

## Исследование рекурсивной фильтрации проекционных данных в задаче томографии области интереса

А. В. ЛИХАЧЕВ

Институт автоматизации и электротехники СО РАН, Новосибирск, Россия

Контактный e-mail: ipm1@iae.nsk.su

Предложена новая оценка изображения в задаче двумерной томографии по усеченным данным, основанная на применении цифровой рекурсивной фильтрации проекций. Разработан метод расчета фильтра, учитывающий размер области интереса. Проведен вычислительный эксперимент, который показал, что рассматриваемый подход обеспечивает значительное уменьшение среднеквадратичной ошибки реконструкции по сравнению с алгоритмом Шеппа—Логана. Кроме того, он не дает интенсивных артефактов на границе области интереса, характерных для известных реализаций гапп-фильтра. В процессе численного моделирования также получено, что метод достаточно устойчив по отношению к случайному шуму.

*Ключевые слова:* двумерная томография, область интереса, цифровая рекурсивная фильтрация проекций.

### Введение

Томографические методы являются одним из наиболее эффективных средств неинвазивного исследования структур, скрытых для непосредственного наблюдения, в том числе внутренних органов тела человека. При этом часто встречаются такие задачи, где интерес представляет лишь некоторая часть объема, из которого регистрируется информация. Они относятся к области ROI-томографии (от английского region of interest), являющейся предметом работ [1–7]. Ниже рассматривается двумерная постановка, когда изучается одно сечение (тонкий слой) объекта.

Обозначим через  $g(x, y)$  функцию, описывающую искомое распределение выбранного параметра (плотности, коэффициента преломления и т. п.). Во многих приложениях, в частности в рентгеновской диагностике, с хорошей точностью выполняется лучевое приближение [8]. Согласно ему измеряемые величины, называемые проекционными данными, представляют собой набор значений интегралов  $f(p, \varphi)$  от  $g(x, y)$  по прямым в  $\mathbb{R}^2$ . Здесь  $p$  — расстояние от прямой до начала координат,  $\varphi$  — угол между вектором ее нормали и осью  $X$ . Функции  $f(p, \varphi)$  и  $g(x, y)$  связаны между собой преобразованием Радона. Согласно [9], формулу его обращения можно записать в следующем виде:

$$g(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{f}(\omega, \varphi) \exp(i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega \right) d\varphi, \quad (1)$$

где  $\tilde{f}(\omega, \varphi)$  — преобразование Фурье от  $f(p, \varphi)$  по первой переменной. Внутренний интеграл в (1) описывает процедуру, носящую название гагр-фильтрации. Она применяется к данным, зарегистрированным под одинаковым углом  $\varphi$ . В дальнейшем о них будем говорить как о проекции и обозначать через  $f_\varphi(p)$ .

Из (1) видно, что для вычисления  $g(x, y)$  хотя бы в одной точке требуются, вообще говоря, все значения  $f_\varphi(p)$ . Таким образом, при использовании методов, основанных на обращении преобразования Радона, для восстановления изображения области интереса, вне зависимости от ее размеров, нужно полностью измерить каждую проекцию. В некоторых случаях это нежелательно. Например, в медицине, где, как правило, диагностируются отдельные органы, пациент получает дополнительную дозу рентгеновского излучения, которое не несет полезной информации. Кроме того, на практике нередко возникают ситуации, когда доступ к изучаемому объекту ограничен и нет возможности провести его полное сканирование. Сказанное выше подтверждает актуальность разработки альтернативных подходов для ROI-томографии. Одному из них посвящена предлагаемая работа.

## 1. Обоснование метода

### 1.1. Построение алгоритма реконструкции по формуле обращения

Будем считать, что  $g(x, y)$  равна нулю, если  $x^2 + y^2 > R_0^2$ . В качестве области интереса возьмем круг радиуса  $r_0 < R_0$  с центром в начале координат. Во всех направлениях он проецируется на отрезок  $[-r_0, r_0]$ . Предположим, что регистрация проводится только в этих пределах, т. е. функция  $f(p, \varphi)$  известна лишь при  $|p| \leq r_0$ . Такие данные будут называться усеченными.

Перейдем к алгоритмической реализации формулы (1). Прежде всего отметим, что внутренний интеграл расходится, если  $\tilde{f}(\omega, \varphi)$  недостаточно быстро убывает с ростом частоты (такая ситуация, в частности, может быть обусловлена присутствием широкополосного шума). Чтобы избежать этого, подынтегральное выражение умножается на некоторую четную функцию  $\tilde{\Omega}(\omega)$ . Поскольку измерения на каждом ракурсе наблюдения дискретизованы с шагом  $h$ , зависящим от свойств оборудования, фурье-образы проекций являются  $2\omega_N$ -периодическими. Здесь  $\omega_N = \pi/h$  — циклическая частота Найквиста. В связи с этим  $\tilde{\Omega}(\omega)$  задают на интервале  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ ,  $\omega_{\max} \leq \omega_N$ . Различные функции  $\tilde{\Omega}(\omega)$  исследовались в работах [8–14].

