

Теоретический и численный анализ в краевых задачах фильтрации

В. Н. Эмих¹

Обсуждается роль современных вычислительных технологий в формировании нового направления подземной гидродинамики — многопараметрических краевых задач фильтрации, специфика которых исследуется на двух конкретных задачах. При этом основное внимание уделяется взаимосвязи аналитических подходов и численных расчётов при математическом моделировании фильтрационных течений с подвижными границами.

Ключевые слова: краевые задачи фильтрации, параметры конформных отображений, горизонтальный дренаж, подвижные границы, критические режимы течения.

Введение

Исследование течений жидкостей в пористых средах, начавшееся с монографии [1], было поставлено на твёрдую математическую основу в 1920-х гг. В основополагающих работах Н.Н. Павловского [2] и Н.Е. Жуковского [3] оно впервые осуществлялось на качественно новом уровне — в рамках смешанных краевых задач математической физики, при решении которых широко использовался аппарат конформных отображений. В дальнейшем такие разработки заняли центральное место в подземной гидродинамике.

Математическое моделирование фильтрационных течений ориентировано в конечном итоге на решение конкретных проблем гидротехники, гидромелиорации, водоснабжения, нефтедобычи. Подобная практическая направленность исследований определяет роль численных расчётов, при которых выявляются закономерности изучаемых процессов. На этапе формирования подземной гидродинамики аналитические зависимости, составляющие решение краевых задач фильтрации, для таких расчётов были доступны. Однако ограниченность имеющихся в то время вычислительных ресурсов стала сдерживать дальнейшее развитие фильтрационных исследований.

Появление вычислительных машин и персональных компьютеров позволило приступить к решению многопараметрических краевых задач фильтрации. Широкомасштабные разработки в этом направлении, начатые в 1960-х гг. в лаборатории фильтрации Института гидродинамики СО АН СССР под руководством П.Я. Полубариновой-Кочиной, осуществляются уже на протяжении нескольких десятилетий.

1. Специфика многопараметрических краевых задач фильтрации с подвижными границами

Начальным этапом математического моделирования фильтрационных течений является схематизация этих течений с использованием физических предпосылок и постановка

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
Контактный e-mail: emikh@hydro.nsc.ru

описывающих течения краевых задач. В рамках последних определяется функциональная зависимость комплексного потенциала течения от комплексной координаты точек области фильтрации. Такая связь устанавливается, как правило, в параметрическом виде с использованием методов конформных отображений.

Единственной полноценной основой исследования процессов фильтрации является прямая постановка соответствующих краевых задач, предусматривающая расчёт итоговых характеристик течения в непосредственной связи с определяющими физическими параметрами. В этом плане возникает проблема нахождения неизвестных параметров отображений, содержащихся в формулах, получаемых при решении задач. Данная фактически самостоятельная процедура представляет собой наиболее трудоёмкий этап, выполнение которого сводится к решению систем трансцендентных уравнений. Сложность такой операции возрастает с увеличением числа искомых параметров, определяемого количеством особых точек задачи. С отмеченной особенностью многопараметрических краевых задач связано их принципиальное отличие от задач периода становления подземной гидродинамики, результатами решения которых были сравнительно простые и доступные для инженерных расчётов аналитические зависимости.

С середины XX столетия внимание исследователей стали привлекать дренируемые фильтрационные течения с подвижными границами. Существенным фактором формирования таких течений являются горизонтальные дрены и скважины, сооружаемые при мелиорации сельскохозяйственных земель, отборе грунтовых вод для бытовых и хозяйственных нужд, нефтедобыче. В краевых задачах эти устройства моделируются точечными стоками. При создаваемом стоками понижении давления под их прямым воздействием оказываются именно подвижные границы потока, дестабилизация которых приводит к прорыву в дренах атмосферного воздуха, пластового газа или посторонних жидкостей. Это обстоятельство налагает ограничения на интенсивность отбора жидкостей, устанавливаемые при расчёте *критических режимов дренирования*. Последние определяют рамки реализации исследуемого течения в описывающей его краевой задаче. Детальный анализ критических режимов фильтрационных течений со свободной поверхностью выполнен автором в монографии [4].

На рубеже XIX и XX столетий предметом изучения становятся линзообразные скопления пресных грунтовых вод над солёными водами. На протяжении десятилетий расчёты таких линз производились в рамках одномерных гидравлических схем, обеспечивающих приемлемую точность определения запасов пресной воды в линзах, но не приспособленных для моделирования течений, в формировании которых существенную роль играют вертикальные компоненты.

Подходы к исследованию двумерной фильтрации жидкостей различной плотности были разработаны П.Я. Полубариновой-Кочиной. Ею сформулировано [5] краевое условие на линии раздела между пресными и солёными грунтовыми водами, основанное на предположении о неподвижности последних и непрерывном изменении давления при переходе через линию раздела.

