями — алгоритма SPACLIP [8, 9].

Результаты решения задачи приведены в табл. 3–5. Анализируя табл. 3, можно заключить, что увеличить конечный спрос даже на 5 % для отрасли 1 “Сельское хозяйство, охота и лесоводство” невозможно без изменения объемов производства в других отраслях, поскольку система интервальных уравнений становится несовместной (см. строки 2, 6, 10 таблицы). Если же задать интервальный вектор  $y$  как  $[1.05 \cdot y_1, 1.1 \cdot y_1]$ ,

Т а б л и ц а 2. Объемы производства  $x_i$  и потребления  $y_i$  — валовый региональный продукт по отраслям, млн руб. (Приморский край)

Отрасль	2011 г.		2012 г.		2013 г.		2014 г.	
	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$
1	14141	39325	14274	40474	14914	41407	15017	41650
2	10095	40530	10190	41714	10647	42676	10720	42926
3	2628	15106	2653	15547	2772	15906	2791	15999
4	55064	139239	55582	143306	58073	146611	58474	147469
5	14333	63486	14468	65340	15116	66847	15221	67239
6	153625	231323	155072	238079	162022	243570	163140	244995
7	71283	129580	71954	133364	75179	136440	75698	137239
8	988	8593	997	8844	1042	9048	1049	9101
9	136357	183409	137641	188765	143810	193119	144803	194249
10	314	1431	317	1473	331	1507	333	1516
11	30874	61099	31165	62884	32561	64334	32786	64710
12	34433	54624	34757	56219	36315	57516	36565	57853
13	11005	21635	11109	22267	11607	22781	11687	22914
14	12060	33737	12173	34722	12719	35523	12807	35731
15	2574	7960	2598	8192	2715	8381	2734	8430
Итого [29]	549 793	1 031 103	555 018	1 062 124	—	—	—	—
Модели- рование [28, с. 279]	546 552	1 025 827	577 610	1 081 900	581 060	1 087 200	585 100	1 093 600

Т а б л и ц а 3. Разрешимость линейной задачи о допусках для модели МОБ Приморского края

Степень неопределенности матрицы $C$	Нижняя граница для $y_1$ , % увеличения	Максимальное увеличение конечного спроса для других отраслей, %	Разре- шимость	Примечание
0.001	5	0	—	
0.001	5	10	+	см. табл. 4
0.001	10	20	+	
0.001	40	10	+	см. табл. 5
0.01	5	0	—	
0.01	5	10	—	
0.01	10	20	+	
0.01	40	10	—	
0.05	5	0	—	
0.05	5	10	—	
0.05	10	20	—	
0.05	40	10	—	

$[y_2, 1.2 \cdot y_2], \dots, [y_{15}, 1.2 \cdot y_{15}]$ , то система будет совместной, но только для матрицы коэффициентов прямых производственных затрат с достаточно малой интервальной неопределенностью  $C \pm 0.001 C$  (см. строку 3). Результаты решения для этой задачи — найденная точка из допускового множества — приведены в табл. 4. По данным таб-

Т а б л и ц а 4. Результаты решения задачи об увеличении конечного спроса в сельском хозяйстве на 5 %, млн руб.

<i>r</i> -алгоритм		SPACLIP		Интервальный		Исходные данные	
$x_{new}$	Увеличение, %	$x_{new}$	Увеличение, %	вектор $y$		$x$	$y$
43018	3.29	42745	2.63	15768	17345	41650	15017
43396	1.10	43238	0.73	10720	11792	42926	10720
16359	2.25	16123	0.78	2791	3070	15999	2791
148870	0.95	148280	0.55	58474	64321	147469	58474
69251	2.99	67698	0.68	15221	16743	67239	15221
246830	0.75	246100	0.45	163140	179450	244995	163140
138510	0.93	137900	0.48	75698	83268	137239	75698
9235	1.47	9180	0.87	1049	1154	9101	1049
195400	0.59	195070	0.42	144800	159280	194249	144803
1550	2.27	1527	0.72	333	366	1516	333
65269	0.86	65049	0.52	32786	36065	64710	32786
59528	2.90	58145	0.51	36565	40222	57853	36565
24060	5.00	23051	0.60	11687	12856	22914	11687
36535	2.25	35938	0.58	12807	14088	35731	12807
8563	1.58	8503	0.86	2734	3007	8430	2734

Т а б л и ц а 5. Результаты решения задачи об увеличении конечного спроса на 40 % для отрасли 1 при ограничении увеличения конечного спроса в 110 % для других отраслей, млн руб.

