# КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ВИДЕ СКЛЕЙКИ

А. А. Борубаев, П. С. Панков
*Кыргызский государственный национальный университет*
*Институт математики Национальной академии наук*
*Бишкек, Кыргызстан*
e-mail: pps@kaf-i.kg

Individual algorithms for non-Euclidean spaces obtained by cohesion of similar squares or cubes are suggested based on the definition of the kinematic PC display image of the connected metric space $G$ earlier presented by the authors according to which continuous transition in $G$ is possible from the display image of any $x \in G$ to the display of any other $y \in G$, and the minimum time of this transition is proportional to the distance $d(x, y)$).

## Введение

Развитие компьютерной техники поставило вопрос о представлении с ее помощью всех известных математических объектов как в теоретических, так и в прикладных целях.

Одним из первых приложений компьютеров явилось использование многомерных пространств для решения прикладных, в особенности оптимизационных задач и уравнений математической физики. С появлением сначала графопостроителей, а затем дисплеев, на которых стало возможным представлять не только тексты, но и изображения, на основе начертательной геометрии возникла компьютерная графика — изображение трехмерных объектов на плоскости (с учетом перекрытия, теней, перспективы и т. д.).

Далее мы будем рассматривать представление пространств, отличных от трехмерного евклидова, в теоретических целях.

Насколько известно, впервые алгоритмический метод представления метрических пространств предложен в [9]. В работе [4] было показано, что такое представление дает возможность доказательства теорем в различных разделах математики. В [10] введено понятие “представление внешним интервалом”, развитое в последующих работах до общего понятия представления непрерывных математических объектов интервальными, которые могут быть непосредственно отображены в компьютере.

В монографии [7] поставлен вопрос о решении задач в четырехмерном пространстве с помощью компьютера, но не указано конкретное представление, в [2] описаны некоторые алгебраические алгоритмы.

На основе [15] построены программы, осуществляющие “естественное” движение в локально евклидовых пространствах, таких как топологический тор, бутылка Клейна, в [5, 3] — движение в некоторых неевклидовых пространствах с сингулярностями (римановы поверхности функций: $\sqrt{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\sqrt{z^2-a^2}$, внешность окружности с отождествленными диаметрально противоположными точками окружности. Для наглядности также использованы методы трехмерной графики). В [6] предложено использовать движение по римановым поверхностям при помощи решения дифференциальных уравнений.

Кроме того, в других программных средствах [11–14] возможности компьютеров в описываемом аспекте не использованы полностью: применяются те же приемы, что и в [8], — изображение двумерных топологических пространств в виде поверхностей с самопересечениями в трехмерном евклидовом пространстве.

С учетом опыта выполнения проекта [3] и работы по проекту "Компьютерное представление многомерных пространств" в [1] введены следующие определения. Пусть заданы абстрактное множество $G$ и прямоугольник $D$ с обычной евклидовой метрикой (экран дисплея). Для простоты ограничимся двуцветным (черно-белым) изображением и введем множество $2^D$ всевозможных подмножеств $D$. Обозначим через $J \subset 2^D$ некоторое множество, которое будем называть множеством изображений (черным цветом на белом прямоугольнике $D$). (От реального экрана прямоугольник $D$ отличается тем, что он непрерывен, но современные дисплеи с большой разрешающей способностью также создают ощущение непрерывности.) Будем рассматривать функцию $F : G \to 2^J$ (которая каждому элементу множества $G$ ставит в соответствие множество возможных изображений этого элемента) и ("обратную" к ней) функцию $H : J \to G$ (которая каждому изображению ставит в соответствие элемент множества $G$).

**Примечание 1.** Мы ввели определение "множества возможных изображений", а не одного "изображения", потому что, например, для трехмерных локально евклидовых пространств осмотреть всю окрестность какой-либо точки можно, только поворачивая "видеокамеру" в разные стороны, но каждое из изображений на "видеокамере" дает возможность идентифицировать "точку съемки".

Ниже будем считать, что $J$ содержит только замкнутые множества, и введем в нем хаусдорфову метрику (которая больше всего соответствует интуитивному представлению "близости" изображений).

Пусть в $G$ задана структура топологического пространства (тогда его элементы будем называть точками).

**Определение 1**. Если функции $F$ и $H$ непрерывны, то пара $(F, H)$ называется непрерывным (экранным) представлением топологического пространства $G$ (слово "экранный" далее будем опускать).

