

Аппроксимационные свойства модели микротрубочки цитоскелета

И. А. Борило¹, Е. Е. Слядников^{1,2}

¹Томский государственный университет, Россия

²Томский филиал Института вычислительных технологий СО РАН, Россия

e-mail: boriloilya@yandex.ru, opi@hq.tsc.ru

Борило И.А., Слядников Е.Е. Аппроксимационные свойства модели микротрубочки цитоскелета // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 3–13.

Показано, что микротрубочку цитоскелета можно описывать в виде рекуррентного перцептрона с симметричными связями и она может выполнять предсказание элементов последовательности по заданному числу предыдущих элементов последовательности.

Ключевые слова: микротрубочка цитоскелета, аппроксимация, рекуррентный перцептрон.

Borilo I.A., Slyadnikov E.E. Approximation ability of cytoskeleton microtubule model // Comput. Technologies. 2014. Vol. 19, No. 2. P. 3–13.

In this article we describe a cytoskeleton microtubule as a recurrent perceptron. Ability of this recurrent perceptron for sequence prediction is analyzed.

Key words: cytoskeleton microtubule, approximation, recurrent perceptron.

Введение

Понимание механизмов обработки информации живыми организмами является важной задачей в области современной биологии. Один из вопросов, возникающих при решении данной задачи, касается механизма внутриклеточной обработки информации. Структурой в клетке, которая может отвечать за обработку информации, является микротрубочка цитоскелета (далее — микротрубочка). Впервые гипотезу о такой роли микротрубочки выдвинул S. Hameroff на основе воздействия анестетиков на одноклеточные организмы [1]. Наиболее важные подходы к роли микротрубочки в обработке информации и к моделям её описания представлены в работах S. Rasmussen (описание микротрубочки как клеточного автомата) [2], R. Penrose (модель Orch-OR) [3], J.A. Tuszyński (рассмотрена роль микротрубочки в функционировании нейронов) [4, 5]. Модель, предложенная в [2], не позволяет моделировать конкретный механизм обработки информации. Модель Orch-OR рассматривает микротрубочку как структуру, отвечающую за обработку информации мозгом, но вместе с тем важным положением модели является невозможность представить обработку информации в микротрубочке с помощью машины Тьюринга. В работах [4, 5] микротрубочка рассматривается как структура, отвечающая за передачу сигнала в нейроне, однако строгая модель этого процесса не сформулирована. Целью настоящей работы является построение модели

обработки информации в микротрубочке цитоскелета, которая связывает физические параметры микротрубочки и параметры модели обработки информации.

Теоретические основы физического механизма обработки информации микротрубочкой, на основе которых строится предлагаемая модель, изложены в статьях [6–9]. Микротрубочка представляет собой полый цилиндр, стенки которого состоят из одного слоя молекул тубулина, организованных в гексагональную решетку. Молекула тубулина состоит из двух частей: α -тубулина и β -тубулина, и обладает собственным дипольным моментом, определяемым электроном, который может быть в двух состояниях: первое соответствует α -тубулину, второе — β -тубулину. Значение дипольного момента молекулы тубулина будет определяться его взаимодействием с дипольными моментами других молекул тубулина. Механизм, за счёт которого происходит обработка информации, состоит в изменении средних дипольных моментов молекул тубулина (т.е. молекул, из которых состоит микротрубочка), вызванном резонансным диполь-дипольным взаимодействием между дипольными моментами молекул тубулина. В настоящей работе предполагается, что микротрубочку цитоскелета можно разделить на три части. Значения средних дипольных моментов первой части молекул тубулина задаются внешней средой и выступают в качестве “входа”, через который данные поступают в микротрубочку. Вторая часть молекул тубулина выполняет роль “выхода”, средние значения дипольных моментов этих молекул являются результатом обработки данных. Третья часть молекул тубулина — оставшиеся молекулы, не являющиеся “входом” или “выходом”.

