СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПОЛНОЙ АРИФМЕТИКЕ КАУХЕРА*

А. В. Лакеев
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Иркутск, Россия
e-mail: lakeyev@icc.ru

In this paper, existence and uniqueness of algebraic solutions to interval linear systems in Kaucher complete interval arithmetic is considered. We obtain sufficient uniqueness conditions which are similar to those derived by Neumaier and Rohn, and, for the square case, sufficient existence condition. A subclass of interval matrices has been singled out ("constant signs matrices") for which the above conditions are both necessary and sufficient.

Введение

В настоящее время мы являемся свидетелями значительного роста интереса исследователей к линейным алгебраическим уравнениям в полной интервальной арифметике Каухера [6]. В первую очередь это связано с тем, что с помощью алгебраических решений этих уравнений часто удается получить как внешние, так и внутренние интервальные оценки различных множеств решений интервальных линейных систем. Первые результаты такого сорта появились достаточно давно (в конце 1960-х — начале 70-х гг.) и касались внешнего оценивания объединенного множества решений системы линейных интервальных уравнений с помощью алгебраического решения некоторой вспомогательной системы, хотя в то время сами авторы выражали эти результаты в совершенно других терминах, не пользуясь понятием алгебраического решения (см., например, [2, 9, 12] и указанную в этих работах литературу). Позднее [7, 11] было показано, что с помощью алгебраических решений, но уже в расширенной интервальной арифметике Каухера, можно получать внутренние оценки для объединенного множества решений, а впоследствии С. П. Шарый [3, 4] распространил этот подход как на внутреннее, так и на внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем.

В настоящей работе исследуются вопросы существования и единственности алгебраических решений интервальных линейных систем уравнений в полной арифметике Каухера. Получены достаточные условия (аналогичные "условию нерасширяемости" А. Ноймайера

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №98–01–01137.

[9] и И. Рона [10]) единственности алгебраических решений и, в случае равенства числа уравнений числу неизвестных, существования алгебраических решений этих уравнений. Выделен класс матриц (интервальные матрицы постоянных знаков), для которых полученные условия являются необходимыми и достаточными.

1. Интервальные линейные уравнения в арифметике Каухера

Пусть $\mathbb{IR} = \{\, [\underline{a}, \overline{a}] \mid \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R} \,\}$ — расширенное множество интервалов (при этом не требуется выполнения условия $\underline{a} \le \overline{a}$). Рассмотрим следующие операции сложения и умножения элементов этого множества [6] (см. также [5]).

Для двух интервалов $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{IR}$ их суммой называется интервал

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}].$$

Для того чтобы определить умножение интервалов $\mathbb{IR}$, выделим в $\mathbb{IR}$ следующие подмножества:

$$\mathcal{P} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid (\underline{\mathbf{x}} > \mathbf{0}) \;\&\; (\overline{\mathbf{x}} > \mathbf{0}) \,\} \text{ — неотрицательные интервалы,}$$

$$\mathcal{Z} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{0} \le \overline{\mathbf{x}} \,\} \text{ — нульсодержащие интервалы,}$$

$$-\mathcal{P} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{x} \in \mathcal{P} \,\} \text{ — неположительные интервалы,}$$

$$\operatorname{dual} \mathcal{Z} := \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{IR} \mid \operatorname{dual} \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \,\} \text{ — интервалы, содержащиеся в нуле.}$$

Тогда умножение двух интервалов $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ в интервальной арифметике Каухера может быть описано следующей таблицей [6].

$\cdot$	$\mathbf{b} \in \mathcal{P}$	$\mathbf{b} \in \mathcal{Z}$	$\mathbf{b} \in -\mathcal{P}$	$\mathbf{b} \in \operatorname{dual} \mathcal{Z}$
$\mathbf{a} \in \mathcal{P}$	$[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}]$	$[\overline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}]$	$[\overline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}]$	$[\underline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\overline{b}]$
$\mathbf{a} \in \mathcal{Z}$	$[\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\,\underline{b}, \underline{a}\,\underline{b}]$	0
$\mathbf{a} \in -\mathcal{P}$	$[\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}]$	$[\underline{a}\,\overline{b}, \underline{a}\,\underline{b}]$	$[\overline{a}\,\overline{b}, \underline{a}\,\underline{b}]$	$[\overline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}]$
$\mathbf{a} \in \operatorname{dual} \mathcal{Z}$	$[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\,\overline{b}, \underline{a}\,\overline{b}]$	$[\max\{\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\,\overline{b}, \overline{a}\,\underline{b}\}]$

В дальнейшем через $\mathbb{IR}^n$ ($\mathbb{R}^n$) и $\mathbb{IR}^{m \times n}$ ($\mathbb{R}^{m \times n}$) будем обозначать множества n-мерных векторов и $m \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{IR}$ ($\mathbb{R}$) соответственно.

Теперь мы можем ввести понятие системы линейных алгебраических уравнений и ее алгебраического решения.