Пусть  $f_\varphi^F(p)$  — результат гагр-фильтрации проекции  $f_\varphi(p)$ . Обозначим через  $\Phi(p)$  обратное преобразование Фурье от произведения  $|\omega|\tilde{\Omega}(\omega)$  (множитель  $\tilde{\Omega}(\omega)$  выбирается таким, чтобы оно существовало). Будем рассматривать  $\Phi(p)$  и  $\tilde{\Phi}(\omega) \equiv |\omega|\tilde{\Omega}(\omega)$  как импульсную и частотную характеристики аппроксимации гагр-фильтра. Используя теорему о свертке, можно записать  $f_\varphi^F(p) \approx (f_\varphi * \Phi)(p)$ . Для оценки искомой функции в точке  $(x_0, y_0)$  по наблюдениям с  $M$  равномерно распределенных направлений заменим интегрирование по углу в (1) конечной суммой:

$$\hat{g}(x_0, y_0) = \frac{\Delta\varphi}{8\pi^2} \sum_{m=1}^M [(f_{m\Delta\varphi} * \Phi)(x_0 \cos(m\Delta\varphi) + y_0 \sin(m\Delta\varphi))]. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta\varphi$  — угол между ракурсами. Из соотношения (2) следует, что для получения  $\hat{g}(x_0, y_0)$  требуются тем большие участки проекций, чем шире характеристика  $\Phi(p)$ .

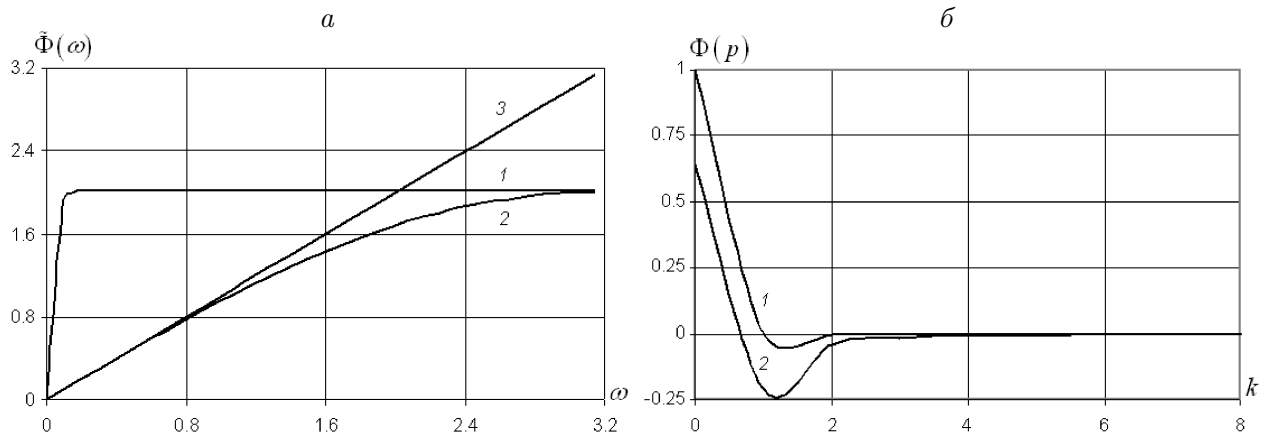


Рис. 1. Частотные (а) и импульсные (б) характеристики фильтров проекционных данных

При решении задач томографии часто применяется фильтр, предложенный Шешпом и Логаном в работе [10]:

$$\tilde{\Phi}_{SL}(\omega) = |\omega|\tilde{\Omega}_{SL}(\omega) = |\omega|\text{sinc}\left(\frac{\pi|\omega|}{2\omega_{\max}}\right), \quad \frac{|\omega|}{\omega_{\max}} \leq 1, \quad (3)$$

где  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Взяв от (3) обратное преобразование Фурье, получаем

$$\Phi_{SL}(p) = \frac{\omega_{\max}^2}{2\pi^3} \left( \frac{\pi/2 - p\omega_{\max} \sin(p\omega_{\max})}{(\pi/2)^2 - (p\omega_{\max})^2} \right). \quad (4)$$

Если в (4) положить  $\omega_{\max} = \omega_N$ , то в узлах сетки, на которой задана проекция, будет иметь место

$$\Phi_{SL}(kh) = \frac{1}{\pi^2 h^2} \left( \frac{1}{1 - 4k^2} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

Частотная (3) и импульсная (5) характеристики фильтра Шешпа — Логана для положительных значений аргумента изображены на рис. 1 кривыми 2. Здесь предполагается, что шаг дискретизации  $h = 1$ . На рис. 1, а для сравнения приведена функция  $|\omega|$  на интервале  $[0, \omega_N]$  (кривая 3).

### 1.2. Применение рекурсивной фильтрации

Проведенное численное моделирование показало, что качество изображения области интереса может быть улучшено, если для расчета  $f_{\varphi}^F(p)$  вместо свертки с ядром (4) использовать рекурсивную цифровую фильтрацию:

$$f_{\varphi}^F(nh) = \sum_{k=0}^K b_k f_{\varphi}((n - k)h) - \sum_{l=1}^L a_l f_{\varphi}^F((n - l)h). \quad (6)$$

Предпосылки для этого следующие. Импульсная характеристика рекурсивного фильтра  $\Phi_{rec}(p)$ , как и (4), является бесконечной. Его частотная характеристика  $\tilde{\Phi}_{rec}(\omega)$  может резко изменяться даже при небольшом количестве коэффициентов  $a_l$  и  $b_k$ , что позволяет аппроксимировать поведение гаур-фильтра в окрестности нуля. Кроме того, варьируя  $a_l$  и  $b_k$ , можно добиться такой формы кривой  $\Phi_{rec}(p)$ , которая при подстановке

в (2) будет обеспечивать меньшее влияние неизвестных участков проекций на результат реконструкции по сравнению с  $\Phi_{SL}(p)$ .