**Определение 2.** Если также для любой $g \in G$ в элементах множества $F(g)$ содержатся изображения всех точек некоторой окрестности $g$, но не содержатся изображения точек внешности некоторой другой (более широкой) окрестности, то пара функций $(F, H)$ называется естественным представлением топологического пространства $G$.

Для изображения движения и использования геометрической интуиции человека в [1] было также введено

**Определение 3.** Кинематическим изображением связного метрического пространства на компьютере будем называть программу, удовлетворяющую следующим требованиям:

а) осуществимость перехода от изображения любой точки к изображению любой другой точки;

б) минимальное время для замены одного изображения другим пропорционально расстоянию между соответствующими точками;

в) все изображения на дисплее соответствуют некоторым точкам пространства и изменяются непрерывно (по хаусдорфовой метрике).

Представления [15, 5] удовлетворяют всем этим определениям, представления [8, 11–14] — только определению 1.

Здесь описывается построение таких пространств с использованием стандартных приемов комбинаторной топологии (см., например, [2]). Цель настоящей статьи — разработка специфических, основанных на данных определениях, алгоритмов определения видимой части пространства. Предлагаются два основных приема — "визуальный разрез" и "изменение изображения при полном повороте".

# 1. Описание склеивания

Опишем один из способов математического описания и методики программирования, удовлетворяющих определениям 1–3, для широких классов двумерных пространств — склеивание их из одинаковых квадратов с сохранением ориентации и без поворотов (для простоты не будем рассматривать склеивание с изменением ориентации, что требуется, например, для листа Мебиуса). Пусть длина стороны квадрата равна 1.

**Примечание 2.** Мы выбрали представление пространства в виде набора квадратов (а не треугольников, как это обычно делается), потому что при помощи квадратов значительно легче вычислять декартовы координаты видимых точек по отношению к точке зрения. Само же изображение можно построить по заданным координатам точек с использованием всех приемов и алгоритмов трехмерной графики, чего мы в данной статье не касаемся.

Обозначим через $N$ количество квадратов, $\{R, U, L, D\}$ — соответственно правая, верхняя, левая и нижняя стороны квадрата, $-R = L$, $-L = R$, $-U = D$, $-D = U$. Запись $(p, S, q)$ означает, что $S$-сторона $p$-квадрата склеена с "противоположной" $(-S)$-стороной $q$-квадрата, где $p, q \in 1, \ldots, N$, $p < q$, $S \in R, U, L, D$. Набор записей вида $(p_k, S_k, q_k)$, $k = 1, \ldots, K$, определяет пространство. Также предполагаем, что пространство связно: сокращенный набор чисел $(p_k, q_k)$, $k = 1, \ldots, K$ задает связный граф.

Положение точки в пространстве будет определяться тремя числами: $(n, x, y)$, где $n$ — номер квадрата, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ — координаты точки в квадрате (точки на границах квадратов могут задаваться различными наборами; в разделе 2 эта неоднозначность устранена).

**Пример 1.** $N = 2$, $K = 2$. Записи $(1, R, 2)$; $(1, L, 2)$ задают цилиндрическую поверхность (вкладывается изометрично в трехмерное евклидово пространство).

**Пример 2**. $N = 4$, $K = 8$. Записи

$$(1, R, 2);\ (1, D, 3);\ (2, D, 4);\ (3, R, 4)$$

задают квадрат размером $2 \times 2$, дополнительные записи

$$(1, L, 2);\ (3, L, 4);\ (1, U, 3);\ (2, U, 4)$$

превращают его в топологический тор (вкладывается гомеоморфно, но не изометрично в трехмерное евклидово пространство).

**Пример 3**. $N = 12$, $K = 14$. Записи

$$(1,R,2);\ (2,U,3);\ (3,L,4);\ (4,L,5);\ (5,D,6);\ (6,R,1);\ (7,R,8);\ (8,U,9);$$
$$(9,L,10);\ (10,L,11);\ (11,D,12);\ (12,R,7);\ (1,U,10);\ (4,D,7)$$

определяют два прямоугольника размером $3 \times 2$, склеенные через центральные прорези (между 1-м и 4-м и соответственно между 7-м и 10-м квадратами). Данное пространство является средней частью римановой поверхности функции $\sqrt{(z-i)(z-(1+i))}$ (не вкладывается гомеоморфно в трехмерное евклидово пространство).