Определение 1. Пусть $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{IR}^m$. Алгебраическим решением системы уравнений вида

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{0}$$

называется вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ такой, что при умножении на него матрицы $\mathbf{A}$ получается вектор $\mathbf{b}$, причем сложение и умножение интервалов вычисляются в арифметике Каухера.

Отметим, что хотя уравнение (0) и названо линейным алгебраическим уравнением, оно не является линейным в обычном понимании, так как для операции интервального умножения не выполняется закон дистрибутивности (как в обычной интервальной арифметике, так и в арифметике Каухера).

Для того чтобы понять, к какому классу в действительности относится уравнение (0), нам потребуется некоторая аналитическая формула для умножения интервалов в арифметике Каухера [8]. При этом в дальнейшем будем использовать следующие обозначения: пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ — n-мерные векторы (в частности, вещественные числа из $\mathbb{R}^1$), $A, B \in R^{m\times n}$ — $m \times n$-матрицы; тогда

$x \vee y = \max\{x, y\}$, $A \vee B = \max\{A, B\}$ — точная верхняя грань x, y и A, B соответственно;

$x^+ = \max\{x, 0\}$, $A^+ = \max\{A, \mathbf{0}\}$ — положительные части вектора x и матрицы A;

$x^- = \max\{-x, 0\}$, $A^- = \max\{-A, \mathbf{0}\}$ — отрицательные части вектора x и матрицы A;

$|x| = x^+ + x^-$, $|A| = A^+ + A^-$ — модули вектора x и матрицы A соответственно.

В этом случае операции max и $|\cdot|$ понимаются покомпонентно для векторов и поэлементно для матриц.

Используя введенные обозначения, нетрудно получить формулу для умножения интервалов в арифметике Каухера.

Лемма 1 [8]. *Если* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\underline{a}, \overline{a}]$, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{IR}$, *то*

$$\mathbf{ab} = \left[\ (\underline{a}^+\underline{b}^+) \vee (\overline{a}^-\overline{b}^-) - (\overline{a}^+\underline{b}^-) \vee (\underline{a}^-\overline{b}^+)\ ,\ (\overline{a}^+\overline{b}^+) \vee (\underline{a}^-\underline{b}^-) - (\underline{a}^+\overline{b}^-) \vee (\overline{a}^-\underline{b}^+)\ \right]. \qquad (1)$$

Доказательство получается непосредственным перебором всех вариантов распределения знаков для $\underline{a}$, $\overline{a}$, $\underline{b}$, $\overline{b}$ и сравнением полученного результата с приведенной выше таблицей для умножения интервалов в арифметике Каухера.

Используя эту лемму, нетрудно получить и аналитическую формулу для умножения интервальной матрицы на интервальный вектор. При этом для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $D(x)$ будем обозначать диагональную $n \times n$-матрицу с вектором x по диагонали, а через $e^n \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все координаты которого равны единице.

Предложение 1 [8]. *Если для* $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ *и* $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ *обозначим* $\mathbf{Ax} = [\underline{\mathbf{Ax}}\ ,\ \overline{\mathbf{Ax}}]$, *то*

$$\overline{\mathbf{Ax}} = \left(\ \overline{A}^+ D(\overline{x}^+)\ \vee\ \underline{A}^- D(\underline{x}^-)\ -\ \underline{A}^+ D(\overline{x}^-)\ \vee\ \overline{A}^- D(\underline{x}^+)\ \right) e^n, \qquad (2)$$

$$\underline{\mathbf{Ax}} = \left(\ \underline{A}^+ D(\underline{x}^+)\ \vee\ \overline{A}^- D(\overline{x}^-)\ -\ \overline{A}^+ D(\underline{x}^-)\ \vee\ \underline{A}^- D(\overline{x}^+)\ \right) e^n. \qquad (3)$$

Замечание. Нетрудно выписать и формулы, аналогичные (2), (3), для произведения двух интервальных матриц. Хотя далее в работе эти формулы не используются, но, на наш взгляд, они представляют самостоятельный интерес и могут быть применены как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях интервальных вычислений. Поэтому их мы приведем.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — $m\times n$-матрица и $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ — $n\times k$-матрица. Обозначим через $A \circledast B$ следующую $m \times (nk)$-матрицу: если $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ — вектор-столбцы матрицы A, т. е. $A = (a_1\ \ldots\ a_n)$, и $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^{1\times k}$ — вектор-строки матрицы B, т. е. $B = (b_1\ \ldots\ b_n)^\top$, то

$$A \circledast B = (a_1 b_1\ \ldots\ a_n b_n)$$

(отметим, что каждое произведение $a_i b_i, i = \overline{1,n}$ является $m \times k$-матрицей).

Кроме того, обозначим через $E_k^n = e^n \otimes E_k$ матрицу размера $(nk) \times k$, в которой $e^n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ — n-мерный вектор-столбец с единичными компонентами, $E_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ — единичная $k \times k$-матрица и "$\otimes$" — кронекерово (прямое тензорное) произведение матриц.

