

## Алгоритмы численного моделирования оптических линий связи на основе многомодовых волокон

М. П. ФЕДУК<sup>1,2</sup>, О. С. СИДЕЛЬНИКОВ<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

\*Контактный e-mail: o.s.sidelnikov@gmail.com

Приведены уравнения распространения оптических сигналов в многомодовом волокне со случайным двойным лучепреломлением в режимах сильной и слабой связи мод. Рассмотрены основные численные методы решения данных уравнений. Представлены некоторые результаты численного моделирования многомодовых волоконно-оптических линий связи с использованием описанных уравнений.

*Ключевые слова:* нелинейное уравнение Шрёдингера, метод расщепления по физическим процессам, компактная разностная схема, нелинейная волоконная оптика, волоконно-оптическая линия связи, многомодовое волокно.

### Введение

В настоящее время все более широко используются волоконно-оптические линии связи (ВОЛС) — вид связи, при котором информация передается посредством импульсов света через оптические волокна. Сегодня более 99 % глобальных информационных потоков обеспечивается технологиями волоконно-оптической связи. Оптическое волокно на данный момент считается самой совершенной физической средой для передачи информации, а также самой перспективной для передачи больших потоков информации на значительные расстояния. Экспоненциально растущий спрос на пропускную способность линий связи является движущей силой для проведения исследований по созданию мощных оптических систем передачи данных.

Волоконно-оптические системы связи претерпели значительные улучшения в скорости передачи данных, протяженности и функциональности с момента их появления в 1960-х годах [1]. Нынешний рекорд скорости передачи данных 101.7 Тбит/с был достигнут с помощью когерентного детектирования, автономной обработки и использования формата модуляции 128-QAM [2]. Соотношение сигнал — шум в данном случае в сочетании с оптической нелинейностью волокна сделали возможной передачу только на три пролета длиной 55 км. Что же касается передачи на большие расстояния, недавние эксперименты показали, что при использовании волокна с низким уровнем нелинейности и современной цифровой обработки сигналов данные могут быть переданы на более чем 12 000 км со скоростью 400 Гбит/с с частотным разнесением каналов 100 ГГц [3].

В современных ВОЛС, основанных на одномодовых волокнах, используются все имеющиеся степени свободы — время, частота, фаза и поляризация, которые могут быть применены для модуляции и мультиплексирования. Однако дальнейшее увеличение скорости передачи данных в одномодовом волокне затруднено ввиду ограничений пропускной способности волоконных усилителей и высоких требований к отношению сигнал/шум.

Количество передаваемой в год информации уже давно превзошло один зеттабайт ( $2^{70}$  байт) и продолжает расти более чем на 40 % в год [4]. Ежегодное увеличение трафика уже превышает рост пропускной способности линий связи, и, если не будет предложена новая технология, которая позволит значительно увеличить пропускную способность, в ближайшие годы мы можем столкнуться с проблемой превышения объемов трафика возможностей технологий передачи данных. Сегодня развитие систем связи с использованием пространственного разделения каналов [5] рассматривается в качестве перспективного технологического пути для увеличения пропускной способности оптических сетей за счет одновременной передачи сигналов в разных модах или ядрах волокна. Такие системы могут быть основаны на маломодовых волокнах (FMMF), многомодовых волокнах (MMF), многоядерных волокнах (MCF) с различным количеством ядер, гибридах MCF и MMF и волокнах с полым ядром (Hollow-Core Fiber — HCF).

В настоящее время использование ВОЛС на основе многомодовых волокон рассматривается в качестве перспективного направления для увеличения пропускной способности линий связи [6, 7]. Многомодовые волокна имеют одно ядро достаточно большого диаметра для поддержки более чем одной пространственной моды. Количество пространственных мод, поддерживаемых MMF, быстро растет с увеличением диаметра ядра и может исчисляться сотнями. К преимуществам многомодовых волокон можно отнести:

- удобство при монтаже, поскольку в таких волокнах сердцевина световода в несколько раз больше, чем в одномодовых волокнах;
- многомодовый кабель проще оконцевать оптическими разъемами с малыми потерями (до 0.3 дБ) в стыке;
- на многомодовое волокно рассчитаны излучатели с длиной волны 0.85 мкм — самые доступные и дешевые, выпускаемые в очень широком ассортименте.

С помощью спектрального уплотнения каналов (WDM), уплотнения по времени (TDM), уплотнения по поляризации (PDM), прямой коррекции ошибок (FEC) в многомодовом волокне были достигнуты скорости передачи данных от 100 Тбит/с до 1 Пбит/с [8–10]. С помощью технологии Multiple Input Multiple Output (MIMO) в многомодовых волокнах стала доступна передача с высокой скоростью на большие расстояния. Также на основе многомодовых волокон создаются высокоэффективные мощные волоконные рамановские лазеры [11]. Многомодовые волокна нашли широкое применение в биомедицине — на их основе делаются биосенсоры [12], в оптике они используются при изготовлении интерферометров [13]. Многомодовые волокна уже повсеместно внедряются в локальные сети, заменяя собой одномодовые [14].

Настоящая работа посвящена алгоритмам численного моделирования ВОЛС на основе многомодовых волокон. Приведены основные уравнения, описывающие нелинейное распространение оптических сигналов в многомодовых волокнах. Рассмотрены различные численные алгоритмы, применяющиеся для решения данных уравнений, а также приводятся результаты некоторых численных экспериментов с использованием описанных алгоритмов.