Выражение (6) представляет одностороннюю фильтрацию, поэтому  $\Phi_{rec}(p)$  является несимметричной. Для получения симметричных характеристик, ниже они обозначаются как  $\Phi_{rec}^s(p)$  и  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega)$ , проекцию нужно отфильтровать посредством (6) дважды: сначала в одном, а затем в противоположном направлении. Нетрудно видеть, что

$$\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega) = \tilde{\Phi}_{rec}(\omega)\tilde{\Phi}_{rec}(-\omega) = \tilde{\Phi}_{rec}(\omega)\overline{\tilde{\Phi}_{rec}(\omega)} = |\tilde{\Phi}_{rec}(\omega)|^2. \quad (7)$$

Действительно, фильтрация в обратном направлении эквивалентна изменению знака координаты, а равенство  $\tilde{\Phi}_{rec}(-\omega) = \overline{\tilde{\Phi}_{rec}(\omega)}$  следует из того, что реальная часть фурье-образа действительной функции четная, а мнимая — нечетная.

Z-преобразование фильтра, определяемого соотношением (6) (см. [15]), имеет вид

$$(Z\Phi_{rec})(z) = \frac{\sum_{k=0}^K b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^L a_l z^{-l}}. \quad (8)$$

Функция  $\tilde{\Phi}_{rec}(\omega)$  получается, если подставить в (8) значения комплексного переменного  $z$ , принадлежащие единичной окружности, так как при  $h = 1$  ей соответствует ось частот. При этом нуль переходит в  $z = 1$ , а точки  $\pm\omega_N$  переходят в  $z = -1$ .

В работе исследовался случай, когда  $K = 1$  и  $L = 1$ . Для этих параметров выражение (6) записывается как

$$f_\varphi^F(nh) = b_0 f_\varphi(nh) + b_1 f_\varphi((n-1)h) - a_1 f_\varphi^F((n-1)h). \quad (9)$$

Такой выбор обусловлен тем, что, во-первых, чем ниже порядок рекурсии  $L$ , тем устойчивее фильтрация. Во-вторых, поскольку первая сумма в правой части (6) означает усреднение с весами, с ростом  $K$  степень сглаживания проекций будет увеличиваться, что может негативно сказаться на качестве восстановленного изображения.

### 1.3. Предлагаемый метод вычисления коэффициентов фильтра

Непосредственный расчет для фильтра (9) с использованием (7) и (8) дает

$$\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega) = \frac{(b_0 + a_1 b_1 + (b_1 + a_1 b_0) \cos \omega)^2 + (b_1 - a_1 b_0)^2 (\sin \omega)^2}{(1 + 2a_1 \cos \omega + a_1^2)^2}. \quad (10)$$

Первое соотношение для коэффициентов  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  получаем из равенства нулю частотной характеристики при  $\omega = 0$ . Подставляя это значение в (10), приходим к выражению  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(0) = (1 + a_1)^2 (b_0 + b_1)^2 / (1 + 2a_1 + a_1^2)^2$ , откуда имеем  $b_1 = -b_0$ . Далее для  $b_0$  и  $b_1$  будет употребляться единое обозначение  $b$ . Учитывая это, после соответствующих преобразований (10) перепишем следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega) = \frac{b^2 \left( (1 - a_1)^2 (1 - \cos \omega)^2 + (1 + a_1)^2 (\sin \omega)^2 \right)}{(1 + 2a_1 \cos \omega + a_1^2)^2}. \quad (11)$$

Усеченную проекцию  $f_\varphi^{\text{cut}}(p)$  можно представить как  $f_\varphi(p)\Pi_{r_0}(p)$ , где  $\Pi_{r_0}(p)$  — прямоугольный импульс единичной амплитуды и длины  $2r_0$  с центром в начале координат. Тогда ее фурье-образ будет иметь вид  $\tilde{f}_\varphi^{\text{cut}}(\omega) = (\tilde{f}_\varphi * \tilde{\Pi}_{r_0})_F(\omega)$ . Здесь  $\tilde{\Pi}_{r_0}(\omega) = 2 \sin(r_0\omega)/\omega$ ; через  $(\circ * \circ)_F$  обозначена свертка в фурье-области. Произведем дискретизацию с шагом  $\Delta\omega \ll 1$  и найдем оценку  $\tilde{f}_\varphi^{\text{cut}}(\omega)$  в точке  $\omega = \Delta\omega$ :

$$\tilde{f}_\varphi^{\text{cut}}(\Delta\omega) \approx \Delta\omega \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{2 \sin(r_0 n \Delta\omega)}{n \Delta\omega} \tilde{f}_\varphi((1-n)\Delta\omega). \quad (12)$$

В (12) предполагается, что  $N$  — некоторое заданное нечетное число.

Введем параметр  $\gamma$  — усредненное отношение модулей реальных частей первого и нулевого коэффициентов разложения в ряд Фурье одномерных проекций:

$$\gamma = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{|\text{Re}\{\tilde{f}_{m\Delta\varphi}(\Delta\omega)\}|}{|\text{Re}\{\tilde{f}_{m\Delta\varphi}(0)\}|}. \quad (13)$$

В настоящей работе выражение (13) вычислялось для пятидесяти функций  $g(x, y)$ , входящих в разработанную автором библиотеку математических фантомов. При этом получены  $\gamma$  в интервале от 0.04 до 0.3, его среднее значение составило около 0.2. Кроме того, оказалось, что подстановка в числитель (13) следующих коэффициентов разложения приводит к величинам, существенно меньшим, чем  $\gamma$ . На основании этих результатов для оценки  $a_1$  оставим в (12) только слагаемое с  $n = 1$ . Взяв реальную часть, имеем

$$\text{Re}\{\tilde{f}_\varphi^{\text{cut}}(\Delta\omega)\} \approx \Delta\omega \frac{2 \sin(r_0 \Delta\omega)}{\Delta\omega} \text{Re}\{\tilde{f}_\varphi(0)\} \approx 2r_0 \Delta\omega \text{Re}\{\tilde{f}_\varphi(0)\}. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы на частоте  $\Delta\omega$  воздействие рекурсивного фильтра на реальную часть спектра усеченной проекции равнялось воздействию гагр-фильтра на реальную часть спектра полной проекции. Это выражается равенством

$$\tilde{\Phi}_{rec}^s(\Delta\omega) \text{Re}\{\tilde{f}_\varphi^{\text{cut}}(\Delta\omega)\} = \Delta\omega \text{Re}\{\tilde{f}_\varphi(\Delta\omega)\}. \quad (15)$$