Тогда верно следующее утверждение.

Предложение 2. *Если* $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $\mathbf{B} = [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbb{IR}^{n\times k}$ *и* $\mathbf{AB} = [\underline{\mathbf{AB}}, \overline{\mathbf{AB}}] \in \mathbb{IR}^{m\times k}$, *то*

$$\overline{\mathbf{AB}} = \Big((\overline{A}^{+} \circledast \overline{B}^{+}) \vee (\underline{A}^{-} \circledast \underline{B}^{-}) - (\underline{A}^{+} \circledast \overline{B}^{-}) \vee (\overline{A}^{-} \circledast \underline{B}^{+}) \Big) E_k^n,$$

$$\underline{\mathbf{AB}} = ((\underline{A}^{+} \circledast \underline{B}^{+}) \vee (\overline{A}^{-} \circledast \overline{B}^{-}) - (\overline{A}^{+} \circledast \underline{B}^{-}) \vee (\underline{A}^{-} \circledast \overline{B}^{+}))\, E_k^n.$$

Доказательство предложений 1 и 2 получается с помощью формулы (1) простым расписыванием определений умножения матрицы на вектор и матрицы на матрицу соответственно, и поэтому мы его опускаем.

Используя формулы (2) и (3), уже нетрудно расписать уравнение (0) в явном виде. При этом сразу заменим операцию "$\vee$" на следующее ее представление через модуль (которое верно в любой векторной решетке [1]):

$$A \vee B = \frac{1}{2}(A + B + |A - B|),$$

где A и B — любые $m \times n$-матрицы. Кроме того, учитывая соотношения $D(x)e^n = x$ и $(-x)^+ = x^-$ для $x \in \mathbb{R}^n$, после несложных преобразований приходим к следующему утверждению.

Теорема 1 [8]. *Пусть* $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbb{IR}^{m}$. *Вектор* $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ *является алгебраическим решением уравнения (0) тогда и только тогда, когда* $\underline{x}$ *и* $\overline{x}$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{pmatrix} \overline{A}^{+} & \underline{A}^{-} \\ \underline{A}^{-} & \overline{A}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ -\underline{x} \end{pmatrix}^{+} + \left| \begin{pmatrix} \overline{A}^{+} & -\underline{A}^{-} \\ -\underline{A}^{-} & \overline{A}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\overline{x}) \\ D(-\underline{x}) \end{pmatrix}^{+} \right| e^n =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{A}^{+} & \underline{A}^{-} \\ \underline{A}^{-} & \overline{A}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ -\underline{x} \end{pmatrix}^{-} + \left| \begin{pmatrix} \overline{A}^{+} & -\underline{A}^{-} \\ -\underline{A}^{-} & \overline{A}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\overline{x}) \\ D(-\underline{x}) \end{pmatrix}^{-} \right| e^n = +2 \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Из (4) уже нетрудно заключить, какого сорта нелинейности содержатся в уравнении (0). В частности, видно, что это уравнение является кусочно-линейным относительно $\underline{x}$ и $\overline{x}$. В дальнейшем нам понадобится также другая форма уравнения (4), с помощью которой можно получить некоторые достаточные условия единственности алгебраического решения уравнения (0), более близкие (в некотором смысле) к необходимым, чем условия, получаемые прямым использованием уравнения (4).

Для вывода требуемых уравнений представим матрицу $\mathbf{A}$ как сумму трех матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

где $\mathbf{A}_l = \mathbf{a}_{ij}^l$, $l \in \{0, 1, 2\}$ такие, что

$$\mathbf{a}_{ij}^0 := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \underline{a}_{ij}\overline{a}_{ij} \geq 0, \\ \mathbf{0}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_{ij}^1 := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \underline{a}_{ij} < 0 < \overline{a}_{ij}, \\ \mathbf{0}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_{ij}^2 := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \underline{a}_{ij} > 0 > \overline{a}_{ij}, \\ \mathbf{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что при этом

$$\overline{A}^+ = \overline{A}_0^+ + \overline{A}_1, \quad \overline{A}^- = \overline{A}_0^- - \overline{A}_2,$$

$$\underline{A}^+ = \underline{A}_0^+ + \underline{A}_2, \quad \underline{A}^- = \underline{A}_0^- - \underline{A}_1.$$

Учитывая тот факт, что при любых фиксированных $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ только один из трех интервалов $\mathbf{a}_{ij}^0$, $\mathbf{a}_{ij}^1$, $\mathbf{a}_{ij}^0$ может быть отличен от нулевого интервала, уравнение (4) преобразуем к виду

$$\begin{pmatrix} \overline{A}^+ + \overline{A}_0^+ & \underline{A}^- + \underline{A}_0^- \\ \underline{A}^- + \underline{A}_0^- & \overline{A}^+ + \overline{A}_0^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ -\underline{x} \end{pmatrix}^+ + \left| \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\overline{x}) \\ D(-\underline{x}) \end{pmatrix}^+ \right| e^n =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{A}^+ + \underline{A}_0^+ & \overline{A}^- + \overline{A}_0^- \\ \overline{A}^- + \overline{A}_0^- & \underline{A}^+ + \underline{A}_0^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ -\underline{x} \end{pmatrix}^- + \left| \begin{pmatrix} \underline{A}_2 & \overline{A}_2 \\ \overline{A}_2 & \underline{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\overline{x}) \\ D(-\underline{x}) \end{pmatrix}^- \right| e^n + 2 \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, интервальный вектор $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ будет алгебраическим решением уравнения (0) тогда и только тогда, когда $\underline{x}$ и $\overline{x}$ удовлетворяют уравнению (5).