## 1. Нелинейное распространение оптических сигналов в многомодовых волокнах

Электрическое поле в многомодовом волокне можно записать как сумму по  $M$  различным пространственным модам в частотной области [15]:

$$\tilde{E}(x, y, z, \omega) = \sum_m^M e^{i\beta_m(\omega)z} \tilde{\mathbf{A}}_m(z, \omega) F_m(x, y) / \sqrt{(N_m)},$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}_m(z, \omega) = [\tilde{A}_{mx}(z, \omega), \tilde{A}_{my}(z, \omega)]^T$  — фурье-образ огибающей поля во временной области  $m$ -й моды, включающий амплитуды обеих компонент поляризации пространственной моды  $m$  с пространственным распределением  $F_m(x, y)$  и постоянной распространения  $\beta_m(\omega)$ , выраженной в виде диагональной матрицы для учета двойного лучепреломления, т. е.  $\beta_m = \text{diag}[\beta_{mx}, \beta_{my}]$ . Константа нормализации  $N_m$  может быть выражена как  $N_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{n}_{eff} c I_m$ , где  $I_m = \bar{n}_m / \bar{n}_{eff} \iint F_m^2(x, y) dx dy$ ;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\bar{n}_{eff}$  — эффективный показатель преломления фундаментальной моды и  $\bar{n}_m$  — эффективный показатель преломления  $m$ -й моды.

Выделяют два важных режима распространения сигналов в многомодовых волокнах, представляющих практический интерес, — слабой и сильной связи. В первом случае линейная связь между различными пространственными модами слаба по сравнению со связью между двумя поляризационными компонентами одной пространственной моды. В режиме сильной связи оба типа связи — одного порядка. На практике некоторые пространственные моды многомодового волокна могут быть слабо связаны, в то время как другие — более сильно. В работе рассматривается нелинейная модель распространения оптических сигналов, так как нелинейные эффекты являются основным ограничением в волоконно-оптических системах связи. Уравнение нелинейного распространения сигналов в многомодовом волноводе имеет следующий вид [15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial z} = & i(\beta_{0p} - \beta_r) \mathbf{A}_p - \left( \beta_{1p} - \frac{1}{v_{gr}} \right) \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial t} - i \frac{\beta_{2p}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_p}{\partial t^2} + \\ & + i \sum_{lmn} f_{lmnp} \frac{\gamma}{3} [(\mathbf{A}_l^T \mathbf{A}_m) \mathbf{A}_n^* + 2(\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_m) \mathbf{A}_n] + i \sum_m q_{mp} \mathbf{A}_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A_p(z, t)$  — медленно меняющаяся огибающая во временной области  $p$ -й моды, выраженная в системе координат, движущейся со скоростью  $v_{gr}$ ;  $\beta_r$  — средняя постоянная распространения всех пространственных мод  $\beta_{0p}$ ,  $\beta_{1p}$ ,  $\beta_{2p}$  — постоянная распространения, обратная групповая скорость и дисперсия групповой скорости  $p$ -й пространственной моды соответственно (предполагается, что поляризационные компоненты пространственной моды имеют различные групповые скорости, но равные GVD);  $\gamma = \omega_0 n_2 / (c A_{eff})$  — нелинейный параметр, где  $n_2$  — нелинейный показатель преломления и  $A_{eff}$  — эффективная площадь фундаментальной моды на центральной частоте  $\omega_0$ ;  $q_{mp}$  и  $f_{lmnp}$  — коэффициенты линейной и нелинейной связи между пространственными модами, которые имеют вид

$$q_{mp}(z) = \frac{k_0}{2n_{eff}(I_m I_p)^{1/2}} \iint \Delta n^2(x, y, z) F_m F_p dx dy,$$

$$f_{lmnp} = \frac{A_{eff}}{(I_l I_m I_n I_p)^{1/2}} \iint F_l F_m F_n F_p dx dy.$$

Здесь  $\Delta n^2(x, y, z)$  — вариация показателя преломления.

### 1.1. Уравнение распространения со случайной поляризацией

Уравнение (1) предполагает постоянное двойное лучепреломление вдоль всего волокна. Однако на практике направление поляризации на протяжении всего волокна меняется случайно и на коротких масштабах. Это может быть учтено с помощью преобразования

$$\mathbf{A}_p(z) = R_p(z) \bar{\mathbf{A}}_p(z),$$

где  $R_p(z)$  — унитарная матрица размерностью  $2 \times 2$ , т. е. матрица Джонса вида

$$R_p(z) = \begin{bmatrix} r_{11p} & r_{12p} \\ r_{21p} & r_{22p} \end{bmatrix},$$

$$R_p^H R_p = I_2,$$

где  $I_2$  — единичная матрица  $2 \times 2$  и  $r_{ijp}$  — случайные величины.

Использование данного преобразования в (1) приводит к следующему уравнению для  $\mathbf{A}_p$  [15]:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_p}{\partial z} = i\delta\beta_{0p} \bar{\mathbf{A}}_p - \delta\beta_{1p} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_p}{\partial t} - i \frac{\beta_{2p}}{2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}_p}{\partial t^2} + i \sum_{lmn} f_{lmnp} \frac{\gamma}{3} [(\bar{\mathbf{A}}_l^T R_l^T R_m \bar{\mathbf{A}}_m) R_p^H R_n^* \bar{\mathbf{A}}_n^* +$$

$$+ 2(\bar{\mathbf{A}}_l^H R_l^H R_m \bar{\mathbf{A}}_m) R_p^H R_n \bar{\mathbf{A}}_n] + i \sum_m \bar{q}_{mp} \bar{\mathbf{A}}_m, \quad (2)$$

где

$$\delta\beta_{0p} = R_p^H (\beta_{0p} - \beta_r) R_p - i R_p^H \frac{\partial R_p}{\partial z},$$

$$\delta\beta_{1p} = R_p^H (\beta_{1p} - \text{frac}1v_{gr}) R_p,$$

$$\bar{q}_{mp} = q_{mp} R_p^H R_m.$$

Данное уравнение является стохастическим, так как  $R_m(z)$  — случайные матрицы, которые изменяются вдоль всего волокна на масштабе длины, связанном с длиной колебаний двойного лучепреломления. В результате параметры двойного лучепреломления, появляющиеся в этом уравнении, меняются случайным образом. Кроме того, внутри- и межмодовые нелинейные связи, а также линейная связь также становятся случайными.