При наличии в потоке двух подвижных границ каждая из них находится под воздействием дренажа. Вопрос заключается в том, какая из границ при увеличении дебита дрены дестабилизируется раньше другой, иными словами, прорвётся ли в неё в первую очередь воздух или солёная вода. Ключом к решению этой дилеммы стал выявленный в работе [6] и подлежащий первоочередному расчёту *двойной критический режим*. Он состоит в том, что при определённой глубине дренажного стока и его фильтрационном расходе критические режимы течения возникают одновременно на обеих подвижных

границах. В зависимости от того, расположена ли дрена в данном конкретном случае выше или ниже своего предвычисленного положения в двойном критическом режиме, максимально возможное значение её расхода рассчитывается в *простом критическом режиме*, связанном соответственно со свободной поверхностью или с поверхностью раздела между пресными и солёными водами. Далее расчёт течения к дренам может быть выполнен в *нормальном режиме дренирования* при любом расходе дрена в установленном интервале его допустимых значений.

Проиллюстрируем описанные подходы на двух конкретных задачах.

2. Инфильтрационная кайма пресных вод над солёными грунтовыми водами

В почве, содержащей слой толщиной M_0 пресных грунтовых вод с плотностью ρ_1 над солёными водами с плотностью ρ_2 , с некоторого момента начинается инфильтрация с равномерно распределённой по площади интенсивностью ϵ . Одновременно в слое на высоте T_0 над поверхностью солёных вод включаются с одинаковыми фильтрационными расходами, компенсирующими инфильтрацию, равноудалённые горизонтальные трубчатые дренажи, моделируемые точечными стоками. Будем считать, что солёные воды изолированы от внешних источников и стоков, вследствие чего остаётся неизменным их первоначальный объём. Сохраняется и объём пресных вод, слой которых трансформируется в так называемую кайму. Периодичность течения в кайме, обусловленная принятыми допущениями, позволяет ограничиться его изучением в одном из полупериодов (рис. 1).

Краевая задача для описанного течения состоит в нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости фильтрации, ψ — функция тока), отнесённого к величине κL (κ — коэффициент фильтрации грунта, L — половина расстояния между соседними дренами) как аналитической в области течения функции комплексной координаты $z = x + iy$, отнесённой к L , при граничных условиях [7]

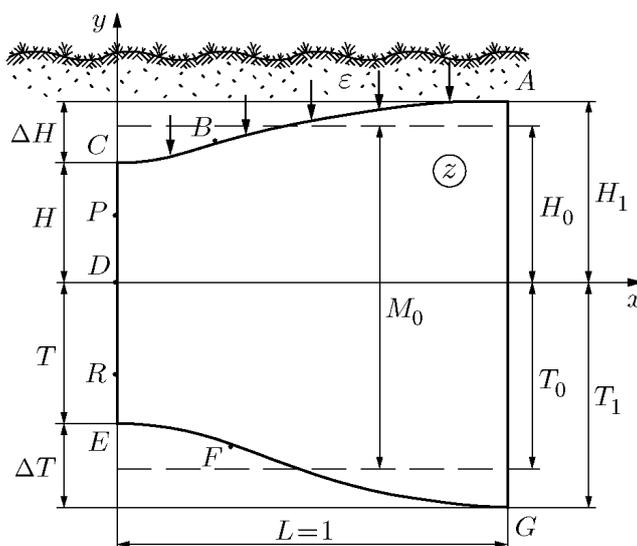


Рис. 1. Схема течения в инфильтрационной кайме пресных вод

$$CD : x = 0, \quad \psi = 0; \quad ED : x = 0, \quad \psi = \epsilon; \quad AG : x = 1, \quad \psi = \epsilon;$$

$$AC : \varphi + y = 0, \quad \psi - \epsilon x = 0; \quad EG : \varphi - \rho y = \text{const}, \quad \psi = \epsilon \quad (\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1).$$

Первое соотношение на линии раздела EG между пресными и солёными водами является упомянутым выше условием [5].

При решении поставленной задачи был использован классический метод, разработанный П.Я. Полубариновой-Кочиной и основанный на аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [8]. Его целью является нахождение функций $\Omega = d\omega/d\zeta$ и $Z = dz/d\zeta$, определённых в полуплоскости $\text{Im } \zeta \geq 0$ комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2). В рассматриваемой задаче в работе [7] для этих функций получены зависимости

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -2c_1 \frac{F_1(\zeta)}{d-\zeta} \lambda(\zeta), \quad \frac{dz}{d\zeta} = i c_1 \frac{F_2(\zeta)}{d-\zeta} \lambda(\zeta), \quad \lambda(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta-p)(\zeta-r)}{(\zeta-g)\zeta(\zeta-1)}},$$

$$F_1(\zeta) = \sigma U - 1/U, \quad F_2(\zeta) = \alpha U + \beta/U,$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\epsilon+\rho} + \sqrt{\epsilon(1+\rho)}}{\sqrt{\epsilon+\rho} - \sqrt{\epsilon(1+\rho)}}, \quad \alpha = \frac{\sigma-1}{\epsilon} + \sigma + 1, \quad \beta = \frac{\sigma-1}{\epsilon} - \sigma - 1,$$

$$U = \exp \left[\frac{W(\zeta)}{2} \right], \quad W(\zeta) = i c_0 \int_0^\zeta \frac{(b-u)(u-f)du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(1-u)}}, \quad c_1 > 0. \quad (1)$$

Для функции $\lambda(\zeta)$ выбирается ветвь, положительная при $\zeta > r$.