2. Условия существования и единственности

Рассмотрим следующий класс уравнений, к которому принадлежат уравнения вида (4), (5).

Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{s\times r}$ и $L_1, L_2 : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{s\times k}$ — линейные отображения из $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}^{s\times k}$, т. е. $L_1(x)$ и $L_2(x)$ — $s \times k$-матрицы, элементами которых являются некоторые линейные функции от x.

Тогда для любого $b \in \mathbb{R}^s$ можно записать уравнение

$$A_1 x^+ + |L_1(x^+)| e^k = A_2 x^- + |L_2(x^-)| e^k + b, \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}^r$, x — неизвестное.

Уравнения (4) и (5) очевидно имеют вид (6), если положить $r = 2n$, $s = 2m$, $k = n$ и, например, для уравнения (5)

$$A_1 = \begin{pmatrix} \overline{A}^+ + \overline{A}_0^+ & \underline{A}^- + \underline{A}_0^- \\ \underline{A}^- + \underline{A}_0^- & \overline{A}^+ + \overline{A}_0^+ \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} \underline{A}^+ + \underline{A}_0^+ & \overline{A}^- + \overline{A}_0^- \\ \overline{A}^- + \overline{A}_0^- & \underline{A}^+ + \underline{A}_0^+ \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ -\underline{x} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} \overline{b} \\ -\underline{b} \end{pmatrix},$$

$$L_1(x) = \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\overline{x}) \\ D(-\underline{x}) \end{pmatrix}, \ L_2(x) = \begin{pmatrix} \underline{A}_2 & \overline{A}_2 \\ \overline{A}_2 & \underline{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\overline{x}) \\ D(-\underline{x}) \end{pmatrix}.$$

Прежде чем дать общие условия единственности (а в случае $r = s$ и существования) решения уравнения (6), рассмотрим его частный случай, получаемый при $L_1(x) = L_2(x) \equiv 0$. Уравнение (6) имеет при этом вид

$$A_1 x^+ = A_2 x^- + b, \tag{7}$$

где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{R}^{s\times r}$, $b \in \mathbb{R}^s$, $x \in \mathbb{R}^r$. Для (7) верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Следующие два условия эквивалентны:*

1) уравнение (7) имеет не более одного решения при любом $b \in \mathbb{R}^s$*;*

2) система уравнений и неравенств

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)y + (A_1 - A_2)x = 0, \\ |y| \geq |x|, \end{cases} \tag{8}$$

имеет только нулевое решение. Если, кроме того, $r = s$*, то эти условия также эквивалентны следующим:*

3) уравнение (7) имеет единственное решение при любом $b \in \mathbb{R}^s$*;*

4) для любой диагональной матрицы $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_s)$ *такой, что* $|d_i| = 1$, $i = \overline{1, s}$*, уравнение*

$$A_1 D x^+ = A_2 D x^- + b \tag{7_D}$$

имеет по крайней мере одно решение при любом $b \in \mathbb{R}^s$*.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится вспомогательный результат:

Лемма 2. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *и* $|a| \leq |b|$*. Тогда*

$$(a + b)^+ \wedge (a - b)^+ = 0, \quad (a + b)^- \wedge (a - b)^- = 0, \tag{9}$$

где для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ *через* $x \wedge y$ *обозначена точная нижняя грань, т. е.*

$$x \wedge y = \min\{x, y\},$$

а операция $\min$ *понимается покоординатно.*

Доказательство. Из неравенства $|a| \leq |b|$ следует, что $-|b| \leq a \leq |b|$, и потому $-|b_i| \leq a_i \leq |b_i|$ при любом $i = \overline{1, n}$. Далее из неравенства $a_i \leq |b_i|$ следует, что если $b_i \geq 0$, то $a_i \leq b_i$, и поэтому $(a_i - b_i)^+ = 0$, а если $b_i \leq 0$, то $a_i \leq -b_i$, и тогда $(a_i + b_i)^+ = 0$.

Таким образом, для любого $i = \overline{1, n}$ либо $(a_i - b_i)^+ = 0$, либо $(a_i + b_i)^+ = 0$, и следовательно, $(a + b)^+ \wedge (a - b)^+ = 0$.