Оценивая  $\text{Re}\{\tilde{f}_\varphi(\Delta\omega)\}$  как  $\gamma \text{Re}\{\tilde{f}_\varphi(0)\}$  и учитывая (14), сводим (15) к

$$2r_0 \tilde{\Phi}_{rec}^s(\Delta\omega) = \gamma. \quad (16)$$

Из формулы (11) видно, что частотная характеристика будет быстро меняться в окрестности нуля при значениях  $a_1$ , близких к  $-1$ . Пусть  $a_1 = \alpha - 1$ , где значение  $\alpha$  стремится к нулю справа, оставаясь положительным. Выразив в (11) коэффициент  $a_1$  через  $\alpha$ , для малого  $\Delta\omega$  получаем

$$\tilde{\Phi}_{rec}^s(\Delta\omega) \approx \frac{b^2 \left( (2 - \alpha)^2 (\Delta\omega)^4 / 4 + \alpha^2 (\Delta\omega)^2 \right)}{\left( (\Delta\omega)^2 (1 - \alpha) + \alpha^2 \right)^2}. \quad (17)$$

Допустим, что  $\alpha$  имеет тот же порядок, что и  $\Delta\omega$ . Положим  $\alpha = \beta \Delta\omega$ . Сохраняя в (17) только члены с наименьшей степенью, приходим к  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\Delta\omega) \approx b^2 / (1 + \beta^2)$ . Подставив это выражение в (16), находим  $\beta = \sqrt{2r_0 b^2 / \gamma - 1}$  и

$$a_1 = -1 + \Delta\omega \sqrt{2r_0 b^2 / \gamma - 1}. \quad (18)$$

Обозначим через  $\tilde{\Phi}_{SL}(\omega)\Big|_{\omega_N}$  характеристику фильтра Шеппа — Логана (3) с частотой отсечки, равной частоте Найквиста. Для определения параметра  $b$ , который, как это следует из (11), не влияет на форму  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega)$ , а лишь определяет ее нормировку, примем условие  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega_N) = \tilde{\Phi}_{SL}(\omega_N)\Big|_{\omega_N}$ . Легко подсчитать, что  $\tilde{\Phi}_{SL}(\omega_N)\Big|_{\omega_N} = 2$ . В используемых в разд. 1.2 единицах  $\omega_N = \pi$ , тогда  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega_N) = 4b^2/(1 - a_1)^2$ . Поскольку  $a_1 \approx -1$ , имеем  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega_N) \approx b^2$ . Таким образом,  $b = \sqrt{2} \approx 1.4142$ .

На рис. 1, *a* представлена частотная характеристика  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega)$  (кривая 1), рассчитанная с помощью описанного выше алгоритма для радиуса области интереса  $r_0 = 0.2$  и отношения  $\gamma = 0.2$ . При этом коэффициенты цифрового рекурсивного фильтра (9) равняются  $b_0 = 1.4142$ ,  $b_1 = -1.4142$ ,  $a_1 = -0.9947$ . Функция  $\Phi_{rec}^s(p)$ , полученная посредством дискретного обратного преобразования Фурье от  $\tilde{\Phi}_{rec}^s(\omega)$ , приведена на рис. 1, *б*. Видно, что ширина импульсной характеристики рекурсивного фильтра практически равна двум шагам сетки. В то же время для фильтра Шеппа — Логана ее значение еще заметно отлично от нуля при  $k = 3 \dots 4$ .

Изложенный подход может быть обобщен следующим образом. Рассмотрим выпуклую область интереса произвольной формы. Пусть при сканировании под углом  $\varphi_m$  она проектируется на отрезок  $[r_{1m}, r_{2m}]$ , причем имеет место  $-R_0 < r_{1m} < r_{2m} < R_0$ . Тогда соответствующая усеченная проекция будет представляться как  $f_{\varphi m}(p)\Pi_m(p)$ , где  $\Pi_m(p)$  — прямоугольный импульс полуширины  $r_m = (r_{2m} - r_{1m})/2$ , центр которого сдвинут на  $\rho_m = (r_{2m} + r_{1m})/2$  относительно начала координат. С учетом теоремы запаздывания выражение (12) теперь будет иметь вид

$$\tilde{f}_{\varphi m}^{cut}(\Delta\omega) \approx \Delta\omega \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{2 \sin(r_m n \Delta\omega)}{n \Delta\omega} \exp(-i\rho_m n \Delta\omega) \tilde{f}_{\varphi}((1-n)\Delta\omega). \quad (19)$$

Если по-прежнему оставлять только член с  $n = 1$ , то, поскольку при малых  $\Delta\omega$  можно положить  $\exp(-i\rho_m \Delta\omega) \approx 1$ , результаты, приведенные в разд. 1.3, сохраняют свою силу. Отличие от случая круглой области интереса будет состоять лишь в том, что коэффициент  $a_1$  вычисляется по формуле (18), в которой  $r_0$  заменено на  $r_m$ , а следовательно, зависит от направления наблюдения.