При заданных значениях ϵ и ρ зависимости (1) содержат неизвестные постоянные c_0 , c_1 и аффиксы b , g , d , f , p , r особых точек. Прямая постановка рассматриваемой задачи предусматривает определение всех указанных параметров, относительно которых составлена следующая система уравнений:

$$\int_0^1 \frac{(b-u)(u-f)du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(1-u)}} = 0,$$

$$c_0 \int_g^0 \frac{(b-u)(u-f)du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)(-u)(1-u)}} = \ln \sigma,$$

$$c_0 \int_1^d \frac{(b-u)(u-f)du}{(p-u)(r-u)\sqrt{(u-g)u(u-1)}} = \ln \frac{\alpha}{\beta},$$

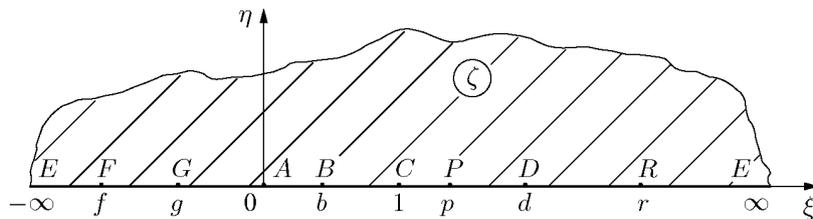


Рис. 2. Полу плоскость вспомогательной комплексной переменной

$$\frac{c_0(p-f)(p-b)}{\sqrt{(p-g)p(1-p)}} = r-p, \quad \frac{c_0(r-f)(r-b)}{\sqrt{(r-g)r(1-r)}} = r-p,$$

$$c_1 = \frac{\epsilon\sqrt{\alpha\beta}}{2\pi(\beta\sigma + \alpha)} \sqrt{\frac{(d-g)d(d-1)}{(d-p)(r-d)}},$$

$$-\int_0^1 y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = H_0, \quad -\int_{-\infty}^g y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = T_0. \quad (2)$$

Первые пять уравнений системы (2) получены с использованием известных элементов области содержащейся в (1) функции $W(\zeta)$ (рис. 3) — промежуточной при отображении годографа скорости на полуплоскость. Шестое уравнение — следствие равенства фильтрационного расхода дрены поступлению инфильтрационных вод в пределах области фильтрации. Последние два уравнения системы получаются из допущения о сохранении первоначальных объёмов пресных и солёных грунтовых вод в процессе формирования каймы.

Разработанная и реализованная в компьютерной программе процедура решения системы (2) при заданных величинах ϵ, ρ сводится к нахождению параметров g, r из подсистемы двух последних уравнений, однозначная разрешимость которой при некоторых ограничениях на искомые параметры устанавливается численно. Для каждой пары параметров g, r , фиксируемых в процессе численного решения упомянутой подсистемы, множители c_0, c_1 и параметры отображения b, d, f, p однозначно, как устанавливается аналитически, определяются из первых шести уравнений системы (2). Все аспекты, касающиеся её разрешимости, изложены в работе [7].

Приведём результаты расчётов течения в кайме пресных вод при $M_0 = 2, H_0 = 0.3, \rho = 0.02$. В каждом конкретном варианте заданию подлежит также интенсивность инфильтрации ϵ , для которой предварительно должен быть установлен интервал её допустимых значений.

На первом этапе расчётов, выполненных для двойного критического режима, найдены максимально возможная величина $\epsilon = \epsilon_{**} = 0.5509$ и глубина дрен $H_* = 0.5468$, при которой в указанном режиме достигается данный максимум. При всех других значениях $\epsilon \in (0, \epsilon_{**})$ дрены функционируют на этой глубине в нормальном режиме дренирования.

При выбранном значении $H_0 = 0.3$ максимально допустимое значение $\epsilon_* = 0.2596$ параметра ϵ достигается в простом критическом режиме, связанном с кривой депрессии.

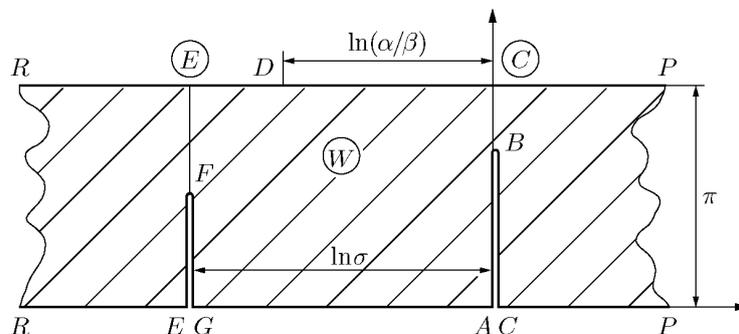


Рис. 3. Промежуточная область при отображении годографа скорости фильтрации на полуплоскость

Амплитуда ΔH изменения ординаты точек кривой (см. рис. 1) уменьшается от 0.4656 в двойном критическом режиме до 0.3010 в простом критическом режиме, оставаясь при этом значительной, тогда как величина ΔT убывает от 0.6260 до 0.0945, и таким образом при более высоком положении дрен их воздействие на солёные воды значительно ослабевает. В наибольшей степени интенсивность дренирования отражается на минимальной толщине $M = H + T$ слоя пресных вод: для обсуждаемого расчётного варианта $M = 1.1796$ в наиболее напряжённом двойном критическом режиме, а при $H_0 = 0.3$ вычислено $M = 1.7151$ в простом критическом режиме, возникающем при $\epsilon = \epsilon_* = 0.2596$, и $M = 1.9434$ в нормальном режиме дренирования при $\epsilon = 0, 1$.