**Пример 4.** $N > 2$, $K = N - 1$. Записи $(1,R,2), ..., (1,R,N)$ задают “открытую книгу” (вкладывается изометрично в трехмерное евклидово пространство).

Для удобства в дальнейшем будем рассматривать расширенный вдвое список: к каждой записи вида $(p,S,q)$ добавим запись $(q,-S,p)$.

## 2. Описание движения в пространстве без кратных склеек

На основе опыта разработки компьютерных игр способы изображения движения можно классифицировать по изображению пространства: либо оно в целом неподвижно (“абсолютное изображение пространства”), а “основное изображение” элемента пространства имеется на экране непосредственно в виде курсора (этот способ более прост для программирования, но применим только для ограниченного участка пространства); либо сам изображаемый элемент не показывается явно, а определяется именно дополнительными изображениями других элементов (“относительное изображение пространства”). Кроме того, эти способы можно классифицировать по заданию направления движения: либо абсолютное (задается по отношению к осям координат — реперу пространства), либо относительное (задается по отношению к направлению движения на предыдущем шаге).

В этом и следующем разделах будем использовать относительное изображение пространства и абсолютное задание направления движения и предполагать, что в пространстве нет кратных склеек, а два квадрата могут иметь только одну склейку: в расширенном списке для любых $p, S, q$ записи видов $(p, S, ...)$ и $(p, ..., q)$ встречаются не более одного раза. Тогда для движения в пространстве достаточен набор команд $R, U, L, D$. Введем соответствующие векторы $V_R := (1,0)$; $V_U := (0,1)$; $V_L := (-1,0)$; $V_D := (0,-1)$. Пусть $h$ — малое положительное число (шаг), такое, что $1/h$ — целое число. В качестве начальной точки выберем точку $(1, h/2, h/2)$ около левого нижнего угла первого квадрата. Получаем следующий

**Алгоритм 1.** а) Полагаем $n := 1$; $x := h/2$; $y := h/2$.

б) Определяем часть пространства, видимую из точки $(n, x, y)$, и координаты ее точек по отношению к этой части (см. ниже п. 3) и используем это для построения изображения на экране дисплея (что в данной статье не рассматривается).

в) Вводим команду $M$.

г) Вычисляем $(x_1, y_1) := (x, y) + h * V_M$.

д) Если $0 < x_1 < 1$, $0 < y_1 < 1$ (равенства невозможны), то полагаем $(x, y) := (x_1, y_1)$ и переходим к п. б), иначе

е) Если в (расширенном) списке есть запись вида $(n, M, m)$, то полагаем $n := m$ и вычисляем $(x, y) := (x_1, y_1) - V_M$, иначе выводим сообщение *“Такое движение невозможно — край!”*

ж) Переходим к п. б).

# 3. Построение видимой части пространства без кратных склеек

Введем число $H \in (1/2, 1)$ — расстояние до "горизонта". Для удобства будем считать, что каждый квадрат имеет свой цвет $c_n, n = 1, \ldots, N$ (отличный от черного и от цветов других квадратов) и что точка зрения помещена в начало координат. Тогда п. б) алгоритма 1 можно выполнить следующим образом.

**Алгоритм 2.** По заданным $(n, x, y)$

б1) Закрашиваем всю плоскость черным цветом.

б2) Закрашиваем квадрат (обозначим его $Q$) с вершинами (их удобно обозначать двумя буквами) $LD := (-x, -y)$, $RD := (1-x, -y)$, $RU := (1-x, 1-y)$, $LU := (-x, 1-y)$ цветом $c_n$.

б3) Для каждой записи вида $(p, S, q)$ в списке закрашиваем квадрат $(Q + V_S)$ цветом $c_q$.

б4) Рассматриваем поочередно квадраты, являющиеся угловыми к $Q$. Например, для вершины $LD$ получаем: если есть точно две записи $((p, L, q)$ и $(q, D, t))$ или $((p, D, q)$ и $(q, L, t))$, то закрашиваем нижний левый квадрат $(Q + V_D + V_L)$ цветом $c_t$; если есть все четыре записи $(p, L, q)$, $(q, D, t)$, $(p, D, u)$, $(u, L, v)$, то закрашиваем точки квадрата $(Q + V_D + V_L)$, лежащие выше прямой, проходящей через точки $O$ и $LD$, цветом $c_t$, а точки этого квадрата, лежащие выше прямой, — цветом $c_v$. (Таким образом, при $t = v$ весь этот квадрат закрашивается одним цветом; при $t \neq v$ на языке римановых поверхностей точка $LD$ является точкой ветвления.) Аналогично рассматриваем и, возможно, закрашиваем три других квадрата: за вершинами $RD, RU, LU$.