<i>r</i> -алгоритм		SPACLIP		Интервальный		Исходные данные	
$x_{new}$	Увеличение, %	$x_{new}$	Увеличение, %	вектор $y$		$x$	$y$
48920	17.46	49026	17.71	21024	22526	41650	15017
43562	1.48	43653	1.69	10720	11792	42926	10720
16273	1.71	16300	1.88	2791	3070	15999	2791
148790	0.90	149270	1.22	58474	64321	147469	58474
68156	1.36	68362	1.67	15221	16743	67239	15221
246560	0.64	247310	0.94	163140	179450	244995	163140
138100	0.63	138540	0.95	75698	83268	137239	75698
9218	1.29	9238	1.51	1049	1154	9101	1049
195320	0.55	195990	0.90	144800	159280	194249	144803
1548	2.09	1552	2.37	333	366	1516	333
65209	0.77	65412	1.08	32786	36065	64710	32786
58244	0.68	58426	0.99	36565	40222	57853	36565
23145	1.01	23203	1.26	11687	12856	22914	11687
36131	1.12	36216	1.36	12807	14088	35731	12807
8522	1.09	8540	1.30	2734	3007	8430	2734

лицы можно определить, на сколько процентов необходимо будет увеличивать объемы производства для всех отраслей.

Если увеличивать размеры интервалов для матрицы  $C$ , то, как видно из табл. 3, задача может стать неразрешимой. Поэтому при решении ЛЗД необходимо обосновывать

выбор конкретных интервалов для матрицы коэффициентов прямых производственных затрат.

Решение еще одной интересной подзадачи, представленной в строке 5 табл. 3, — увеличение конечного спроса на 40 % для отрасли 1 “Сельское хозяйство, охота и лесоводство” при ограничении увеличения конечного спроса в 110 % для других отраслей, — представлено в табл. 5.

Другим возможным подходом к решению рассматриваемой задачи является определение строения допускового множества с помощью решения системы линейных неравенств. Такие подходы исследуются в работах И. Рона [16], И.А. Шарой [31]. Для задач большой размерности такой подход непригоден из-за слишком большого количества линейных неравенств в системе, которую требуется решить. Для задач малой размерности он тоже может быть не всегда применим, поскольку в результате решения системы линейных неравенств может быть получена точка, лежащая на границе допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Тем не менее для рассматриваемой в данном разделе задачи этот подход был применен на практике. Система линейных неравенств решалась с помощью программных продуктов IBM ILOG CPLEX Optimizer и MOSEK, доступных на сервере NEOS [22]. Точки допускового множества решений были найдены, расхождение с данными третьего столбца табл. 4 составило не более 0.5 % в меньшую сторону в случае использования CPLEX и не более 2.5 % в большую сторону в случае использования MOSEK. Однако значение распознающего функционала для этих точек оказалось равным  $10^{-11}$  для CPLEX и  $10^{-12}$  для MOSEK, что довольно далеко от его истинного максимума (15.45). Этот факт позволяет считать найденную точку не очень подходящей для дальнейшей работы с допусковым множеством, поскольку она находится почти на границе множества и попытки построить телесную оценку допускового множества вокруг этой точки не приведут к успеху.

#### 4.2. Решение серии задач большой размерности с построением профилей производительности

Для определения производительности предложенного в работе подхода с применением метода отделяющих плоскостей с отсечениями при исследовании разрешимости ЛЗД для интервальной модели межотраслевого баланса в случае задач большой размерности решена серия типовых задач прогнозирования, аналогичных задачам, рассмотренным в предыдущем разделе с данными, сгенерированными случайным образом:

$$c_{ij} \in [0, 1], \quad \mathbf{C} = C \pm 0.01C, \quad \mathbf{b} \in (0, 1000], \quad \bar{\mathbf{b}} = 1.2\mathbf{b}. \quad (9)$$

Полученные в ходе вычислительных экспериментов результаты обработаны по методике [32] с построением профилей производительности. Данная методика является альтернативой более традиционному подходу обработки результатов вычислительных экспериментов с построением таблиц полученных результатов по каждому эксперименту. В таблицах обычно приводятся данные по затраченному процессорному времени для решения каждой тестовой задачи, количеству вычислений целевой функции задачи, количеству итераций, требуемых для достижения заданной точности решения задачи. Но такие таблицы можно привести только для сравнительно небольшого количества тестовых задач. В случаях, когда оптимизационные методы сравниваются на

сериях из сотен и тысяч однотипных задач, для обработки и представления результатов вычислительных экспериментов требуются другие методики.