## 2. Вычислительный эксперимент

Разработанный метод исследовался путем вычислительного эксперимента, в том числе было проведено его сравнение с алгоритмом Шеппа — Логана. Математический фантом изображен на рис. 2. Проекционные данные моделировались для трехсот шестидесяти ракурсов наблюдения, равномерно распределенных по углу в интервале от 0 до  $2\pi$ . В связи с этим отметим следующее. Параметры  $(p, \varphi)$  и  $(-p, \varphi + \pi)$  определяют одну и ту же прямую, поэтому  $f(p, \varphi) = f(-p, \varphi + \pi)$ . Отсюда видно, что для точного восстановления функции  $g(x, y)$  по формуле (1) достаточно иметь данные только для  $0 \leq \varphi < \pi$ . Выбор, сделанный в работе, обусловлен тем, что в первых томографах, реализующих параллельную схему сканирования, система регистрации поворачивалась вокруг исследуемого объекта именно на  $360^\circ$ . Получаемое при этом решение считается более устойчивым по отношению к случайному шуму, чем решение, полученное по такому же количеству ракурсов наблюдения, заключенных в интервале  $180^\circ$ .

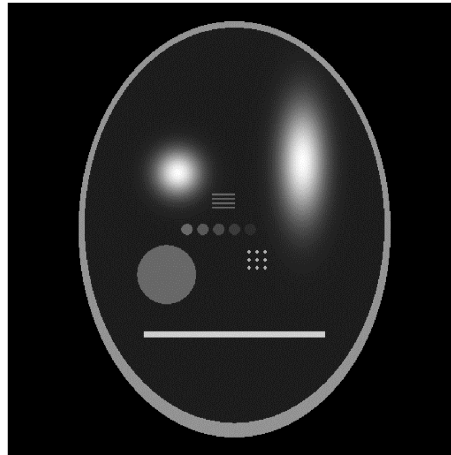


Рис. 2. Математический фантом

Одномерные проекции вычислялись на отрезке  $[-r_0; r_0]$  в  $N$  точках независимо от величины  $r_0$ . Реконструкция велась на квадратной сетке  $N \times N$  узлов. В соответствии с результатами численного моделирования значение отношения  $\gamma$  полагалось равным 0.2. Величина  $\Delta\omega$  определялась как  $2\omega_N/(N-1)$  при  $\omega_N = \pi$ . В расчетах варьировались радиус  $r_0$ , количество отсчетов  $N$ , параметр  $\sigma$ , задающий уровень шума (см. ниже). Для контроля точности использовалась нормированная среднеквадратичная ошибка внутри области интереса  $\Delta_{\text{ROI}}$ :

$$\Delta_{\text{ROI}} = \sqrt{\frac{\sum_{x_i^2+y_j^2 \leq r_0^2} (g(x_i, y_j) - \hat{g}(x_i, y_j))^2}{\sum_{x_i^2+y_j^2 \leq r_0^2} (g(x_i, y_j))^2}}. \quad (20)$$

Здесь через  $\hat{g}$  обозначена оценка искомой функции, а через  $g$  — ее истинное значение.

Одной из целей моделирования было изучение зависимостей  $\Delta_{\text{ROI}}$  от  $a_1$  при различных  $r_0$  и  $N$ . Оказалось, что каждая из них имеет единственный минимум. Обозначим точку, в которой он достигается, как  $a_1^{\min}$ , а значение  $a_1$ , вычисленное по формуле (18), через  $a_1^{\text{th}}$ . Эффективность предложенного метода оценивания коэффициента  $a_1$  можно характеризовать модулем разности  $\delta = |a_1^{\text{th}} - a_1^{\min}|$ . Было получено, что  $\delta$  уменьшается вместе с  $\Delta\omega$ , т. е. с ростом  $N$ , что согласуется с предположением, принятым при выводе уравнения (17). В частности, для  $N = 1025$  среднее значение  $\delta$  составляет 0.0059, для  $N = 2049$  оно равно 0.0026, а для  $N = 4097$  — 0.0014. Пример представлен на рис. 3. Здесь количество точек дискретизации  $N = 4097$ . Кривые 1–3 соответствуют радиусам области интереса  $r_0 = 0.2, 0.3, 0.4$ . На каждой кривой кружком помечено значение коэффициента  $a_1^{\text{th}}$  при  $b = 1.4142$ .

Поведение ошибки  $\Delta_{\text{ROI}}$ , обусловленное изменением размера области интереса ( $N = 2049$ ), продемонстрировано на рис. 4. Кривая 1 отвечает рекурсивной фильтрации при  $a_1 = a_1^{\text{th}}$ , кривая 2 — фильтрации Шеппа — Логана с  $\omega_{\max} = 0.5\omega_N$ . Такая частота отсечки выбрана по результатам серии экспериментов. С одной стороны, когда  $\omega_{\max}$  уменьшается, подавляются высокочастотные составляющие, появляющиеся в решении из-за разрывов на концах усеченных проекций. Однако, с другой стороны, чрезмерное занижение  $\omega_{\max}$  приводит к размытию мелкомасштабных структур на изображении.