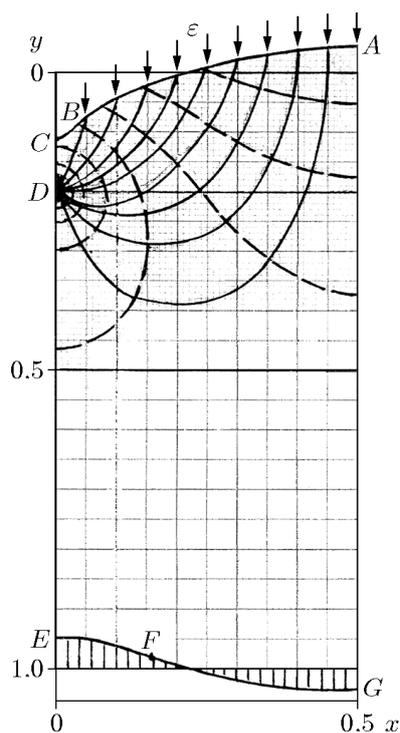
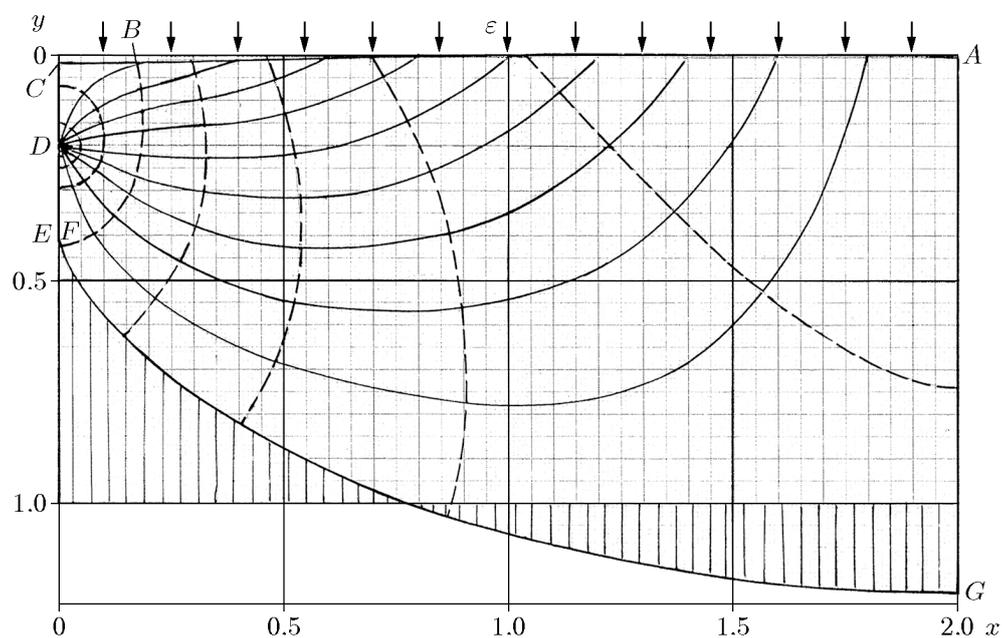
Наглядное представление о структуре двумерных фильтрационных течений позволяют получить гидродинамические сетки, представляющие собой взаимно-ортогональные семейства эквипотенциалей и линий тока. Расчёт таких сеток осуществляется в рамках соответствующих краевых задач и фактически является самостоятельной задачей. Процедура расчёта сводится к реализации зависимости $z(\omega)$. При параметрическом представлении решения рассматриваемой краевой задачи эта зависимость $z(\omega)$ реализуется по схеме $\zeta(\omega) \rightarrow z(\zeta)$. Наибольшие осложнения связаны, как правило, с её первым этапом, на котором нахождение аффикса $\zeta = \xi + i\eta$ той или иной узловой точки сетки с заданным в ней комплексным потенциалом $\omega = \varphi_i + i\psi_j$ сводится к численному решению системы уравнений относительно ξ и η

$$\operatorname{Re}(\omega(\xi + i\eta)) = \varphi_i, \quad \operatorname{Im}(\omega(\xi + i\eta)) = \psi_j. \quad (3)$$

Сопоставим между собой гидродинамические сетки течения при $L = 0.5$ и $L = 2$. В связи с тем, что величина L , являвшаяся ранее масштабом приведения геометрических характеристик области фильтрации, теперь варьируется, все эти характеристики отнесены к средней толщине каймы M_0 . Расчет сеток производится в приведённых значениях потенциала и функции тока. Первая из этих величин, отсчитываемая от её нулевого значения в наивысшей точке каймы A , отнесена к значению потенциала в точке с координатами $x = 0, y = 0.005$, условно принятой за верхнюю точку контура дрены. Масштабом приведения функции тока, равной нулю на участке границы CD , является её максимальное значение ϵL на участке $AGED$. Изолинии сетки для обеих функций рассчитаны с шагом 0.1. Интенсивность инфильтрации в расчётных вариантах задается близкой к максимально допустимой, что позволяет отчётливей выявить воздействие дренажа на подвижные границы и фильтрационные характеристики потока. В обоих вариантах принято $\rho = 0.2, H_0 = 0.2$.