Равенство $(a + b)^- \wedge (a - b)^- = 0$ получается аналогичным образом из неравенства $-|b| \leq a$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала эквивалентность условий 1) и 2).

Пусть условие 1) выполняется и $y, x \in \mathbb{R}^r$ удовлетворяют системе (8). Положим

$$x_1 = (x + y)^+ - (x - y)^+, \quad x_2 = (x + y)^- - (x - y)^-.$$

Так как $|y| \geq |x|$, то из леммы 2 получаем $(x + y)^+ \wedge (x - y)^+ = (x + y)^- \wedge (x - y)^- = 0$, и следовательно,

$$x_1^+ = (x + y)^+, \quad x_1^- = (x - y)^+, \quad x_2^+ = (x + y)^-, \quad x_2^- = (x - y)^-.$$

Далее из первого уравнения системы (8) вытекает $A_1(x + y) = A_2(x - y)$, что совместно с предыдущими равенствами дает

$$A_1(x_1^+ - x_2^+) = A_1((x + y)^+ - (x + y)^-) = A_1(x + y) = A_2(x - y) =$$

$$= A_2((x - y)^+ - (x - y)^-) = A_2(x_1^- - x_2^-),$$

и поэтому $A_1x_1^+ - A_2x_1^- = A_1x_2^+ - A_2x_2^-$. Следовательно, полагая $b = A_1x_1^+ - A_2x_1^- = A_1x_2^+ - A_2x_2^-$, получаем, что x_1 и x_2 — решения уравнения (7) с одним и тем же b. Но тогда из условия 1) следует, что $x_1 = x_2$, т. е.

$$(x+y)^+ - (x-y)^+ = (x+y)^- - (x-y)^-,$$

или

$$x + y = (x+y)^+ - (x+y)^- = (x-y)^+ - (x-y)^- = x - y,$$

и следовательно, $y = 0$. Кроме того, $|y| \geq |x|$, поэтому $x = 0$, т. е. $x = y = 0$ — единственное решение системы (8).

Обратно, пусть система (8) имеет только нулевое решение и $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^r$ удовлетворяют уравнению (7). Тогда $A_1x_1^+ - A_2x_1^- = A_1x_2^+ - A_2x_2^-$, или $A_1(x_1^+ - x_2^+) = A_2(x_1^- - x_2^-)$.

Положим

$$x = |x_1| - |x_2|, \quad y = x_1 - x_2.$$

Так как для любого $x \in \mathbb{R}^r$ имеет место $|x| = x^+ + x^-$, то выполняются следующие равенства:

$$x + y = |x_1| + x_1 - |x_2| - x_2 = 2(x_1^+ - x_2^+),$$

$$x - y = |x_1| - x_1 - |x_2| + x_2 = 2(x_1^- - x_2^-).$$

Следовательно,

$$A_1(x+y) = 2A_1(x_1^+ - x_2^+) = 2A_2(x_1^- - x_2^-) = A_2(x-y),$$

или

$$(A_1 + A_2)y + (A_1 - A_2)x = 0,$$

т. е. для x, y выполняется первое уравнение системы (8).

Так как, кроме того, очевидно, что

$$|x| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| = |y|,$$

то x, y удовлетворяют системе (8). Следовательно, $y = x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = x_2$, т. е. (7) имеет не более одного решения.

Рассмотрим случай $r = s$.

Очевидно, что из 3) следует 1). Покажем, что из 2) следует 3).

Допустим, что условие 2) выполняется. Заменяя в уравнение (7) x^+ и x^- на их выражения через модули, т. е. $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$, перепишем уравнение (7) в следующей эквивалентной форме:

$$(A_1 + A_2)x = (A_2 - A_1)|x| + 2b. \tag{10}$$

Заметим, что матрица $A_1 + A_2$ должна быть невырожденной, так как если вектор $y_0 \neq 0$ такой, что $(A_1 + A_2)y_0 = 0$, то пара $(y_0, 0)$ будет ненулевым решением системы (8). Поэтому уравнение (10) можно записать в виде

$$x = (A_1 + A_2)^{-1}(A_2 - A_1)|x| + 2(A_1 + A_2)^{-1}b. \tag{11}$$

Обозначим $B = (A_1 + A_2)^{-1}(A_2 - A_1)$ и покажем, что матрица B нерасширяющая. Действительно, если это не так, то найдется вектор $x_0 \neq 0$ такой, что $|Bx_0| \geq |x_0|$. В этом случае, полагая $y_0 = Bx_0$, получим $y_0 = (A_1{+}A_2)^{-1}(A_2{-}A_1)x_0$, или $(A_1{+}A_2)y_0 = (A_2{-}A_1)x_0$ и $|y_0| \geq |x_0|$, что противоречит условию 2). Но тогда , по теореме 6.1.5 [9] можем заключить, что уравнение (11), а следовательно и уравнение (7), имеют решение при любом $b \in \mathbb{R}^s$.