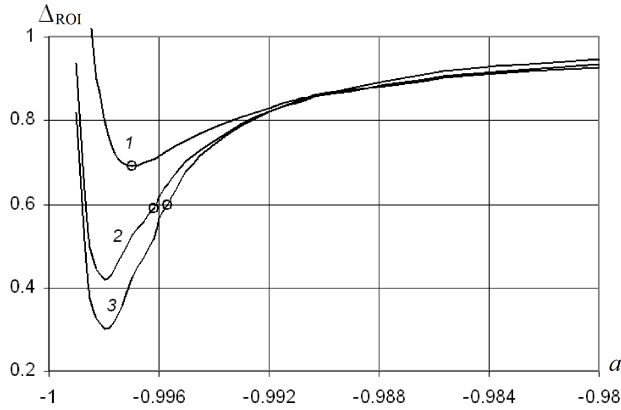


Рис. 3. Зависимости ошибки реконструкции от коэффициента  $a_1$

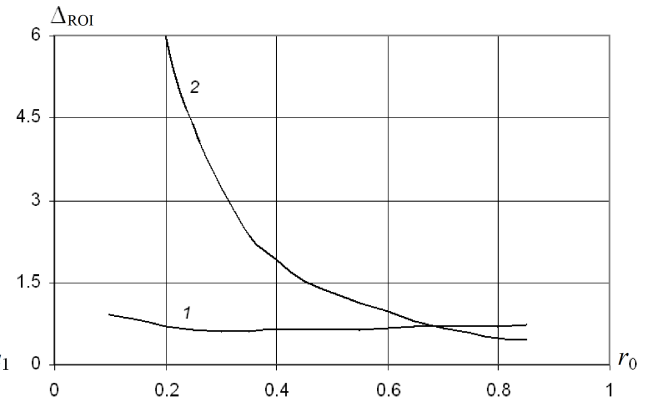


Рис. 4. Зависимости ошибки реконструкции от радиуса области интереса

Как и следовало ожидать, кривая 2 на рис. 4 монотонно убывает. При  $r_0 \approx 0.68$  она пересекает кривую 1. Это означает, что если область интереса достаточно велика (в данном случае порядка 75% от исследуемого объекта), то применение разработанного метода становится нецелесообразным. Но при относительно малых  $r_0$  рекурсивный фильтр имеет существенное преимущество перед фильтром Шеппа—Логана. Например, когда  $r_0 = 0.2$ , ошибка для него меньше в 8.5 раза.

Чтобы исследовать устойчивость, к проекциям  $f_\varphi(p)$  добавлялся некоррелированный нестационарный шум. В каждой точке он представлял собой нормально распределенную, центрированную случайную величину с дисперсией  $D(p) = \sigma^2(f_\varphi(p))^2$ . Зависимости  $\Delta_{ROI}(\sigma)$  показаны на рис. 5 (нумерация кривых имеет на нем тот же смысл, что и на рис. 4). Радиус  $r_0$  равен 0.3. Для фильтра Шеппа—Логана частота отсечки по-прежнему равняется половине частоты Найквиста, поскольку дальнейшее ее уменьшение приводит к сильному переглаживанию изображения. Из рис. 5 видно, что разработанный метод решения задачи ROI-томографии более устойчив.

На рис. 6 приведены томограммы для  $r_0 = 0.2$ , полученные с использованием фильтрации Шеппа—Логана и рекурсивной фильтрации. В первом случае  $\Delta_{ROI} = 5.946$ , а во втором —  $\Delta_{ROI} = 0.698$ . Из рисунка можно сделать вывод о том, что предлагае-

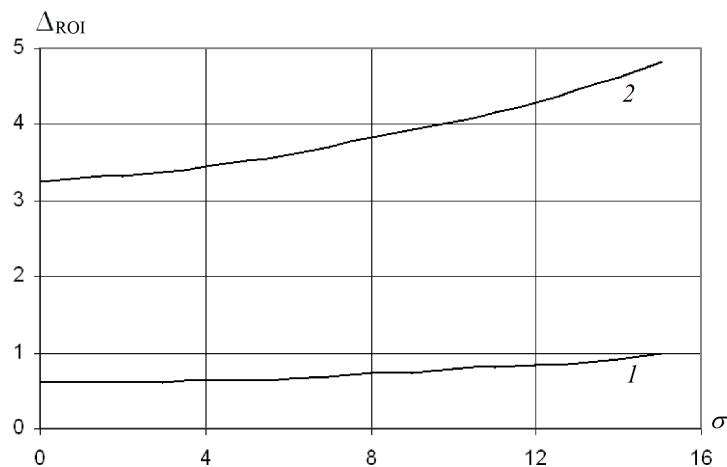


Рис. 5. Зависимости ошибки реконструкции от уровня шума в проекционных данных,  $r_0 = 0.3$



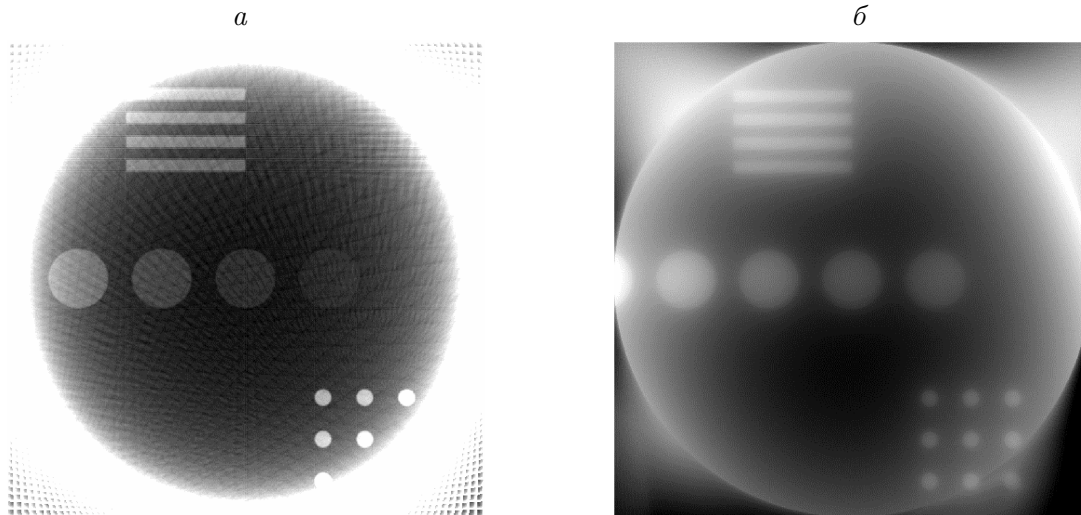


Рис. 6. Томограммы области интереса: *a* — фильтр Шеппа — Логана; *б* — рекурсивный фильтр

мый подход, в отличие от стандартного алгоритма, реализующего формулу обращения преобразования Радона, позволяет хорошо реконструировать детали вблизи границы области интереса и даже за ее пределами.