### 1.2. Уравнение Манакова в режиме слабой связи

Следуя подходу из [15], уравнение распространения (2) можно усреднить по всем возможным реализациям матриц  $R_m(z)$  и получить уравнение Манакова в режиме слабой связи:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_p}{\partial z} + i \langle \delta\beta_{0p} \rangle \bar{\mathbf{A}}_p + \langle \delta\beta_{1p} \rangle \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_p}{\partial t} + i \frac{\beta_{2p}}{2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}_p}{\partial t^2} = \\
 & = i\gamma \left( f_{pppp} \frac{8}{9} |\bar{\mathbf{A}}_p|^2 + \sum_{m \neq p} f_{mmp} \frac{4}{3} |\bar{\mathbf{A}}_m|^2 \right) \bar{\mathbf{A}}_p,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
 \langle \delta\beta_{0p} \rangle &= \frac{1}{2} (\beta_{px} + \beta_{py}) - \beta_g, \\
 \langle \delta\beta_{1p} \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta_{px}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} + \frac{\partial \beta_{py}}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right) - \frac{1}{v_g}.
 \end{aligned}$$

Это уравнение является детерминированным, так как не содержит быстро меняющихся случайных членов. Данное уравнение Манакова, полученное для многомодовых волокон, может быть решено численно намного быстрее, чем (2), однако уравнение (2) может описывать промежуточные режимы распространения сигналов в многомодовых волокнах, находящиеся между режимами сильной и слабой связи.

### 1.3. Уравнение Манакова в режиме сильной связи

В режиме сильной связи, когда линейная связь между различными пространственными модами становится сравнимой со связью, вызванной двойным лучепреломлением, для учета случайной связи между  $M$  пространственными модами с двумя состояниями поляризации в каждой моде нужно использовать случайные унитарные матрицы  $2M \times 2M$ . Перепишем набор из  $M$  уравнений (1) ( $p = 1 \dots M$ ) в векторной форме. Введя вектор  $\mathcal{A} = [A_1^T \dots A_M^T]^T$ , состоящий из  $2M$  огибающих поля, получим

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = i\delta\mathcal{B}_0 \mathcal{A} - \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - i \frac{\mathcal{B}_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} + \iint \frac{i\gamma}{3} [(\mathcal{A} \mathcal{F} \mathcal{A} \mathcal{F}^* \mathcal{A}^* + 2(\mathcal{A}^H \mathcal{F} \mathcal{A}) \mathcal{F} \mathcal{A})] dx dy,$$

где  $\mathcal{F}$  — матрица  $2M \times 2M$ , диагональными элементами которой являются  $M$  диагональных матриц  $2 \times 2$ , таких, что

$$\mathcal{F}_{ij} = F_i F_j I_2, \quad i, j = 1 \dots M;$$

$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  — диагональные матрицы  $2M \times 2M$ , состоящие соответственно из постоянной распространения, обратной групповой скорости и параметра дисперсии каждой пространственной моды.

Следуя подходу из [15], делая замену путем умножения  $\mathcal{A}$  на случайную матрицу  $\mathcal{R}$  и усредняя, получаем следующее уравнение Манакова в режиме сильной связи [15, 16]:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + i \frac{\bar{\beta}_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = i\gamma \kappa |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}, \tag{4}$$

где

$$\kappa = \sum_{k \leq l}^M \frac{32}{2^{\delta_{kl}}} \frac{f_{kkl}}{6M(2M+1)},$$

$1/v = \text{trace}(\mathcal{B}_1)/2M$  — средняя обратная групповая скорость;  $\bar{\beta}_2 = \text{trace}(\mathcal{B}_2)/2M$  — средняя дисперсия групповой скорости.

## 2. Численные алгоритмы

### 2.1. Метод расщепления по физическим процессам

При численном моделировании нелинейного распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах основным является метод расщепления по физическим процессам (Split-Step Fourier Method — SSFM) [15–18]. Чтобы понять принцип метода SSFM, уравнение удобно записать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A,$$

где  $\hat{D}$  — дифференциальный оператор, учитывающий дисперсию;  $\hat{N}$  — нелинейный оператор, который соответствует эффектам нелинейности волокна при распространении импульса [19].

Метод расщепления по физическим процессам основан на предположении, что при распространении оптического поля на малую длину  $h$  дисперсионные и нелинейные эффекты могут действовать независимо, т. е. распространение с  $z$  до  $z + h$  происходит в два шага. На первом шаге действуют только нелинейные эффекты, а  $\hat{D} = 0$ , на втором — только дисперсионные, а  $\hat{N} = 0$ . Математически это можно описать так:

$$A(z + h, T) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N})A(z, T). \quad (5)$$

Действие экспоненциального оператора  $\exp(h\hat{D})$  можно выполнить в фурье-представлении, следуя формуле

$$\exp(h\hat{D})B(z, T) = F_T^{-1} \exp[h\hat{D}(-i\omega)]F_TB(z, T), \quad (6)$$

где  $F_T$  обозначает оператор фурье-преобразования,  $\hat{D}(-i\omega)$  получается из  $\hat{D}$  заменой дифференциального оператора  $\partial/\partial t$  на  $-i\omega$  и  $\omega$  — частота в спектральном представлении. Метод расщепления по физическим процессам имеет первый порядок точности по шагу  $h$ .

Точность данного метода можно улучшить, применив другую процедуру прохождения оптическим импульсом одного шага с  $z$  до  $z + h$ . В данном случае уравнение (5) заменяется уравнением

$$A(z + h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N}(z')dz'\right) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T).$$

Из-за симметричной формы экспоненциального оператора данный метод называется симметричным. Если шаг  $h$  достаточно мал, интеграл можно приближенно записать как  $\exp(h\hat{N})$ , так же, как в уравнении (5). Таким образом, получается симметричный метод расщепления по физическим процессам:

$$A(z + h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, T).$$

Эта схема имеет уже второй порядок точности по шагу  $h$ .