Для варианта с $L = 0.5$ в двойном критическом режиме вычислено $\epsilon_{**} = 0.5509, H_* = H_0(\epsilon_{**}) = 0.2734$. Так как $H_0 < H_*$, то при выбранной глубине дренажного стока простой критический режим возникнет на кривой депрессии при $\epsilon = \epsilon_* = 0.3790$. При расчётах течения в нормальном режиме дренирования принято $\epsilon = 0.3750$; область фильтрации для этого случая представлена на рис. 4. Проявлением близости расчётного режима течения к критическому является сближение точки перегиба B кривой депрессии с её нижней точкой C : при выбранном значении ϵ имеем $x_B = 0.0159, y_B = 0.0976, x_C = 0, y_C = 0.0857$.

Во втором варианте, при $L = 2, \epsilon_{**} = 0.009297, H_* = 0.0534$, по мере интенсификации дренажа критическая ситуация возникает на линии раздела при $\epsilon_* = 0.008352$. Течение, представленное на рис. 5, рассчитано на грани дестабилизации линии раздела при $\epsilon = 0.008350$. Её точка перегиба F с координатами $x = 0.0019, y = -0.2105$ близка к наивысшей точке границы E : $y_E = -0.2049$.

Рис. 4. Гидродинамическая сетка течения в кайме при $L = 0.5$ Рис. 5. Гидродинамическая сетка течения в кайме при $L = 2$

При сравнении сеток обнаруживается зависимость структуры течения от расстояния между дренами. В первом варианте при относительно частом дренаже поток является существенно двумерным в пределах всей области фильтрации, тогда как во втором варианте течение приобретает преимущественно горизонтальную ориентацию.

3. Дренаж в потоке грунтовых вод через завесу

В 1970-х гг. при разработке автором математических моделей двумерной фильтрации к горизонтальным дренам была обнаружена возможность формирования на свободной поверхности потока над дренами локальной депрессии на фоне общего понижения уровня грунтовых вод; в приведённых выше примерах расчёта эта деталь особенно отчетливо проявляется на рис. 4. Её связь с увеличением расстояния между дренами и их активизацией удалось расшифровать аналитически в рамках схемы притока к одиночной дрене в неограниченном по глубине и протяжённости пласте с поверхности, затопленной всюду, кроме симметрично расположенной над дренами полосы [9]. Как было установлено в ходе исследования, по мере увеличения фильтрационного расхода дрены локальная депрессия углубляется, а расположенный в её пределах участок выполаживания кривой депрессии сокращается. В итоге локальная депрессия представляет собой реакцию на дренаж, крайнее проявление которой наступает по достижении расходом определённого значения. При этом на кривой депрессии непосредственно над дренами образуется точка заострения, а на всём участке от указанной точки до дренажного стока давление становится меньше атмосферного и его дальнейшее сколь угодно малое понижение приведёт к прорыву воздуха в дренаж. Возникает отмеченный выше и описанный ещё в 1930-х гг. В.В. Ведерниковым [10] критический режим дренирования, на котором исходная модель течения исчерпывает себя.

Что касается решения краевой задачи, то продолженное за рамки критического режима по параметрам отображения оно описывает течения, также происходящие в критическом режиме. Подобные течения, примеры которых приведены в монографии [4], являются неустойчивыми, физически не реализуемыми и сохраняют лишь оболочку физического содержания. Наполнение оболочки в данном случае привело к схеме дренажа в потоке грунтовых вод через завесу.

Математическая модель течения изложена в работе [11]. В её рамках изучены трансформации самой фильтрационной схемы и годографа скорости, сопутствующие интенсификации дренажа. В дальнейшем на базе решения краевой задачи был разработан и реализован в компьютерной программе алгоритм расчёта гидродинамической сетки.

На рис. 6 представлена картина течения для одной комбинации исходных параметров (детали расчётов будут пояснены ниже). Грунтовые воды поступают с поверхности, затопленной при $x \geq l$, и под действием подпора, действующего справа от завесы, перетекают через неё. Слева от завесы подпор отсутствует, и часть потока, не захваченная дренажным стоком D , свободно фильтруется вниз на бесконечность.

Зависимости $z(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ получены в работе [11] в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{Q_d}{\pi} \left[\frac{\sqrt{a}}{f} \int_a^{\zeta} \frac{(u-f) du}{u \sqrt{u-a}} + i \frac{a}{r} \int_{\zeta}^1 \frac{(u-r) du}{u(u-a) \sqrt{1-u}} \right] - Q_f = \\
 &= \frac{2Q_d}{\pi} \left(\frac{a}{f} \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\zeta}{a} - 1} \right) - Q_f + i \frac{2}{\pi} \left(Q_d \operatorname{arth} \sqrt{1-\zeta} + Q_f \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1-a}} \right), \\
 \omega &= \frac{Q_d}{\pi} \frac{a}{r} \int_{\zeta}^1 \frac{(u-r) du}{u(u-a) \sqrt{1-u}} + Q = \frac{2}{\pi} \left(Q_d \operatorname{arth} \sqrt{1-\zeta} + Q_f \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1-a}} \right) + i Q. \quad (4)
 \end{aligned}$$