Визуально изображение на рис. 6, *б* выглядит более сглаженным. Чтобы выяснить, насколько это влияет на точность восстановления отдельных элементов, в каждой точке вычислена локальная нормированная ошибка:

$$\Delta_{\text{loc}}(x_i, y_j) = \frac{|g(x_i, y_j) - \hat{g}(x_i, y_j)|}{|g(x_i, y_j)|}. \quad (21)$$

Здесь обозначения те же, что и в формуле (20). На рис. 7 представлены значения  $\Delta_{\text{loc}}$  вдоль прямой  $y = 0$ . Кривая 1, соответствующая рекурсивному фильтру, почти везде проходит ниже кривой 2. Исключение составляют участки, приходящиеся на фон,

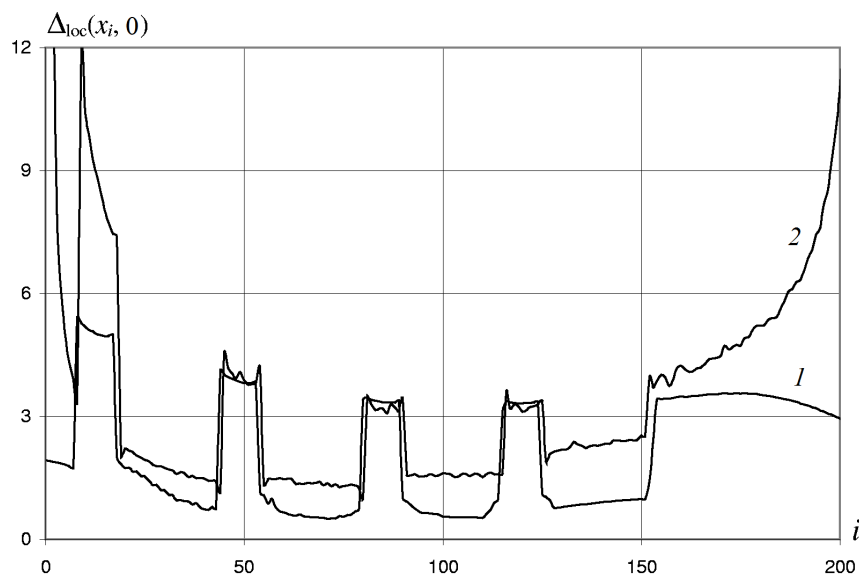


Рис. 7. Локальные ошибки реконструкции вдоль прямой  $y = 0$

где кривые почти совпадают. Отсюда, в частности, следует, что в центральной части области интереса включения с амплитудой выше уровня фона восстанавливаются предлагаемым методом более точно.

Говоря о скорости счета, следует заметить, что алгоритмы, реализующие гапр-фильтрацию, выполняют операцию свертки с ядром, имеющим, вообще говоря, бесконечный носитель. Это требует много больше компьютерного времени, чем вычисление по формуле (6) с небольшим числом членов (в данной работе оно равняется трем). В проведенном эксперименте набор из трехсот шестидесяти одномерных проекций с разрешением 4097 отсчетов полностью обрабатывался рекурсивным фильтром за 1.2 с, а фильтром Шепша — Логана — за 88.4 с, т. е. почти в 74 раза медленнее.

Для сравнения эффективности алгоритмов также определялся показатель  $TE$  — произведение времени расчета изображения в секундах на ошибку  $\Delta_{ROI}$  (трудоемкость). При  $r_0 = 0.2$  получено  $TE_{rec} \approx 723$  и  $TE_{SL} \approx 6675$ . Обратим внимание на то, что отношение  $TE_{SL}/TE_{rec} \approx 9.2$ . Это много меньше, чем 74. Объяснение состоит в следующем. Помимо фильтрации проекций реконструкция включает также суммирование по углам, называемое обратным проецированием (см. формулу (2)). Последнее является весьма затратным по времени. Для разработанной компьютерной программы при указанном выше разрешении оно выполнялось около 1035 с, что приблизительно в 11.7 раза дольше, чем фильтрация Шепша — Логана. Таким образом, основное время расчета приходится на процедуру обратного проецирования, которая одинакова для обоих методов.

## Заключение

Предложен новый метод восстановления изображения области интереса по усеченным проекциям. В его основе лежит применение цифровой рекурсивной фильтрации имеющихся данных вместо гапр-фильтрации. Сформулированы условия, по которым были определены коэффициенты рекурсивного фильтра первого порядка. При помощи аппарата  $Z$ -преобразования построены его частотная и импульсная характеристики. Последняя оказалась более узкой, чем имеющиеся у аппроксимаций гапр-фильтра.

Проведенное моделирование показало существенное уменьшение среднеквадратичной ошибки по сравнению с алгоритмом Шепша — Логана, который является одним из самых распространенных для двумерной томографии. В частности, когда размер области интереса составлял около 15–25% от размера объекта, ошибка была в 15–8.5 раз ниже. Реконструкция по данным, содержащим некоррелированный аддитивный шум, выявила достаточно высокую устойчивость метода. Кроме того, скорость выполнения рекурсивной фильтрации оказалась намного выше. Например, время, затраченное на обработку 360 проекций с разрешением 4097 отсчетов, для нее в 74 раза ниже, чем для фильтрации Шепша — Логана.