б5) Закрашиваем всю плоскость вне окружности радиуса $H$ с центром в начале координат черным цветом. Часть плоскости, окрашенная цветами, отличными от черного, соответствует видимой части пространства.

**Примечание 3.** Лучи, начинающиеся от вершин, фактически изображенных после выполнения п. б5), в направлениях "от начала координат", можно назвать "визуальными разрезами".

# 4. Описание движения и изображения в пространстве с кратными склейками

Если в наборе записей, определяющих пространство, есть кратные склейки, то в алгоритме 1, п. е) нужно делать выбор: на какую область (в данном случае квадрат) переходить.

Простейший способ — это сделать запрос: *"Какой из номеров $m_j$, входящих в записи $(n, S, m_1), ..., (n, S, m_J)$, вы выбираете?"*, но более естественным является автоматический выбор той из смежных областей, изображение которой имеется в данный момент на экране. Чтобы подчеркнуть особенности такого изображения, рассмотрим пространство, склеенное из кубов, т. е. заведомо не вкладывающееся в трехмерное евклидово. В отличие от разделов 1 и 2 рассмотрим только одно пространство. Итак, пусть даны $N > 2$ кубов $C_n(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$, $n = 1, \ldots, N$, склеенных по левой грани — квадрату $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Положение точки в пространстве будет определяться четырьмя числами: $(n, x, y, z)$, где $n$ — номер куба. Будем использовать относительное изображение пространства, относительное задание направления движения в горизонтальной плоскости и абсолютное по вертикали.

Обозначим через $-C_n$ зеркальное отражение куба $C_n$ относительно плоскости $x = 0$. Основным в алгоритме является тот факт, что после полного поворота в одном из кубов становится видимым и доступным для перехода уже другой приклеенный к нему куб. Введем малые положительные числа: $h$ — шаг по движению и $\delta$ — шаг по повороту. В качестве начальной выберем точку $(1, 1/2, 1/2, 1/2)$ в центре первого куба и в качестве начального направления движения $\alpha := \pi$. (По умолчанию углы будем отсчитывать от положительного направления оси $Ox$.) Для определенности положим угол обзора в горизонтальной плоскости равным $\pi/2$, то есть $\pm\pi/4$ от направления $\alpha$. Тогда для движения в пространстве достаточен набор команд: $R$ — поворот направо на угол $\delta(\alpha := \alpha - \delta)$; $L$ — поворот налево на угол $\delta(\alpha := \alpha + \delta)$; $F$ — движение вперед в горизонтальной плоскости в направлении $\alpha$ на $h(x := x + h * \cos(\alpha);\ y := y + h * \sin(\alpha))$; $U$ — движение вверх на $h(z := z + h)$; $D$ — движение вниз на $h(z := z - h)$. Соответствующий алгоритм изложим кратко.

**Алгоритм 3.** а) Полагаем $x := 1/2$; $y := 1/2$; $z := 1/2$; $s := (+)$; номер правого куба $n(s) := 1$; направление движения и обзора — влево: $\alpha := \pi$; номер левого (видимого в начальный момент другого) куба $n(-s) := 2$.

б) Если в плоскости $Oxy$ хотя бы один из лучей, выходящих из точки $(x, y)$ под углами $\alpha \pm \pi/4$, пересекает отрезок $x = 0$, $0 \le y \le 1$, то другой куб виден: полагаем $Viznew := true$, иначе — не виден: полагаем $Viznew := false$.

в) Видимой частью пространства является пересечение куба $C_{n(s)}$ (при $Viznew := false$) или объединения кубов $C_{n(+)}$ и $(-C_{n(-)})$ (при $Viznew := true$) с внутренней частью прямого двугранного угла, ребро которого вертикально и проходит через точку $(x, y, 0)$, а проекция плоскости биссектрисы на плоскость $Oxy$ проходит под углом $\alpha$.