Одним из вариантов является вычисление средних значений или суммирование вычисленных метрик производительности для каждого тестируемого метода [33]. При таком подходе различные результаты решения действительно сложных для тестируемых методов задач могут нивелироваться почти одинаковыми результатами решения более простых задач. Кроме того, при такой простой статистической обработке результатов либо не учитываются в принципе задачи, с которыми методы вообще не смогли справиться, либо для учета таких сбоев необходимо дополнительно вводить и вычислять некоторые штрафные параметры при отсутствии какой-то общепринятой объективной формулы расчета таких штрафных значений. Поэтому более предпочтительным методом оценки и сравнения оптимизационных пакетов представляется постепенно приближающийся к общепринятому подход с построением профилей производительности.

*Профилем производительности* (performance profile [32])  $\rho_s$  для метода решения оптимизационной задачи называется функция распределения какого-либо измеримого показателя (метрики) производительности. В качестве показателя производительности  $t_{p,s}$  при решении задачи  $p$  методом  $s$  может использоваться, например, затраченное методом  $s$  процессорное время для решения  $p$  или количество обращений к оракулу для метода  $s$  при решении  $p$ . Вычисление профилей производительности позволяет визуализировать различия по эффективности нескольких оптимизационных методов.

Функция  $\rho_s(\tau)$  определяется следующим образом:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{card} \{p \in P : r_{p,s} \leq \tau\}, \quad r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s} : s \in S\}}. \quad (10)$$

Здесь  $\text{card } A$  — мощность множества  $A$ ;  $S$  — множество сравниваемых методов;  $P$  — множество решаемых с помощью этих методов задач. Количество элементов в  $P$  обозначено через  $n_p$ ,  $n_s$  — количество элементов в  $S$ . Функция  $r_{p,s}$  является коэффициентом эффективности. Для лучшего по измеряемому показателю производительности метода на конкретной задаче  $p$  она принимает значение 1, для остальных методов ее значения показывают, во сколько раз показатели производительности этих методов хуже оптимального. Тогда функция  $\rho_s(\tau)$  фактически показывает вероятность того, что для метода  $s \in S$  коэффициент эффективности  $r_{p,s}$  будет не больше какого-то вещественного числа  $\tau \in \mathbb{R}$ . Задавая различные значения для  $\tau$  с определенным шагом, можно получить таблицу значений функции распределения коэффициента эффективности  $r_{p,s}$ , называемую профилем производительности  $\rho_s(\tau)$ . Часто профилем производительности называют и график функции  $\rho_s(\tau)$ .

Функции  $\rho_s(\tau) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  для каждого метода являются неубывающими и кусочно-гладкими. Значение  $\rho_s(1)$  — вероятность того, что метод  $s$  будет оптимальным по данному показателю производительности среди других методов. Графики профилей производительности методов позволяют наглядно представить все результаты вычислительных экспериментов. По графикам можно легко и быстро визуально определить, какие методы наиболее эффективны по измеряемому показателю производительности на конкретном классе задач.

В вычислительных экспериментах, приведенных в данном разделе, количество сравниваемых методов  $n_s = 2$ . Для решенных задач в качестве измеримых показателей производительности  $t_{p,s}$  используются количество обращений к оракулу и затраченное процессорное время. Тестирование проводилось на суперкомпьютере под управлением