С помощью данного метода можно решать все основные уравнения нелинейного распространения оптических сигналов в многомодовых волокнах (2)–(4). Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) делает решение уравнения (6) относительно быстрым. Именно поэтому метод расщепления по физическим процессам превосходит по скорости счета большую часть конечно-разностных методов. Однако для подавляющего большинства задач математического моделирования многомодовых ВОЛС необходимо использовать порядка  $10^6 - 10^7$  точек по временной переменной, что приводит к большим затратам машинного времени. Решением данной проблемы может оказаться параллельная реализация численного метода, тем не менее хорошо известно, что алгоритмы БПФ обладают низкой эффективностью распараллеливания. В то же время конечно-разностные методы легко допускают параллельную реализацию, хотя и уступают методу расщепления по физическим процессам в точности расчета на фиксированной сетке по временной переменной.

Следует также отметить, что в случае уравнения распространения (2) матрица оператора  $\hat{N}$  недиагональна, что значительно замедляет расчеты методом расщепления по физическим процессам из-за вычислений на каждом шаге матричной экспоненты, которая в общем случае имеет большую размерность.

## 2.2. Компактная схема повышенного порядка точности для нелинейного уравнения Шрёдингера

Можно заметить, что с помощью замены временной переменной  $T = t - \frac{1}{v}z$  систему уравнений (4) можно свести к системе, состоящей из нелинейных уравнений Шрёдингера следующего вида:

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + i\frac{\bar{\beta}_2}{2} \frac{\partial^2 A_j}{\partial T^2} = i\gamma\kappa \sum_l |A_l|^2 A_j.$$

Каждое из таких уравнений можно решать с помощью компактной схемы повышенного порядка точности [20]:

$$i\frac{A^{n+1} - A^n}{q} = \frac{\beta_2}{2} \Lambda (\alpha A^{n+1} + (1 - \alpha)A^n) - \gamma\kappa \left( \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \frac{\tau^2}{12} \Lambda f^n \right),$$

$$f = \sum_l |A_l|^2 A_j, \quad (7)$$

где  $q$  и  $\tau$  — шаги по  $z$  и  $t$  соответственно;  $\Lambda$  — разностный оператор, аппроксимирующий вторую производную по времени. Если зафиксировать значение веса  $\alpha$  следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2} + cq - \frac{i}{3r}, \quad r = 2\beta_2 \frac{q}{\tau^2}, \quad c > 0,$$

то получившаяся компактная схема будет обладать сильной устойчивостью и иметь порядок точности  $O(q^2 + \tau^4)$ .

Так как данная схема имеет кубическую нелинейность на верхнем слое, необходимо использовать внутренние итерации по нелинейности. На каждом слое  $n$  по переменной  $z$  определяется последовательность приближений решения на  $(n + 1)$ -м слое:

$v^0, v^1, \dots, v^k, \dots$ . В качестве начального приближения используется решение, полученное по явной схеме. Тогда итерационный процесс для схемы (7) имеет вид

$$\left(iE - \frac{rq}{4}\Lambda\right) \frac{v^{k+1} - A^n}{q} - \frac{\beta_2}{2}\Lambda A^n + \gamma\kappa \left(\frac{g^k + f^n}{2} + \frac{\tau^2}{12}\Lambda f^n\right) = 0, \quad g = \sum_l |v_l|^2 v_j. \quad (8)$$

### 2.3. Компактная схема повышенного порядка точности для нелинейного уравнения Шрёдингера с первой производной по времени

В случае систем уравнений (2) и (3) заменой временной переменной не удастся исключить член с первой производной по времени, так как коэффициенты при этих членах в общем случае различны во всех уравнениях. Поэтому приведенная выше компактная схема здесь не применима. Однако с помощью замены  $A'_p = \exp(\delta\beta_{0p})A_p$  можно уравнения (2) и (3) свести к системам, состоящим из уравнений вида

$$i\frac{\partial A}{\partial z} = i\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \gamma f,$$

где функция  $f$  — разная для уравнений (2) и (3). Для решения этого уравнения предлагается использовать следующую компактную схему:

$$i\frac{A^{n+1} - A^n}{q} = i\beta_1 \left(T(\alpha_1 A^{n+1} + (1 - \alpha_1)A^n) + \alpha_2 \Lambda A^n\right) + \frac{\beta_2}{2}\Lambda(\alpha_3 A^{n+1} + (1 - \alpha_3)A^n) - \gamma \left(\frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \alpha_2 T f^n + \alpha_4 \Lambda f^n\right), \quad (9)$$

где  $T$  — оператор центральной разности по времени.

Если неизвестные коэффициенты  $\alpha_i$  определить как

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{\tau^2 \beta_1^2}{6\beta_2^2} - i\frac{\tau^2}{6\beta_2 q}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau^2 \beta_1^3 q}{3\beta_2^2} + i\frac{\tau^2 \beta_1}{6\beta_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\tau^2}{6\beta_2 q}, \quad \alpha_4 = \frac{\tau^2}{12},$$

то получим компактную схему повышенного порядка аппроксимации  $O(q^2 + \tau^4)$ . Для устойчивости полученной разностной схемы необходимо выполнение условия

$$2\tau^2 \beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_1^6 q^2 \tau^2 \leq 3\beta_2^4,$$

которое для упрощения можно представить в следующем виде:

$$\tau \leq \left|\frac{\beta_2}{\beta_1}\right|, \quad q \leq \frac{|\beta_2|}{\beta_1^2}.$$

Отметим, что данные ограничения выполняются в большинстве практических задач с реальными параметрами волокна.