Докажем теперь, что условие 4) эквивалентно условию 2). Если система (8) имеет только нулевое решение и $D = \mathrm{diag}(\,d_1, \ldots, d_s)$ — диагональная матрица такая, что $|d_i| = 1$, $i = \overline{1, s}$, то система

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)Dy + (A_1 - A_2)Dx = 0, \\ |y| \geq |x| \end{cases}$$

очевидно также имеет только нулевое решение. Поэтому, по уже доказанному, из условия 2) следует, что уравнение $(7)_D$ имеет единственное решение при любом $b \in \mathbb{R}^s$ и, в частности, будет выполняться условие 4).

Докажем обратное, т. е., что из условия 4) следует условие 2). Покажем сначала, что при выполнении 4) матрица $A_1 + A_2$ должна быть невырожденной. Допустим противное. Тогда найдется вектор $z \neq 0$, $z \in \mathbb{R}^{s\times 1}$ такой, что $z^\top(A_1 + A_2) = 0$ (где $z^\top$ — транспонированный вектор, т. е. $z^\top \in \mathbb{R}^{1\times s}$).

Выберем диагональную матрицу $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_s)$, $|d_i| = 1$, $i = \overline{1, s}$ так, чтобы выполнялось равенство $|z^\top A_1| = z^\top A_1 D$. Пусть x — решение уравнения

$$A_1 D x^+ = A_2 D x^- - z.$$

Тогда, используя равенства $z^\top A_2 = -z^\top A_1$ и $z = A_2 D x^- - A_1 D x^+$, нетрудно получить

$$z^\top z = z^\top(A_2 D x^- - A_1 D x^+) = z^\top A_2 D x^- - z^\top A_1 D x^+ = -z^\top A_1 D x^- - z^\top A_1 D x^+ =$$

$$= -z^\top A_1 D(x^- + x^+) = -z^\top A_1 D|x| = -|z^\top A_1||x| \leq 0,$$

что противоречит предположению $z \neq 0$. Следовательно, $A_1 + A_2$ невырождена. Далее, так же как при доказательстве того, что из 2) следует 3), с помощью замены $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$, получаем следующую эквивалентную форму уравнения $(7)_D$:

$$Dx = (A_1 + A_2)^{-1}(A_2 - A_1)D|x| + 2(A_1 + A_2)^{-1}b.$$

Обозначая $B = (A_1{+}A_2)^{-1}(A_2{-}A_1)$, $b' = 2(A_1{+}A_2)^{-1}b$ и делая замену $y = Dx$, заключаем, что условие 4) эквивалентно существованию по крайней мере одного решения уравнения

$$y = BD|y| + b'$$

при любых $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_s)$, $|d_i| = 1$, $i = \overline{1, s}$, и $b' \in \mathbb{R}^s$. Но тогда из теоремы 6.1.5 [9] получаем, что матрица B — нерасширяющая. Покажем, что в этом случае система (8) имеет только нулевое решение. Действительно, пусть $x, y \in \mathbb{R}^s$ удовлетворяют системе (8). Тогда из первого уравнения этой системы, учитывая, что $A_1 + A_2$ невырождена, выводим

$$y = (A_1 + A_2)^{-1}(A_2 - A_1)x = Bx,$$

а из неравенства $|y| \geq |x|$ получается, что $|Bx| \geq |x|$. Так как матрица B — нерасширяющая, то из последнего неравенства следует, что $x = 0$, а значит и $y = Bx = 0$, т. е. система (8) действительно имеет только нулевое решение. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы нетрудно заметить, что при $s = r$ условие 2) эквивалентно тому, что $\det(A_1+A_2) \neq 0$ и матрица $(A_1+A_2)^{-1}(A_2-A_1)$ — нерасширяющая. Таким образом, теорему 2 можно считать распространением на прямоугольный случай (т. е. при $r \neq s$) результатов [9, 10] по исследованию систем с модулями.

Рассмотрим теперь общее уравнение (6). Для него верно следующее утверждение.

Теорема 3. *Если система неравенств*

$$\begin{cases} (|L_1(x+y)| + |L_2(x-y)|)e^k \geq |(A_1+A_2)y + (A_1-A_2)x|, \\ |y| \geq |x| \end{cases} \tag{12}$$

имеет только нулевое решение, то уравнение (6) имеет не более одного решения при любом $b \in \mathbb{R}^s$. *Если, кроме того,* $r = s$, *то уравнение (6) имеет единственное решение при любом* $b \in \mathbb{R}^s$.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть система (8) имеет только нулевое решение, а $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^r$ — два решения уравнения (6). Тогда

$$A_1x_1^+ - A_2x_1^- + \big(|L_1(x_1^+)| - |L_2(x_1^-)|\big)e^k = A_1x_2^+ - A_2x_2^- + \big(|L_1(x_2^+)| - |L_2(x_2^-)|\big)e^k,$$

и следовательно,

$$A_1(x_1^+ - x_2^+) + A_2(x_2^- - x_1^-) = \big(|L_1(x_2^+)| - |L_1(x_1^+)| + |L_2(x_1^-)| - |L_2(x_2^-)|\big)e^k. \tag{13}$$