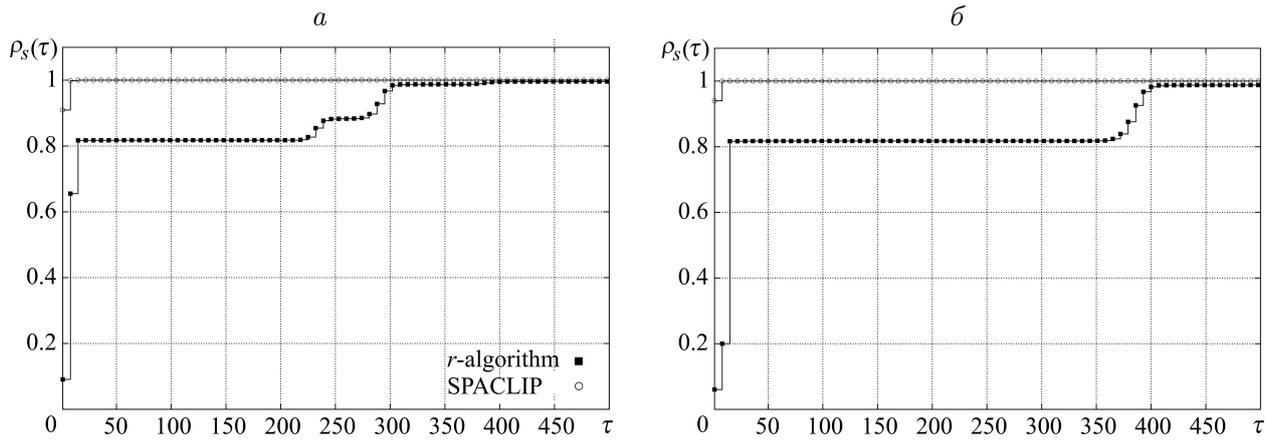


Рис. 1. Профили производительности  $\rho_s(\tau)$ ,  $s = 1, 2$ , для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по затраченному процессорному времени (а) и количеству обращений к оракулу (б) при решении задачи (9),  $m = n = 10$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-4}$

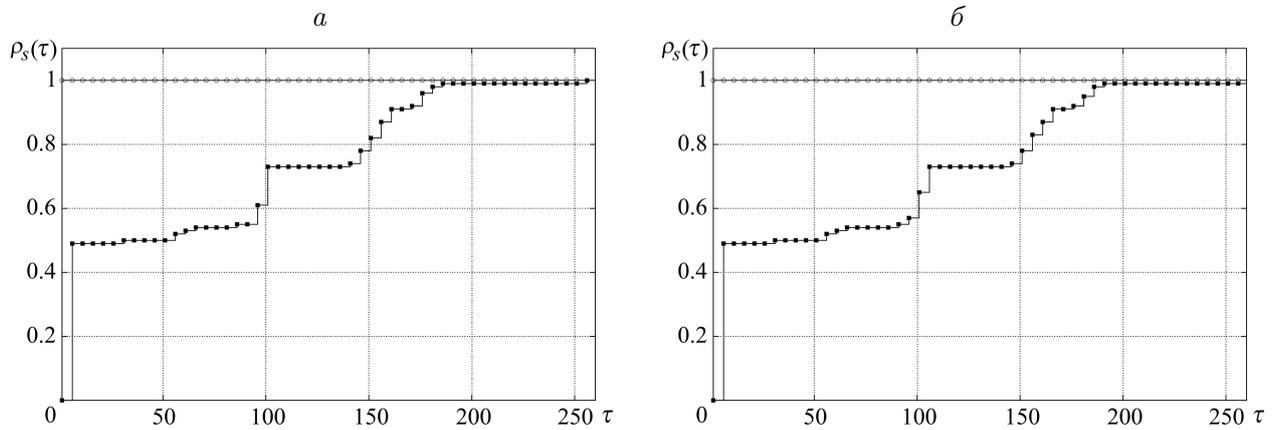


Рис. 2. Профили производительности  $\rho_s(\tau)$ ,  $s = 1, 2$ , для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по затраченному процессорному времени (а) и количеству обращений к оракулу (б) при решении задачи (9),  $m = n = 100$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-1}$