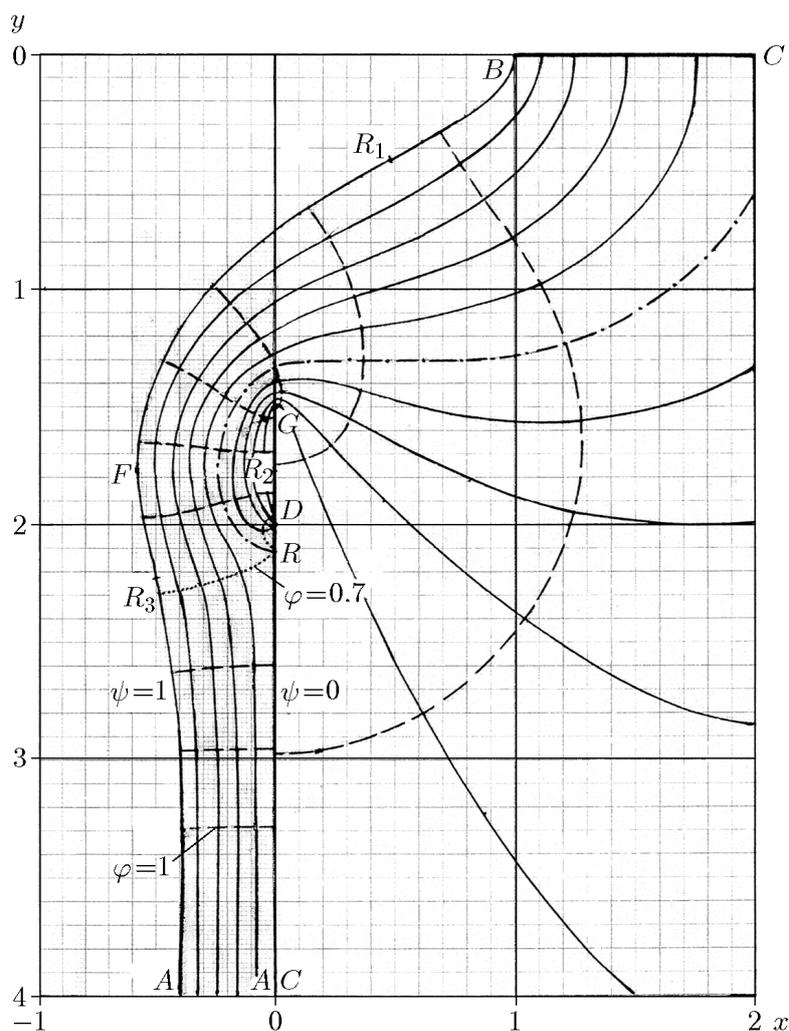


Рис. 6. Гидродинамическая сетка потока через завесу

Функции z и ω приведены соответственно к l и κl . Область функции ω и полуплоскость переменной ζ изображены на рис. 7 и 8.

Содержащиеся в решении неизвестные параметры отображения определяются из системы уравнений, фиксирующих абсциссу $l = 1$ точки B и ординаты d, s точек D, G в плоскости z , приращение функции ω при обходе точки A и обращение в бесконечность скорости фильтрации на вершине завесы G . Наряду с вышеназванными входными параметрами задаётся фильтрационный расход Q_d дрены D . Его величина лимитируется значением Q_d^* в критическом режиме, при поглощении дреной всего фильтрационного потока. Величина Q_f вычисляется попутно с нахождением параметров отображения. Другой предельной ситуацией является свободный переток через завесу при $Q_d = 0$. В общем случае $Q_d \in (0, Q_d^*)$.

Сетка, рассчитанная при $d = 2, s = 1.5, Q_d = Q_f = 0.4056$, отражает контраст между интенсивной фильтрацией в окрестности дренажного стока и замедленным течением справа от завесы. Линия тока, разделяющая дренируемый и свободный потоки, изображена на рис. 6 штрихпунктирной линией. Функция тока ψ приведена к полному фильтрационному расходу потока $Q = Q_d + Q_f$; это максимальное значение функция ψ принимает на кривой депрессии AB . Масштабирование потенциала φ произведено с та-