Положим

$$x = \frac{1}{2}(|x_1| - |x_2|), \quad y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2).$$

Тогда $|x| = \dfrac{1}{2}||x_1| - |x_2|| \leq \dfrac{1}{2}|x_1 - x_2| = |y|$, и, как и при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что

$$x + y = x_1^+ - x_2^+, \quad x - y = x_1^- - x_2^-.$$

Далее из (13) следует

$$\begin{gathered} |\,A_1(x+y) + A_2(y-x)\,| = \big|\,A_1(x_1^+ - x_2^+) + A_2(x_2^- - x_1^-)\,\big| = \\ = \big|\,(|L_1(x_2^+)| - |L_1(x_1^+)| + |L_2(x_1^-)| - |L_2(x_2^-)|)e^k\,\big| \leq \\ \leq \big|\,(|L_1(x_2^+)| - |L_1(x_1^+)|)e^k| + |(|L_2(x_1^-)| - |L_2(x_2^-)|)e^k\,\big| \leq \\ \leq \big|\,|L_1(x_2^+)| - |L_1(x_1^+)|\big|e^k + \big||L_2(x_1^-)| - |L_2(x_2^-)|\,\big|e^k \leq \\ \leq \big|\,L_1(x_2^+) - L_1(x_1^+)|e^k + |L_2(x_1^-) - |L_2(x_2^-)\,\big|e^k = \big(|L_1(x_2^+ - x_1^+)| + |L_2(x_1^- - x_2^-)|\big)e^k = \\ = \big(|L_1(-(x+y))| + |L_2(x-y)|\big)e^k = \big(|L_1(x+y)| + |L_2(x-y)|\big)e^k. \end{gathered}$$

Таким образом, для x, y выполняется система неравенств (12), и поэтому $x = y = 0$. Но тогда $x_1 - x_2 = 2y = 0$ и $x_1 = x_2$, т. е. любые два решения уравнения (6) совпадают.

Пусть теперь $r = s$ и система (12) имеет только нулевое решение. Нужно показать, что уравнение (6) имеет решение при любом $b \in \mathbb{R}^s$. Для этого преобразуем уравнение (6) к виду (7) и воспользуемся теоремой 2. Введем новые матричные переменные Z_1, $Z_2 \in \mathbb{R}^{s\times k}$ и запишем уравнение (6) в виде системы

$$\begin{cases} A_1x^+ + |Z_1|e^k = A_2x^- + |Z_2|e^k + b, \\ Z_1 = L_1(x^+), \\ Z_2 = L_2(x^-). \end{cases} \tag{14}$$

Далее, представляя Z_i, $i=1,2$, в виде $Z_i = Z_i^+ - Z_i^-$ и $|Z_i|$ как $|Z_i| = Z_i^+ + Z_i^-$, преобразуем систему (14) к следующему виду:

$$\begin{cases} A_1x^+ + Z_1^+e^k - Z_2^+e^k = A_2x^- + Z_1^-e^k - Z_2^-e^k + b, \\ -L_1(x^+) + Z_1^+ = Z_1^-, \\ Z_2^+ = L_2(x^-) + Z_2^-. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим через $\mathcal{E}^k$ линейный оператор из $\mathbb{R}^{s\times k}$ в $\mathbb{R}^s$, определяемый умножением на e^k, т. е., если $Z \in \mathbb{R}^{s\times k}$, то $\mathcal{E}^k(Z) = Ze^k$. Тогда систему (15) можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathcal{E}^k & -\mathcal{E}^k \\ -L_1 & \mathcal{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A_2 & -\mathcal{E}^k & \mathcal{E}^k \\ \mathbf{0} & \mathcal{E} & \mathbf{0} \\ L_2 & \mathbf{0} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}^- + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\mathcal{E}$ — тождественный оператор, а $\mathbf{0}$ — нулевой оператор.

Система (16) (эквивалентная уравнению (6)) уже имеет вид (7). Поэтому, по теореме 2, для существования решения этой системы достаточно, чтобы соответствующая система вида (8) имела только нулевое решение. Выпишем ее:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A_1 & \mathcal{E}^k & -\mathcal{E}^k \\ -L_1 & \mathcal{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A_2 & -\mathcal{E}^k & \mathcal{E}^k \\ \mathbf{0} & \mathcal{E} & \mathbf{0} \\ L_2 & \mathbf{0} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \right), \\ \left| \begin{pmatrix} x \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \right| \le \left| \begin{pmatrix} y \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \right|. \end{cases} \tag{17}$$

Расписывая (17) покоординатно, после несложных преобразований получаем следующую систему:

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)y + (A_1 - A_2)x = -2V_1e^k + 2V_2e^k, \\ U_1 = \dfrac{1}{2}L_1(x+y), \\ U_2 = \dfrac{1}{2}L_2(x-y), \\ |x| \le |y|, \quad |V_1| \le |U_1|, \quad |V_2| \le |U_2|. \end{cases} \tag{18}$$

Итак, если система (18) имеет только нулевое решение, то система (14), а значит и уравнение (6), имеют решение при любом $b \in \mathbb{R}^s$.