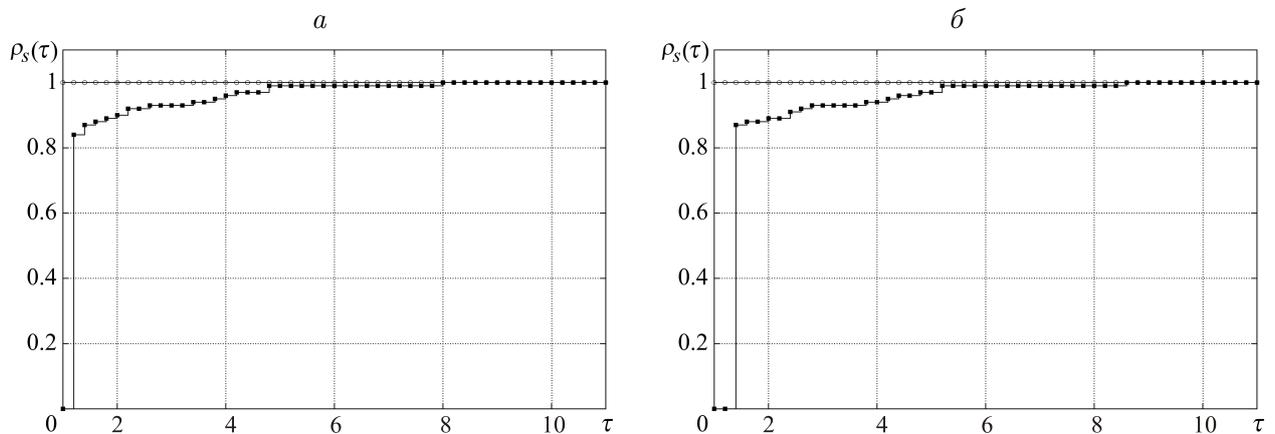


Рис. 3. Профили производительности  $\rho_s(\tau)$ ,  $s = 1, 2$ , для  $r$ -алгоритма и алгоритма SPACLIP по затраченному процессорному времени (а) и количеству обращений к оракулу (б) при решении задачи (9),  $m = n = 100$ ; заданная точность  $\varepsilon = 10^{-4}$

ОС Linux, дистрибутив Gentoo Base System release 2.2, 32 процессора Intel Xeon E5-2690 @ 2.90GHz, 65 Гб оперативной памяти; версия интерпретатора octave 3.8.2.

Сначала была решена серия из 5000 задач малой размерности  $m = n = 10$ , результаты представлены на рис. 1. Для решения задачи НДО максимизации распознающего функционала применялись  $r$ -алгоритм и алгоритм SPACIP. Видно преимущество алгоритма SPACIP.

Максимальная размерность задач такого типа, которые были решены с помощью созданного комплекса программ,  $m = n = 100$ . Результаты решения серии из 100 задач такой размерности представлены на рис. 2, 3. При этом на рис. 2 показаны результаты для заданной точности нахождения решения  $\varepsilon = 10^{-1}$ , а на рис. 3 — для точности  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Для решения одной задачи с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  каждому методу требовалось более 15 мин. По графикам построенных профилей производительности видно, что преимущество алгоритма SPACIP и по затраченному процессорному времени, и по количеству обращений к оракулу стало еще более существенным.

## Заключение

Результаты практического решения задачи оценки перспектив развития региональной экономики (на примере Приморского края) подтвердили преимущества метода распознающего функционала множества решений для исследования разрешимости интервальной линейной задачи о допусках по сравнению с другими методами решения ЛЗД. Ключевым этапом метода является решение задачи максимизации недифференцируемого вогнутого функционала. Для решения этой задачи успешно применены метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями и  $r$ -алгоритм. По результатам проведенных исследований можно сделать следующий вывод: метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями (алгоритм SPACIP) особенно рекомендуется применять для решения задач средних, больших и сверхбольших размерностей либо в случаях, когда требуется высокая точность решения задачи.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-07-12010-офим).

## Список литературы / References

- [1] **Вощинин А.П.** Задачи анализа с неопределенными данными — интервальность и/или случайность? // Рабочее совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений ИМРО'04, Новосибирск, 21–22 июня 2004 г. Тр. Междунар. конф. по вычисл. математике МКВМ-2004. Рабочие совещания / Под ред. Ю.И. Шокина, А.М. Федотова, С.П. Ковалева, Ю.И. Молородова, А.Л. Семёнова, С.П. Шарого. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 147–158.  
**Voschinin, A.P.** Data analysis under uncertainty — intervals and/or randomness? // Workshop on Interval Mathematics and Constraint Propagation Methods, Novosibirsk, 21–22 June 2004. Proc. of the Intern. Conf. on Computational Mathematics ICCM-2004. Workshops / Eds Yu.I. Shokin, A.M. Fedotov, S.P. Kovalyov, Yu.I. Molorodov, A.L. Semenov, S.P. Shary. Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2004. P. 147–158. (In Russ.)
- [2] **Леонтьев В.** Исследование структуры американской экономики: Теор. и эмпир. анализ по схеме затраты — выпуск. М.: Госстатиздат, 1958. 640 с.