Данная схема имеет кубическую нелинейность на верхнем слое, поэтому для численной реализации используются внутренние итерации по нелинейности. Итерационный процесс для схемы (9) имеет вид

$$\left(iE - iq\beta_1\alpha_1 T - q\frac{\beta_2}{2}\alpha_3\Lambda\right) \frac{v^{k+1} - A^n}{q} - \left(i\beta_1 T + \frac{\beta_2}{2}\Lambda + i\beta_1\alpha_2\Lambda\right) A^n + \gamma \left(\frac{|v^k|^2 v^k + |A^n|^2 A^n}{2} + \alpha_2 T |A^n|^2 A^n + \frac{\tau^2}{12}\Lambda |A^n|^2 A^n\right) = 0. \quad (10)$$

### 3. Некоторые результаты расчетов

#### 3.1. Сравнение с точным решением при распространении одного солитона

Представленные выше схемы тестировались на точном решении нелинейного уравнения Шрёдингера в виде фундаментального солитона

$$A(z, t) = \exp \frac{iz}{2} \operatorname{sech}(t)$$

при  $\beta_2 = -1$ ,  $\gamma = 1$ . Нелинейное уравнение Шрёдингера совпадает с уравнением (4) при распространении сигнала по одной моде, поэтому для сравнения численного решения с точным использовались метод расщепления по физическим процессам и компактная схема (8). Задача решалась в области  $(0 \leq z \leq 10) \times (-20 \leq t \leq 20)$ . Результаты расчетов представлены в табл. 1. В первых двух столбцах таблицы приведены размеры сетки по переменным  $z$  и  $t$ . Ошибка численного решения вычислялась следующим образом:

$$\delta = \max |A_j^n - A(z_n, t_j)|.$$

Также таблица содержит коэффициенты убывания ошибки при измельчении сетки  $K$ .

Для компактной схемы (8) использовался параметр  $c = 0.01$ , а внутренние итерации проводились до достижения различия между итерациями  $\epsilon = 10^{-8}$ . По данным, представленным в таблице, можно отметить совпадение теоретических и практических порядков сходимости.

#### 3.2. Сравнение с точным решением при распространении двух солитонов

Точность описанных схем также проверялась на решении связанного нелинейного уравнения Шрёдингера (CNLSE), описывающего распространение сигналов в двух поляризационных компонентах одной моды [21]:

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial A_1}{\partial t} + \delta \frac{\partial A_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + (|A_1|^2 + e|A_2|^2) A_1 &= 0, \\ i \left( \frac{\partial A_2}{\partial t} - \delta \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + (|A_1|^2 + e|A_2|^2) A_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $\delta$  соответствует групповой скорости,  $e$  — коэффициент связи поляризационных компонент, в нашем случае предполагается равным 1. Данное уравнение с точностью до констант совпадает с уравнением (3), поэтому для его численного решения использо-

Т а б л и ц а 1. Результаты расчетов для случая одного солитона

$N_z$	$N_t$	Схема 4-го порядка (8)		SSFM	
		$\delta$	$K$	$\delta$	$K$
40	40	1.857e-01	—	1.622e-01	—
160	80	7.169e-03	25.9	6.462e-03	25.1
640	160	5.394e-04	13.29	4.244e-04	15.23
2560	320	3.46e-05	15.59	2.6534e-05	15.99
10240	640	2.1985e-06	15.74	1.6582e-06	16.01
40960	1280	1.3631e-07	16.13	1.0346e-07	16.02

Т а б л и ц а 2. Результаты расчетов для случая двух солитонов

$N_z$	$N_t$	Схема 4-го порядка (8)		SSFM	
		$\delta$	$K$	$\delta$	$K$
80	80	1.166e-00	—	9.812e-02	—
320	160	5.839e-02	19.97	7.047e-03	13.92
1280	320	3.525e-03	16.56	4.416e-04	15.96
5120	640	2.205e-04	15.99	2.76e-05	16
20480	1280	1.377e-05	16.01	1.725e-06	16

вались метод расщепления по физическим процессам и компактная схема (10). Точное решение связанного нелинейного уравнения Шрёдингера имеет следующий вид:

$$A_1(z, t) = \sqrt{\alpha} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(t - vz)) \exp i \left( (v - \delta)t - \left[ \frac{v^2 - \delta^2}{2} - \alpha \right] z \right),$$

$$A_2(z, t) = \pm \sqrt{\alpha} \operatorname{sech}(\sqrt{2\alpha}(t - vz)) \exp i \left( (v + \delta)t - \left[ \frac{v^2 - \delta^2}{2} - \alpha \right] z \right),$$

где  $\alpha$  и  $v$  — произвольные постоянные. При расчетах использовались параметры:  $0 \leq z \leq 10$ ,  $-20 \leq t \leq 20$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\beta_2 = -1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $v = 1$ . В табл. 2 представлены результаты расчетов для случая двух солитонов.

Для численного решения с помощью схемы (10) внутренние итерации проводились до достижения различия между итерациями  $\epsilon = 10^{-8}$ . В этом случае также можно отметить совпадение теоретических и практических порядков сходимости.

### 3.3. Моделирование многомодовой ВОЛС

Схемы тестировались при моделировании нелинейного распространения оптических сигналов в волоконно-оптических линиях связи, основанных на многомодовом волокне. Система передачи данных состояла из передатчика, десяти пролетов многомодового волокна с усилителем EDFA в конце каждого пролета и приемника. Рассматривалось распространение сигналов в волокне со ступенчатым профилем показателя преломления в режимах слабой и сильной связи мод при передаче данных по различным комбинациям пространственных мод. Для передачи данных использовалось уплотнение по поляризации (Polarization-Division Multiplexing — PDM) совместно с квадратурной фазовой модуляцией (Quadrature Phase-Shift Keying — QPSK). Для формирования импульса использовался фильтр типа “приподнятый косинус” с коэффициентом сглаживания 0.2. Это позволило уменьшить полосу пропускания передаваемого сигнала и минимизировать межсимвольную интерференцию. Каждый PDM—QPSK-сигнал состоял из  $2^{15}$  символов с 32 выборками на каждый символ и передавался с символьной скоростью  $R_s = 28.5$ , что позволило достичь скорости передачи данных 114 Гбит/с.