## Список литературы / References

- [1] **Sahine, B., Yagle, A.E.** Region-of-interest tomography using exponential radial sampling // IEEE Trans. Image Process. 1995. Vol. 4, No. 8. P. 1120–1127.
- [2] **Sourbelle, K., Lauritsch, G., Tam, K.C., Noo, F., Kalender, W.A.** Performance evaluation of local ROI algorithms for exact ROI reconstruction in spiral cone-beam computed tomography // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2001. Vol. 48, No. 3, pt II. P. 697–702.

- [3] **Lauritsch, G., Sourbelle, K., Tam, K.C.** Optimization of derivative kernels for exact cone-beam ROI reconstruction in spiral computed tomography // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2002. Vol. 49, No. 3, pt I. P. 728–732.
- [4] **Das, P.C., Sastry, Ch.S.** Region-of-interest tomography using a composite Fourier-wavelet algorithm // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2002. Vol. 23, No. 7-8. P. 757–777.
- [5] **Zeng, G.L., Gagnon, D., Natterer, F., Wenli, W., Wrinkler, M., Hawkins, W.** Local tomography property of residual minimization reconstruction with planar integral data // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2003. Vol. 50, No. 5. P. 1590–1594.
- [6] **Лихачев А.В.** ROI-томография по данным, содержащим шум с переменной дисперсией // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 62–75.  
**Likhachov, A.V.** ROI-tomography from the data distorted with variable dispersion noise // Comput. Technologies. 2014. Vol. 19, No. 2. P. 62–75. (In Russ.)
- [7] **Лихачев А.В.** Применение условия Кавальери в задаче ROI-томографии // Автометрия. 2015. Т. 51, № 4. С. 53–61.  
**Likhachov, A.V.** Use of the Cavalieri conditions in region-of-interest tomography // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2015. Vol. 51, No. 4. P. 364–371.
- [8] **Хермен Г.Т.** Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 349 с.  
**Herman, G.T.** Image reconstruction from projections: The fundamentals of computerized tomography. New York: Academic Press, 1980. 316 p.
- [9] **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 288 с.  
**Natterer, F.** The mathematics of computerized tomography. Stuttgart: Wiley, 1986. 222 p.
- [10] **Shepp, L.A., Logan, B.F.** The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. Vol. 21, No. 3. P. 21–43.
- [11] **Lewitt, R.M.** Reconstruction algorithms: transform methods // Proc. IEEE. 1983. Vol. 71, No. 3. P. 390–408.
- [12] **Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е.** Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: НГУ, 1999. 172 с.  
**Lavrent'ev, M.M., Zerkal, S.M., Trofimov, O.E.** Computer modelling in tomography and ill-posed problems. Utrecht: VSP, 2001. 129 p.
- [13] **Лихачев А.В.** Исследование  $1/z^2$  фильтрации в алгоритмах томографии // Автометрия. 2007. Т. 43, № 3. С. 57–64.  
**Likhachov, A.V.** Investigation of  $1/z^2$  filtration in tomography algorithms // Avtometriya. 2007. Vol. 43, No. 3. P. 57–64. (In Russ.)
- [14] **Лихачев А.В.** Алгоритм двойной фильтрации для двумерной томографии // Матем. моделирование. 2009. Т. 21, № 8. С. 21–29.  
**Likhachov, A.V.** Double-filtration algorithm for two-dimensional tomography // Mathematical Models and Computer Simulations. 2010. Vol. 2, No. 2. P. 172–179.
- [15] **Хемминг Р.В.** Цифровые фильтры: Пер. с англ. М.: Советское радио, 1980. 224 с.  
**Hamming, R.W.** Digital Filters. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. 197 p.

*Поступила в редакцию 24 августа 2016 г.,  
с доработки — 5 декабря 2016 г.*

## Investigation of projection data recursive filtration for ROI-tomography problem

ЛИХАЧОВ, ALEXEY V.

Institute of Automation and Electrometry of the SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

Corresponding author: Likhachov, Alexey V., e-mail: ipm1@iae.nsk.su

**Purpose.** The purpose of this paper is to improve the quality of images reconstructed from truncated data for ROI-tomography.

**Methodology.** The proposed approach is to apply a new method of filtering-dimensional projections, based on the imaging area of interest. The opportunity of replacing the ramp-filter digital recursive filter of the first order is investigated. Its frequency response is calculated on the basis of the Z-transform. Each truncated projection is presented as the production of full projection and the rectangular pulse of corresponding width. Its Fourier-image is determined according to the convolution theorem. The algorithm for the estimation of the digital filter coefficients is developed from the equality of frequency characteristics at certain points. The algorithm accounts the size of the area of the interest. The filter properties are studied by means of computational experiments.

**Findings.** The impulse response of the recursive filter was found to be much narrower compared to that of a well-known approximation of the ramp-filter proposed by Shepp and Logan. It therefore provides less influence of unknown projections areas on the resulting image. Normalized root mean square error of reconstruction for it is 40–70%. At the same time for the Shepp-Logan algorithm it reaches some hundreds percent when the size of the area of interest is small. The use of model data, containing additive Gaussian white noise, shows a high stability of the method.

**Originality.** New adoptive algorithm for ROI-tomography is developed. The greatest effect from its usage is obtained when the area of interest is small relative to the investigated object. Under these conditions, the algorithm may significantly improve the reconstruction quality compared with standard tomographic algorithms.

*Keywords:* two-dimensional tomography, region of interest, digital recursive filtering of projections.

*Received 24 August 2016*

*Received in revised form 5 December 2016*