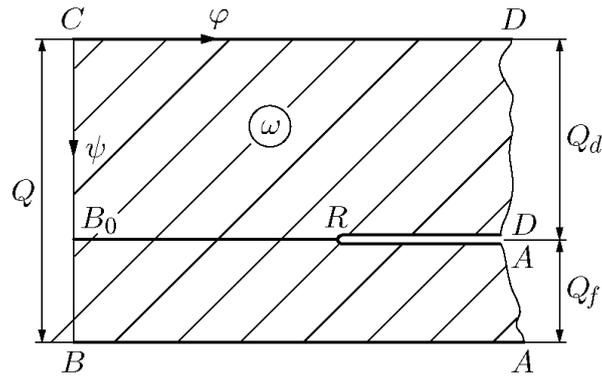


Рис. 7. Область комплексного потенциала

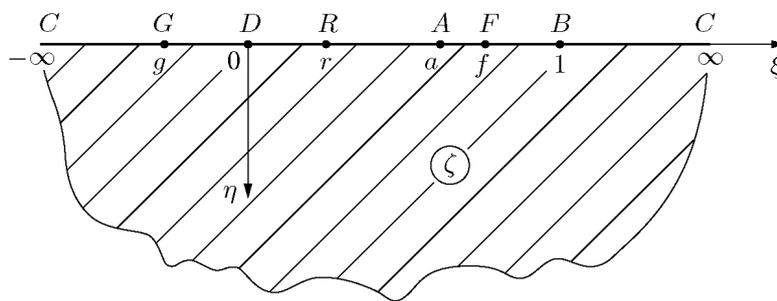


Рис. 8. Полу плоскость вспомогательной комплексной переменной

ким расчётом, чтобы в точке $R(0, 2.1129)$ разветвления потоков на внешней поверхности завесы AD приведённый потенциал принимал значение 0.7. Эквипотенциаль $\varphi = 1$ в свободном потоке близка к горизонтальному отрезку: её координаты заключены в интервале $(3.2812, 3.2834)$. Сам же поток приближается здесь к одномерному нисходящему, а кривая депрессии — к своей вертикальной асимптоте $x = -0.4056$.

В дренируемой части потока эквипотенциали $\varphi = 0.8, 0.9, 1.0$ близки к дренажному стоку D , в связи с чем на рис. 6 отсутствуют.

К характерным деталям течения относятся крайняя левая точка кривой депрессии $F(-0.5731, 1.7738)$ и две её точки перегиба: $R_1(0.4806, 0.4519)$, $R_3(-0.5052, 2.2290)$. Вторая из них при ослаблении дренирования переходит на участок RA внешней поверхности завесы, становясь точкой максимума скорости фильтрации, а точка F располагается на этом же участке, будучи точкой максимума давления. Анализ трансформаций течения при изменениях интенсивности дренажа изложен в работе [11].

Как и в задаче о кайме, для вычисления координат узлов сетки был составлен и запрограммирован специальный алгоритм, основу которого составляет определение из второго уравнения (3) координат ξ_i, η_j точек сетки в плоскости ζ при заданной совокупности значений комплексного потенциала $\omega = \varphi_i + i\psi_j$. При этом используется второе уравнение (4). Решение уравнений (3) осуществляется с учётом разветвления течения на два потока. В обеих описанных краевых задачах при расчёте сеток в исходную информацию включаются содержащиеся в формулах параметры отображения — аффиксы особых точек. Используются также вычисляемые предварительно по основной программе аффиксы точек выхода эквипотенциалей и линий тока на участки границы области течения. В ходе расчёта гидродинамических сеток по формуле комплексной скорости

фильтрации $w = w_x - i w_y = d\omega/dz$ [8] вычисляются компоненты скорости в узловых точках сеток.

4. Вычислительные операции

На этапах построения решения краевой задачи, вывода уравнений относительно параметров отображения, разработки вычислительного алгоритма и подготовки полученных зависимостей к расчётам все операции производятся на аналитической основе. Что касается численных процедур, то они играют исключительно важную роль при решении систем уравнений относительно параметров отображения и при последующих расчётах фильтрационных характеристик течения. Такое сочетание аналитических и численных подходов является характерной особенностью многопараметрических краевых задач и в полной мере присуще изложенным выше краевым задачам.

Как уже отмечалось, нахождение неизвестных параметров конформных отображений представляет собой наиболее трудоёмкий этап моделирования течений. Подходы к его выполнению индивидуальны для каждой конкретной фильтрационной схемы.

В краевой задаче определению параметров должно предшествовать обоснование разрешимости системы уравнений относительно этих параметров. Каждый из них связывается с одним из уравнений $F(\mu) = 0$, однозначная разрешимость которого обеспечивается устанавливаемой аналитически или численно монотонностью функции $F(\mu)$ и различием её знаков на концах интервала изменения искомого параметра μ .

Для решения подобных уравнений апробирована стандартная процедура, состоящая из нескольких этапов. Вначале последовательным делением исходного интервала изменения параметра μ в заданном отношении выделяется сокращённый интервал, на концах которого, как и на концах исходного интервала, функция $F(\mu)$ имеет разные знаки. Далее для нахождения параметра μ с предписанной точностью выполняется итерационный цикл, состоящий из линейной и серии квадратичных интерполяций.

Для вычисления эллиптических интегралов и функций используются экономичные алгоритмы, изложенные в работах [12].

Специального подхода требуют содержащиеся в расчётных формулах несобственные интегралы, каждый из которых необходимо привести к расчётному виду. Среди них пре-

обладают интегралы вида $I = \int_a^b f(u) du / \sqrt{(u-a)(b-u)}$, где функция $f(u)$ непрерывна.

Особенности подынтегральной функции на обоих концах промежутка интегрирования устраняются одновременно посредством замены переменной $u = a + (b-a)v^2(2-v^2)$,

в результате которой получим $I = 4 \int_0^1 f[u(v)] dv / \sqrt{2-v^2}$. В интеграле по бесконечному

промежутку $[a, \infty)$ производится замена $u = a/(v^2(2-v^2))$, переводящая исходный промежуток интегрирования в тот же, что и для других несобственных интегралов, промежуток $[0, 1]$. Такая унификация избавляет от необходимости переприсвоения пределов интегрирования для очередного интеграла, что при поистине калейдоскопическом чередовании вычисляемых интегралов способствует значительному сокращению времени расчётов.