В режиме слабой связи мод распространение сигналов описывается уравнением (3) и уравнением (2) с коэффициентом линейной связи  $q_{mp} = 0$ . В данном случае уравнения распространения решались с помощью метода расщепления по физическим процессам и компактной схемы (10). В режиме сильной связи мод распространение сигналов описывалось уравнением (4). Это уравнение также решалось с помощью метода расщепления по физическим процессам и компактной схемы (8).

В случае ступенчатого профиля в показателе преломления рассматривалось многомодовое волокно с радиусом сердцевины 7.5 мкм и числовой апертурой 0.2 ( $\Delta = 0.01$ ). Такое волокно имеет параметр  $V = 5$  при длине волны 1550 нм, и оно поддерживает распространение следующих мод:  $LP_{01}$ ,  $LP_{02}$ ,  $LP_{11a}$ ,  $LP_{11b}$ ,  $LP_{21a}$ ,  $LP_{21b}$ . Каждая пространственная мода имеет свою константу распространения, модальную групповую скорость и параметр GVD. Нелинейный коэффициент  $\gamma = 1.4 \text{ Вт}^{-1} \cdot \text{км}^{-1}$ . В конце волокна сигнал ухудшался путем добавления аддитивного белого гауссова шума (Additive White Gaussian Noise — AWGN).

Для сравнения результатов моделирования распространения сигналов по различным комбинациям пространственных мод в режиме сильной и слабой связи находился коэффициент битовых ошибок (Bit-Error Rate — BER) как функция от оптического отношения сигнал/шум (Optical Signal-to-Noise Ratio — OSNR) в каждом случае. Коэффициент битовых ошибок — это отношение числа ошибочно принятых битов к общему числу переданных битов. Оптическое отношение сигнал/шум — это отношение мощности сигнала к мощности шума в заданной полосе пропускания.

Сначала рассматривалось распространение сигналов в многомодовом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления в режиме слабой связи мод, описываемое уравнениями (2) и (3). Как было отмечено в [15], в случае отсутствия линейной связи мод в уравнении (2) эти уравнения приводят к одинаковым результатам, однако использование уравнений Манакова (3) значительно сокращает время вычислений. Следует отметить, что с помощью стохастического уравнения (2) могут быть описаны промежуточные режимы связи, а значит, оно также представляет практический интерес. На рис. 1 показан BER как функция от OSNR после передачи потоков 114 Гбит/с по одной, двум и трем пространственным модам многомодового волокна. Как и ожидалось, оба численных метода показывают одинаковые результаты.

Далее рассматривалось распространение сигналов в многомодовом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления в режиме сильной связи мод, описываемое

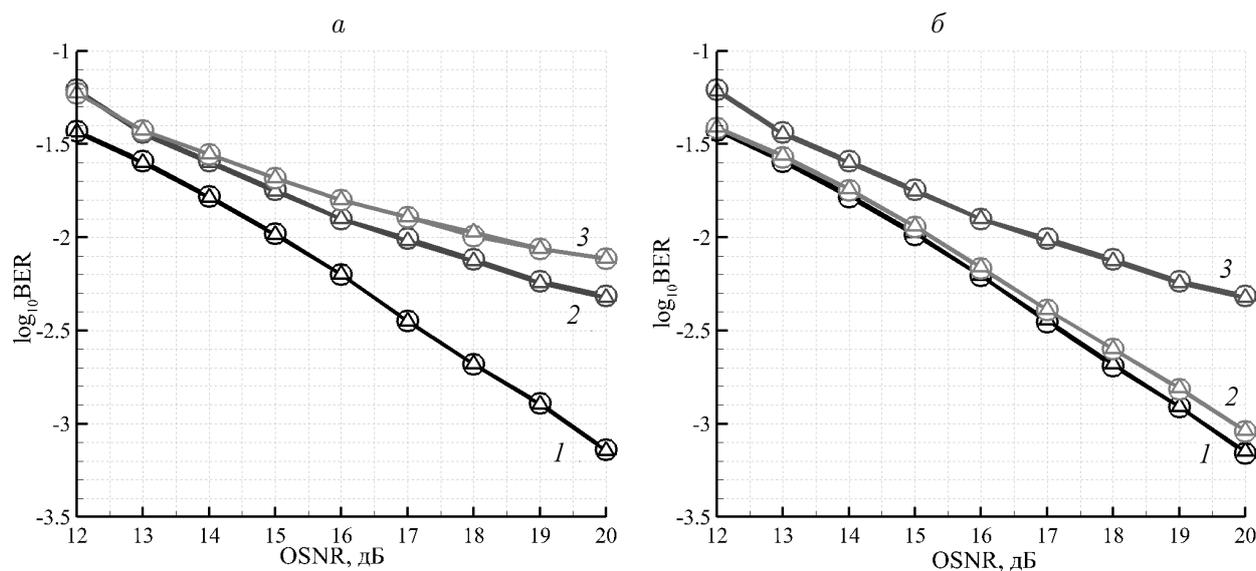


Рис. 1. Зависимость BER от OSNR при передаче сигналов в многомодовом волокне в режиме слабой (*а*) и сильной (*б*) связи: линии 1 соответствуют случаю распространения сигналов по одной моде, линии 2 — по двум модам, линии 3 — по трем модам;  $\Delta$  — решения, полученные с помощью SSFM,  $\circ$  — с помощью компактной (10) — *а* и схемы (8) — *б*