Предположим теперь, что $x, y \in \mathbb{R}^r$, $V_1, V_2, U_1, U_2 \in \mathbb{R}^{s\times k}$ — некоторое решение системы (18). Тогда

$$\big| (A_1 + A_2)y + (A_1 - A_2)x \big| = \big| -2V_1e^k + 2V_2e^k \big| \le$$
$$\le 2|V_1|e^k + 2|V_2|e^k \le 2|U_1|e^k + 2|U_2|e^k = |L_1(x+y)|e^k + |L_2(x-y)|e^k,$$

и так как $|x| \le |y|$, то пара (x, y) удовлетворяет системе (12). Но тогда $x = y = 0$ и, следовательно, $U_1 = \dfrac{1}{2}L_1(x+y) = 0$, $U_2 = \dfrac{1}{2}L_2(x-y) = 0$ и $|V_1| \le |U_1| = 0$, $|V_2| \le |U_2| = 0$, т. е. система (18) действительно имеет только нулевое решение.

Замечание. Проводя преобразования аналогичные использованным при доказательстве теоремы 2, можно показать, что условие существования только нулевого решения (12) эквивалентно тому, что уравнение

$$A_1 x^+ + |L_1(x^+) + B_1| e^k = A_2 x^- + |L_2(x^-) + B_2| e^k + b \tag{19}$$

имеет не более одного решения при любых $b \in \mathbb{R}^s$, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{s\times k}$ (а при $s = r$ имеет единственное решение). Уравнение (6) получается из (19) при $B_1 = B_2 = 0$. Поэтому, скорее всего, условия теоремы 3 не являются в общем случае необходимыми.

Используя теорему 3, нетрудно выписать достаточные условия единственности (а при $m = n$ и существования) решений для уравнений (4), (5), а значит и для исходной интервальной линейной системы (0). В общем случае эти условия получаются достаточно громоздкими и практически не поддаются упрощению. Однако в одном частном случае, когда уравнение (5) имеет вид (7), они могут быть записаны достаточно компактно.

Введем следующее определение.

Определение 2. *Матрицу* $\mathbf{A} = ([\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]) \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ *будем называть матрицей постоянных знаков, если* $\underline{a}_{ij}\overline{a}_{ij} \geq 0$ *для всех* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Заметим, что в этом случае в разложении $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = 0$. Следовательно, уравнение (5) (но не (4)) имеет вид (7) и можно использовать теорему 2. После несложных преобразований системы (7) приходим к более сильному утверждению:

Следствие. *Пусть матрица* $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ *является матрицей постоянных знаков и*

$$A_c = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}), \quad \Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}), \quad \Delta_0 = \frac{1}{2}(|\overline{A}| - |\underline{A}|).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) интервальная линейная система (0) имеет не более одного алгебраического решения при любом $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$*;*

2) система уравнений и неравенств

$$\begin{cases} |A_c| y_1 = \Delta x_1, \\ A_c y_2 = \Delta_0 x_2, \\ |x_1 + x_2| \leq |y_1 + y_2|, \\ |x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_2| \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Если, кроме того, $m = n$*, то эти условия также эквивалентны следующему:*

3) интервальная линейная система (0) имеет единственное алгебраическое решение при любом $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$*.*

Наконец, отметим в заключение, что, если $\underline{A} \leq \overline{A}$, т. е. в интервальной системе матрица правильная, то $\Delta = |\Delta_0|$.

Список литературы

[1] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. *Упорядоченные векторные пространства.* Наука, Новосибирск, 1978.

[2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* Мир, М., 1987.

[3] Шарый С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, №3, 1997, 51–61.

[4] Шарый С. П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем. *Вычисл. технологии*, **4**, №4, 1999, 83–113.

[5] Gardeñes E., Trepat A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals. *Computing*, **24**, 1980, 161–179.

[6] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval spase $\mathbb{IR}$. *Computing Suppl.*, **2**, 1980, 33–49.

[7] Kupriyanova L. V. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system. *Reliable Computing*, **1**, 1995, 15–31.

[8] Lakeyev A. V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic. In: *Reliable Computing 1995. Supplement (Extended Abstracts of APIC'95: Inter. Workshop on Appl. of Interval Comput., El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995)*, El Paso, 1995, 130–133.

[9] Neumaier A. *Interval methods for systems of equations.* Cambridge University Press, 1990.

[10] Rohn J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra and its Appl.*, **126**, 1989, 39–78.

[11] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic. *Reliable Comput.*, **2**, 1996, 3–33.

[12] Shary S. P. Algebraic approach in the "outer problem" for interval linear equations. *Reliable Comput.*, **3**, 1997, 103–135.

Поступила в редакцию 22 декабря 1998 г.