- Leontief, W.** Studies in the structure of the american economy: Theoretical and empirical explorations in input-output analysis. New York: Oxford Univ. Press, 1953. 561 p.
- [3] **Jerrell, M.E.** Applications of interval computations to regional economic input-output models // Applications of Interval Computations / Eds R.B. Kearfott, V. Kreinovich. Kluwer, 1996. P. 133–143.
- [4] **Rohn, J.** Input-output model with interval data // *Econometrica*. 1980. Vol. 48. P. 767–769.
- [5] **Kearfott, B., Nakao, M., Neumaier, A., Rump, S., Shary, S.P., Van Hentenryck, P.** Standardized notation in interval analysis // *Comput. Technologies*. 2010. Vol. 15, No. 1. P. 7–13.
- [6] **Шарый С.П.** Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределенностями // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 2. С. 111–125.  
**Shary, S.P.** Solvability of interval linear equations and data analysis under uncertainty // *Automation and Remote Control*. 2012. Vol. 73, No. 2. P. 310–322.
- [7] **Шарый С.П., Шарая И.А.** Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // *Вычисл. технологии*. 2013. Т. 18, № 3. С. 80–109.  
**Shary, S.P., Sharaya, I.A.** Recognizing solvability of interval equations and its application to data analysis // *Comput. Technologies*. 2013. Vol. 18, No. 3. P. 80–109. (In Russ.)
- [8] **Vorontsova, E.A.** A projective separating plane method with additional clipping for non-smooth optimization // *WSEAS Transactions on Mathematics*. 2014. Vol. 13. P. 115–121.
- [9] **Vorontsova, E.A., Nurminski, E.A.** Synthesis of cutting and separating planes in a nonsmooth optimization method // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, No. 4. P. 619–631.
- [10] **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.  
**Alefeld, G., Herzberger, J.** Introduction to Interval Computation. New York: Acad. Press, 1983. 333 p.
- [11] **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.  
**Kalmykov, S.A., Shokin, Yu.I., Yuldashev, Z.Kh.** Methods of interval analysis. Novosibirsk: Nauka, 1986. (In Russ.)
- [12] **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ: Электронная книга. Новосибирск: Изд-во XYZ, 2016. 617 с. Адрес доступа: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks>  
**Shary, S.P.** Finite-dimensional interval analysis: E-book. Novosibirsk: XYZ Press, 2016. 617 p. Available at: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks> (In Russ.)
- [13] **Neumaier, A.** Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 255 p.
- [14] **Neumaier, A.** Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. 1986. No. 86/9. P. 5–19.
- [15] **Rohn, J.** Input-output planning with inexact data // *Freiburger Intervall-Berichte*. 1978. No. 9/78. P. 1–16.
- [16] **Rohn, J.** Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985* / (Ed.) K. Nickel Lecture Notes in Computer Science, vol. 212. New York: Springer Verlag, 1986. P. 157–158.
- [17] **Хлебалин Н.А.** Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта // *Аналитические методы синтеза регуляторов*. Саратов: Саратовский политехн. ин-т, 1981. С. 107–123.