Собственно интегрирование осуществляется по стандартной программе, основанной на формуле Симпсона. Однако эффективность, а подчас и сама возможность выполне-

ния этой программы с предписанной точностью зависят от поведения подынтегральных функций. Их относительно быстрое изменение происходит, как правило, вблизи концов единого для всех интегралов промежутка интегрирования $[0, 1]$, хотя оно существенно сглаживается в результате вышеуказанных замен переменной. С учётом этого исходный промежуток разбивается на частичные промежутки с их постепенным сокращением по мере приближения к конечным точкам. Подобная “настройка” также ускоряет расчёты.

Заключение

С появлением в 1922 г. фундаментальной монографии Н.Н. Павловского [2] теория фильтрации оформилась в самостоятельный раздел гидродинамики. Моделирование фильтрационных течений осуществляется с этого времени в рамках смешанных краевых задач теории аналитических функций. Исходным этапом их решения является нахождение зависимости комплексного потенциала исследуемых течений от комплексной координаты точек области фильтрации. На начальном этапе развития данного направления основное внимание уделялось построению решений краевых задач с использованием классических математических методов, среди которых центральное место заняли конформные отображения. Получаемые при этом формулы ориентированы на расчёт итоговых характеристик моделируемых течений и изучение зависимости этих характеристик от факторов, формирующих течение, что определяет роль вычислительных операций в развитии фильтрационных исследований, особенно значительную при решении многопараметрических краевых задач фильтрации. Базовые зависимости, получаемые при построении решения таких задач, сами по себе остаются “мертвым грузом”, и только кропотливые, подчас весьма трудоёмкие вычислительные процедуры позволяют раскрыть богатое содержание задач и провести детальный гидродинамический анализ изучаемых течений. Формированию наглядных представлений об их структуре способствуют расчёты гидродинамических сеток течений. В настоящей работе изложенные подходы иллюстрируются на двух конкретных задачах.

Список литературы

- [1] DARCY H. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Paris, 1856. 647 p.
- [2] ПАВЛОВСКИЙ Н.Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и её основные приложения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 3–352.
- [3] ЖУКОВСКИЙ Н.Е. Просачивание воды через плотины // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1950. Т. 7. С. 297–332.
- [4] ЭМИХ В.Н. Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука, 1993. 213 с.
- [5] ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА П.Я. О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1940. № 6. С. 73–80.
- [6] ЭМИХ В.Н. Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и её приложения // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 494–504.
- [7] КАПРАНОВ Ю.И., ЭМИХ В.Н. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солёными // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 5. С. 79–93.

- [8] ПОЛУВАРИНОВА-КОЧИНА П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
- [9] ЭМИХ В.Н. О нескольких гидродинамических моделях дренажа // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 6. С. 1047–1056.
- [10] ВЕДЕРНИКОВ В.В. Теория фильтрации и её применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
- [11] ЭМИХ В.Н. Дренаж в потоке грунтовых вод через завесу // Прикл. механика и техн. физика. 2002. Т. 43, № 4. С. 106–114.
- [12] BULIRSCH R. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions // Numer. Math. 1965. В. 7, Н. 1. S. 78–90; Н. 4. S. 353–354; 1969. В. 13, Н. 4. S. 305–315.

*Поступила в редакцию 29 ноября 2013 г.,
с доработки — 11 августа 2014 г.*

Theoretical and numerical analysis in boundary-value problems of filtration

Emikh Vladimir N.¹

Purpose: The main objective of the paper is to discuss the role of modern computer technologies in establishing a new direction in subterranean hydrodynamics: multiparameter boundary-value problems of seepage flows with moving boundaries towards horizontal drains.

Originality: The specific of such problems is the presence of critical regimes of drainage prior to destabilization of the flow. These regimes establish restriction to draining intensity and determine frameworks for investigation of the flow within the described boundary-value problem.

Methodology: Particular attention has been given to intercommunication of analytic approaches and numerical computations in mathematic simulation of seepage flows. Major computer codes used in this study are described in the special section of the paper. Computation technologies play the leading part in determination of unknown conformal mapping parameters which are instrumental in construction for solution of the problem.

Findings: The author's elaborations have been illustrated on two boundary-value problems of filtration with drainage. In the first one, the stationary plane filtration in a fresh groundwater fringe above immovable saline water with uniform infiltration is studied. Specific of such flows consist of the presence of two unknown moving boundaries: the depression curve and the interface between fresh and saline water. The second problem deals with construction and investigation of the mathematical model addressed the flow of ground water from surface of the Earth over a vertical impermeable screen. The flow in this case intercepts with a drain located on the screen surface. For both problems, the hydrodynamic nets are presented which contain clear information on the flow structure.

Keywords: boundary-value problem, conformal mapping parameters, horizontal drainage, moving boundaries, critical regimes of flow.

Received 29 November 2013

Received in revised form 11 August 2014

¹*Laurent'ev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia*
Corresponding author: Emikh Vladimir N., e-mail: emikh@hydro.nsc.ru