г) Полагаем $Viz := Viznew$. Вводим команду $M$ и производим соответствующее действие. Если при командах $F, U, D$ нарушается одно из условий $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, то выводим сообщение *“Такое движение невозможно — край!”*, отменяем последнее движение (возвращаем исходные значения координат) и переходим опять к началу пункта.

д) Аналогично п. б) находим $Viz := Viznew$ для новых значений координат.

е) Если после выполнения команды $F$ координата $x$ изменила знак, то запоминаем, что после перехода в другой куб исходный куб повторно еще не был виден: $Repviz := false$; полагаем $s := -s$.

ж) Если до выполнения поворотов $R$ или $L$ другой куб не был виден, а после выполнения стал виден ($Viz := false\, and\, Viznew = true$), то

если $Repviz = false$, то полагаем

$$\phi := (\quad \alpha \qquad 2k * \pi + \pi/2 + s * \pi/2, \quad k - );$$

$Repviz := true$ и переходим к п. б), иначе

з) ($Repviz = true$) Вычисляем

$$t := (\qquad (\alpha - \phi)/(2\pi)).$$

Вычисляем новый номер $n(-s)$ другого куба среди номеров $1, \ldots, N$ за исключением номера $n(s)$ куба, в котором мы находимся: $n(-s) := (n(-s) + t - 1) \bmod N + 1$; если $n(-s) = n(s)$, то полагаем $n(-s) := (n(-s) \bmod N) + 1$. Переходим к п. б).

**Примечание 4.** Для того, чтобы построение алгоритма 3 соответствовало п. б) определения 3, надо пренебречь временем поворота по сравнению с временем движения.

## 5. Заключение

Мы надеемся, что исследование пространств, представимых в кинематической форме, будет способствовать развитию топологии и популяризации ее достижений, а соответствующее программное обеспечение явится дополнительным инструментом для исследователей в области комбинаторной топологии и теории функций комплексного переменного и поможет студентам и аспирантам в изучении этих предметов. Отметим, что необычные топологические структуры и соответствующие действия можно найти в различных современных программных средствах. Нашей же задачей был поиск адекватного и наглядного компьютерного представления для построений теоретической комбинаторной топологии.

## Список литературы

[1] Борубаев А. А., Панков П. С. Классификация компьютерных представлений топологических пространств. *Вестник Кыргызского государственного педагогического университета. Сер. Матем. Физика. Информатика.* №1, 1998, 99–103.

[2] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* Наука, М., 1991.

[3] Компьютерное представление топологических объектов: *Отчет о НИР*. Научн. руков. П. С. Панков. Департамент по науке и новым технологиям Министерства образования, науки и культуры КР. Бишкек, 1997.

[4] Панков П. С. *Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах.* Илим, Фрунзе, 1978.

[5] Панков П. С., Баячорова Б. Ж. Применение компьютеров для представления неевклидовых топологических пространств. *Материалы 6 Междунар. конф. по компьютерной графике и визуализации,* С.-Петербург, **2**, 1996, 232–233.

[6] Панков П. С., Баячорова Б. Ж. Программное обеспечение для управления решением дифференциальных уравнений на римановых поверхностях. *IV Республ. конф. "Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики"*. Бишкек, часть I, 1996, 39–41.

[7] Улам С. *Нерешенные математические задачи.* Наука, М., 1964.

[8] Франсис Дж. *Книжка с картинками по топологии.* Мир, М., 1991.

[9] Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные метрические пространства. *Тр. МИАН им. В. А. Стеклова,* **67**, 1962, 15–294.

[10] Шокин Ю. И. *Интервальный анализ.* Наука, Новосибирск, 1981.

[11] Cox D., Francis G., Idaszak R. *Computer program "Venus"*. University of Illinois and NCSA, 1997.

[12] *MATLAB® Version 4.0 and SIMULINK™ Version 1.2c for MicrosoftWindows*, The MathWorks, Inc.

[13] *Mathematica 3.0 Graphics Gallery. 3D Graphics. Riemann Surface*, 1 & 2, Wolfram Research.

[14] Trott M. Visualization of Riemann surfaces of algebraic functions. *Mathematics in Education and Research,* TELOS, **6**, No. 4. 1997, 15–36.

[15] Weeks J. R. *The Shape of Space.* Marsel Dekker, Inc., New York, 1985.

*Поступила в редакцию 13 мая 1998 г.,*
*в переработанном виде 18 сентября 1998 г.*