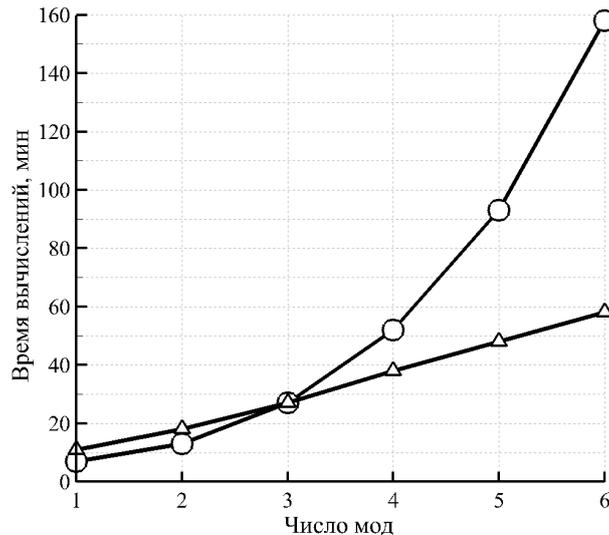


Рис. 2. Время вычислений в зависимости от числа мод:  $\Delta$  — решения, полученные с помощью компактной схемы (10),  $\circ$  — с помощью SSFM

мое уравнением (4). На рис. 1, б показан BER как функция от OSNR после передачи информации по различным комбинациям пространственных мод в многомодовом волокне. Из сравнения режимов слабой и сильной связи следует, что кривые BER в обоих случаях совпадают, когда используется только одна пространственная мода волокна. Тем не менее режим сильной связи приводит к меньшему BER при передаче данных с использованием нескольких пространственных мод.

Метод расщепления по физическим процессам в общем случае значительно быстрее, чем большинство конечно-разностных схем. Однако, как уже говорилось, при решении уравнения (2) данным методом с использованием аппроксимации Паде матричной экспоненты, как описывается в работе [22], на каждом шаге необходимо вычислять матричную экспоненту с размерностью, равной удвоенному числу мод. В этом случае значительно сократить время вычислений помогает использование компактной схемы (10). На рис. 2 приведено время вычисления при распространении оптических сигналов по многомодовому волокну с представленными выше параметрами в зависимости от числа распространяемых мод. Можно заметить, что уже при пяти модах компактная схема (10) значительно опережает метод расщепления по физическим процессам в скорости вычислений, и с увеличением числа мод это превосходство растет.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00110).

## Список литературы / References

- [1] Kao, K.C., Hockham, G.A. Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies // Proc. IEEE. 1966. Vol. 113, No. 7. P. 1151–1158.
- [2] Qian, D., Huang, M., Ip, E., Huang, Y., Shao, Y., Hu, J., Wang, T. 101.7-Tb/s (370 × 294-Gb/s) PDM-128QAM-OFDM transmission over 3 × 55-km SSMF using pilot-based phase noise mitigation // Optical Fiber Communication Conference and Exposition and the National Fiber Optic Engineers Conference (OFC/NFOEC). Los Angeles, 2011. Paper PDPB5, doi:10.1364/NFOEC.2011.PDPB5.

- [3] Zhou, X., Nelson, L.E., Isaac, R., Magill, P.D., Zhu, B., Borel, P., Carlson, K., Peckham, D.W. 12,000 km transmission of 100 GHz spaced, 8495-Gb/s PDM time-domain hybrid QPSK-8QAM signals // Optical Fiber Communication Conference and Exposition and the National Fiber Optic Engineers Conference (OFC/NFOEC). Anaheim, 2013. Paper OTu2B.4., doi:10.1364/OFC.2013.OTu2B.4.
- [4] Winzer, P.J., Essiambre, R.-J. Advanced optical modulation formats // Proc. IEEE. 2006. Vol. 94, No. 5. P. 952–985.
- [5] Winzer, P.J., Foschini, G.J. Outage calculations for spatially multiplexed fiber links // Optical Fiber Communication Conference and Exposition and the National Fiber Optic Engineers Conference (OFC/NFOEC). Los Angeles, 2011. Paper OThO5, doi:10.1364/OFC.2011.OThO5.
- [6] Ryf, R., Randel, S., Gnauck, A.H., Bolle, C., Essiambre, R., Winzer, P.J., Peckham, D.W., McCurdy, A., Lingle, R. Space-division multiplexing over 10 km of three-mode fiber using coherent  $6 \times 6$  MIMO processing // Optical Fiber Communication Conference and Exposition and the National Fiber Optic Engineers Conference (OFC/NFOEC). Los Angeles, 2011. Paper PDPB10, doi:10.1364/OFC.2011.PDPB10.
- [7] Ip, E., Neng, B., Yue-Kai, H., Mateo, E., Yaman, F., Ming-Jun, L., Bickham, S., Ten, S., Linares, J., Montero, C., Moreno, V., Prieto, X., Tse, V., Kit Man, C., Lau, A., Hwa-yaw, T., Chao, L., Yanhua, L., Gang-Ding, P., Guifang, L.  $88 \times 3 \times 112$ -Gb/s WDM transmission over 50 km of three-mode fiber with inline few-mode fiber amplifier // 37th European Conference and Exhibition on Optical Communication (ECOC). Geneva, 2011. Paper Th.13.C.2, doi:10.1364/ECOC.2011.Th.13.C.2.
- [8] Zhu, B., Taunay, T.F., Fishteyn, M., Liu, X., Chandrasekhar, S., Yan, M.F., Fini, J.M., Monberg, E.M., Dimarcello, F.V. 112-Tb/s Space-division multiplexed DWDM transmission with 14-b/s/Hz aggregate spectral efficiency over a 76.8-km seven-core fiber // Optical Express. 2011. Vol. 19, No. 17. P. 16665–16671.
- [9] Sakaguchi, J., Puttnam, B.J., Klaus, W., Awaji, Y., Wada, N., Kanno, A., Kawanishi, T., Imamura, K., Inaba, H., Mukasa, K., Sugizaki, R., Kobayashi, T., Watanabe, M. 305-Tb/s space division multiplexed transmission using homogeneous 19-core fiber // Journal of Lightwave Technology. 2013. Vol. 31, No. 4. P. 554–562.
- [10] Takara, H. 1.01-Pb/s (12 SDM/222 WDM/456 Gb/s) Crosstalk-managed transmission with 91.4-b/s/Hz aggregate spectral efficiency // 38th European Conference and Exhibition on Optical Communication (ECOC). Amsterdam, 2012. Th.3.C.1, doi:10.1364/ECEOC.2012.Th.3.C.1.
- [11] Liu, H., Zheng, X., Liu, M., Zhao, N., Luo, A., Luo, Z., Xu, W., Zhang, H., Zhao, C., Wen, S. Femtosecond pulse generation from a topological insulator mode-locked fiber laser // Optical Express. 2014. Vol. 22, No. 6. P. 6868–6873.
- [12] Leunga, A., Shankar, P.M., Mutharasan, R. A review of fiber-optic biosensors // Sensors. Actuators B: Chemistry. 2007. Vol. 125, No. 2. P. 688–703.
- [13] Islam, T., Mahboob, M.R., Khan, S.A., Kumar, L. A single chip integrated sol-gel thin film lc sensor for measuring moisture in ppm level // Sensors. 2014. Vol. 14, No. 4. P. 1148–1153.
- [14] Carpenter, J., Eggleton, B., Schroder, J. Reconfigurable spatially-diverse optical vector network analyzer // Optical Express. 2014. Vol. 22, No. 3. P. 2706–2713.
- [15] Mumtaz, S., Essiambre, R., Agrawal, G.P. Nonlinear propagation in multimode and multicore fibers: Generalization of the Manakov equations // Journal of Lightwave Technology. 2013. Vol. 31, No. 3. P. 398–406.
- [16] Mecozzi, A., Antonelli, C., Shtaif, M. Nonlinear propagation in multi-mode fibers in the strong coupling regime // Optical Express. 2012. Vol. 20, No. 11. P. 11673–11678.