- Khlebalin, N.A.** An analytical controller design under parameter uncertainty // Analytical Controller Design Methods. Saratov: Saratovskiy Politekhn. In-t, 1981. P. 107–123. (In Russ.)
- [18] **Shary, S.P.** Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. 1995. Vol. 39. P. 53–85.
- [19] **Nurminski, E.A.** Separating plane algorithms for convex optimization // Math. Program. 1997. Vol. 76. P. 373–391.
- [20] **Rockafellar, R.T.** Convex analysis. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1970. 451 p.
- [21] **Fourer, R., Gay, D.M., Kernighan, B.W.** AMPL. A modeling language for mathematical programming. 2nd ed. Canada: Thomson Learning Acad. Res. Center, 2003. 517 p.
- [22] NEOS Server: State-of-the-Art solvers for numerical optimization.  
Available at: <http://neos-server.org/neos/>
- [23] **Berghen, F.V.** Optimization algorithm for non-linear, constrained, derivative-free optimization of continuous, high computing load, noisy objective functions: Technical report. IRIDIA, Univ. of Brussels, Belgium. May 2004.  
Available at: <http://www.applied-mathematics.net>
- [24] Lancelot: a Fortran package for large-scale nonlinear optimization (Release A). Available at: : <http://www.numerical.rl.ac.uk/lancelot/manual.html>
- [25] **Шор Н.З., Журбенко Н.Г.** Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 51–59.  
**Shor, N.Z., Zhurbenko, N.G.** A minimization method using the operation of space dilation in the direction of the difference of two successive gradients // Cybernetics. 1971. Vol. 7. P. 450–459.
- [26] **Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И.** Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 80–94.  
**Shor, N.Z., Zhurbenko, N.G., Likhovid, A.P., Stetsyuk, P.I.** Algorithms of nondifferentiable optimization: Development and application // Cybernetics and Systems Analysis. 2003. Vol. 39, No. 4. P. 537–548.
- [27] **Miller, R.E., Blair, P.D.** Input-output analysis: Foundation and extensions. Cambridge Univ. Press, 2009. 750 p.
- [28] **Машунин Ю.К., Машунин И.А.** Прогнозирование развития экономики региона с использованием таблиц “затраты — выпуск” // Экономика региона. 2014. № 2. С. 276–289.  
**Mashunin, Yu.K., Mashunin, I.A.** Forecasting the development of regional economy on the basis of input — output tables // Economy of Region. 2014. No. 2. P. 276–289. (In Russ.)
- [29] Приморский край. Социально-экономические показатели: Статистический ежегодник. Владивосток: Приморскстат, 2014. 361 с.  
Primorsky Krai. Socio-economic indicators: Statistical yearbook. Vladivostok: Primorskstat, 2014. 361 p. (In Russ.)
- [30] **Гранберг А.Г.** Основы региональной экономики. 3-е изд. М.: ВШЭ, 2003. 495 с.  
**Granberg, A.G.** The basics of regional economy. 3rd edition. Moscow: VSHE, 2003. 495 p. (In Russ.)
- [31] **Шарая И.А.** Допусковое множество решений как проекция выпуклого многогранного множества // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 6. С. 124–137.  
**Sharaya, I.A.** Tolerable solution set as a projection of the convex polyhedron // Comput. Technologies. 2007. Vol. 12, No. 6. P. 124–137. (In Russ.)

- [32] **Dolan, E., More, J.** Benchmarking optimization software with performance profiles // Math. Program. 2002. Vol. 91. P. 201–213.
- [33] **Conn, A.R., Gould, N.I.M., Toint, P.L.** Numerical experiments with the LANCELOT package (Release A) for large-scale nonlinear optimization // Math. Program. 1996. Vol. 73. P. 73–110.

*Поступила в редакцию 28 ноября 2016 г.*

### **Linear tolerance problem for input-output model with interval data**

VORONTSOVA, EVGENIYA A.

Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russia

Corresponding author: Vorontsova, Evgeniya A., e-mail: vorontsovaea@gmail.co

The paper considers economic input-output models proposed by W. Leontief. Input-output models are subject to uncertainty. The values of the technical coefficients of input-output models are usually evaluated with interval uncertainty. The final demand vector is also not precisely known and became an interval vector. Solution of linear tolerance problem (LTP) for input-output models is useful in predicting how various industrial sectors of the national (or regional) economy respond to changes in economic activity.

For the interval linear system  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , the LTP requires inner evaluation of the tolerable solution set formed by all point vectors  $x$  such that the product  $\mathbf{Ax}$  remains within interval vector  $\mathbf{b}$  for all possible point matrix  $A$  within interval matrix  $\mathbf{A}$ .

A method based on the S.P. Shary's recognizing functional (RF) of the tolerable solution set is applied to the problem of recognizing the solvability (emptiness or non-emptiness of the solution set) of the LTP for input-output models. A key step in the RF method is to solve the non-smooth concave maximization problem. The separating planes method (SPM) with additional clipping is proposed for the approximate numerical solution for different types of non-smooth optimization problem with convex structure. The latter problem can be reformulated as the computation of the convex conjugate functional value at the origin. SPM with clippings is a new effective black-box optimization method.

The applications presented in this paper show how forecasting the development of regional economy on the basis of input-output tables can be done by means of RF method, SPM with clippings and N.Z. Shor's r-algorithm. Results of numerical experiments are presented in the test case of economic modelling for Primorsky Krai region (Russian Federation). The results of computational experiments have shown the effectiveness of SMP with clippings and have confirmed the advantages of the RF method compared to other methods for solution of LTP problems.

*Keywords:* interval system of linear algebraic equations, linear interval tolerance problem, input-output model, recognizing functional, separating planes methods, non-smooth optimization, regional economy.

**Acknowledgements.** This research was partly supported by RFBR (grant No. 13-07-12010-ofim).

*Received 28 November 2016*