- [17] **Mecozzi, A., Antonelli, C., Shtaif, M.** Coupled Manakov equations in multimode fibers with strongly coupled groups of modes // *Optical Express*. 2012. Vol. 20, No. 21. P. 23436–23441.
- [18] **Rademacher, G., Warm, S., Petermann, K.** Nonlinear interaction in differential mode delay managed mode-division multiplexed transmission systems // *Optical Express*. 2015. Vol. 23, No. 1. P. 55–60.
- [19] **Agrawal, G.P.** Nonlinear fiber optics. N.Y.: Acad. Press, 1995. 592 p.
- [20] **Федорук М.П., Паасонен В.И.** Компактная диссипативная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера // *Вычисл. технологии*. 2011. Т. 16, № 6. С. 68–73.  
**Fedoruk, M.P., Paasonen, V.I.** Compact dissipative scheme for the nonlinear Schrödinger equation // *Computational Technologies*. 2011. Vol. 16, No. 6. P. 68–73. (in Russ.)
- [21] **Taha, T., Ablowitz, M.** Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation // *Journal of Computational Physics*. 1984. Vol. 55, No. 2. P. 203–230.
- [22] **Чеховской И.С.** Использование аппроксимации Паде для решения систем нелинейных уравнений Шрёдингера с помощью метода расщепления по физическим процессам // *Вычисл. технологии*. 2015. Т. 20, № 3. С. 99–108.  
**Chekhovskoy, I.S.** Using Pade approximation for solving systems of nonlinear Schrödinger equations by the split-step Fourier method // *Computational Technologies*. 2015. Vol. 20, No. 3. P. 99–108. (in Russ.)

*Поступила в редакцию 31 августа 2015 г.*

### **Algorithms for numerical simulation of optical communication links based on multimode fiber**

FEDORUK, MIKHAIL P.<sup>1,2</sup>, SIDELNIKOV, OLEG S.<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

\*Corresponding author: Sidelnikov, Oleg S., e-mail: o.s.sidelnikov@gmail.com

Today more than 99 % of the global information flows are provided by the technology of fiber-optic communication. Exponentially increasing demand for communication lines capacity is a driving force for research in the high-capacity optical transmission systems. Using different technologies the data transfer rate of more than 100 Tb/s for transmission over a single-mode fiber was achieved. However, further increasing of the capacity of a single-mode fiber is difficult due to different limitations. The development of communication systems based on multimode fibers is now seen as a promising way to solve this problem. Multimode fibers can increase the capacity of optical systems due to the simultaneous transmission of signals in different modes of the fiber.

The paper describes the basic equations of nonlinear propagation of optical signals in multimode fibers. Generalized Manakov equations describing the nonlinear propagation modes in the regimes of strong and weak coupling among spatial modes are given. The paper also describes the numerical methods for solving the equations of nonlinear propagation in multimode fibers. The main method of numerical simulation of multimode

fiber optic link is the split-step Fourier method. Due to the simple implementation and high computing speed by using fast Fourier transform algorithm, this method is used in almost all the papers devoted to the numerical modeling of fiber-optic lines. However in some cases and with a large number of points in the time variable SSFM may concede finite difference schemes. Therefore the paper also provides compact high-order schemes for nonlinear Schrödinger equation and for NLSE with the first time derivative.

The paper also presents some results of numerical calculations. First the numerical results of described schemes were compared with the exact solutions of nonlinear equations in the case of the propagation of one and two solitons. Then fiber-optic link was numerically simulated and bit error rate was compared depending on the number of propagating modes and the regimes of coupling.

*Keywords:* Nonlinear Schrödinger equation, split-step Fourier method, compact finite-difference scheme, nonlinear fiber optics, fiber-optic communication link, multimode fiber.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 14-21-00110)

*Received 31 August 2015*