В работе показано, что микротрубочка, осуществляющая отображение с “входа” на “выход”, может быть описана в виде рекуррентного персептрона с симметричными связями. Проведён анализ аппроксимационных свойств персептрона, соответствующего модели подсистемы системы дипольных моментов микротрубочки. Показано, что данный персептрон может с заданной точностью аппроксимировать функцию, описывающую числовую последовательность, значения элементов которой зависят от конечного числа предыдущих элементов последовательности, и все значения данной последовательности принадлежат ограниченному множеству.

1. Средний дипольный момент молекул тубулина как модель нейрона персептрона

В [8] показано, что средний дипольный момент молекулы тубулина в приближении среднего молекулярного поля $\langle S_i \rangle$ описывается выражением

$$\langle S_i \rangle = \text{th} \left(\frac{E_0 + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in M_i}} J_{ij} \cdot \langle S_j \rangle}{T} \right), \quad (1)$$

где E_0 — проекция вектора внешнего электрического поля на вектор дипольного момента; J_{ij} — коэффициент связи i -го и j -го дипольных моментов; $\langle S_j \rangle$ — средний дипольный момент j -й молекулы тубулина; T — температура микротрубочки цитоскелета; M_i — множество молекул тубулина, чьи дипольные моменты взаимодействуют с дипольным моментом i -й молекулы тубулина.

Выражение (1) эквивалентно функции, описывающей нейрон персептрона:

$$y_i = \text{th} \left(\sum_j w_{ij} \cdot x_j + w_0 \right), \quad (2)$$

где w_{ij} — весовые коэффициенты i -го нейрона персептрона; w_0 — сдвиг нейрона персептрона; x_j — j -я компонента входного вектора нейрона. Параметры (1) и (2) связаны следующими выражениями:

$$x_j = \langle S_j \rangle, \quad w_j = \frac{J_{ij}}{T}, \quad w_0 = \frac{E_0}{T}. \quad (3)$$

Поскольку выражение для среднего дипольного момента молекулы тубулина сходно с выражением функции нейрона многослойного персептрона, систему диполей микротрубочки можно рассмотреть как многослойный персептрон. Отметим ограничения данного персептрона, связанные с физическими свойствами микротрубочки цитоскелета:

- 1) если рассмотреть две молекулы тубулина, чьи дипольные моменты взаимодействуют, то коэффициенты связи данных дипольных моментов в (1) будут одинаковыми, т. е. $J_{ij} = J_{ji}$, где i и j — индексы данных молекул тубулина. Следовательно, если рассмотреть два нейрона, соответствующие таким молекулам, то для этих нейронов $w_{ij} = w_{ji}$;
- 2) выход нейрона не может подаваться ему на вход в силу того, что такое диполь-дипольное взаимодействие физически невозможно;
- 3) значения x_i и y_i принадлежат некоторому ограниченному диапазону значений;
- 4) значения весовых коэффициентов w_{ij} принадлежат некоторому ограниченному диапазону значений.

2. Модель персептрона подсистемы дипольной системы микротрубочки цитоскелета

Для анализа аппроксимационных свойств персептрона, соответствующего дипольной системе микротрубочки цитоскелета, введём ряд упрощений.

1. Рассмотрим модель не всей системы диполей микротрубочки цитоскелета, а её некоторой подсистемы. Персептрон, соответствующий данной подсистеме, изображен на рисунке. Данная структура является гипотетическим упрощением, по мнению авторов позволяющим проводить анализ свойств микротрубочек в первом приближении.
2. Взаимодействие диполей молекул тубулина рассмотрим в приближении дискретного времени, т. е. в выражении (1) значение $\langle S_i \rangle$ в момент времени t будет зависеть от значений $\langle S_j \rangle$ в момент времени $t - 1$ и оно примет вид

$$\langle S_i \rangle (t) = \text{th} \left(\frac{E_0 + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in M_i}} J_{ij} \cdot \langle S_j \rangle (t - 1)}{T} \right). \quad (4)$$

Узлы графа на рисунке соответствуют молекулам тубулина. Дуги графа соединяют две молекулы тубулина, если значение среднего дипольного момента одной молекулы

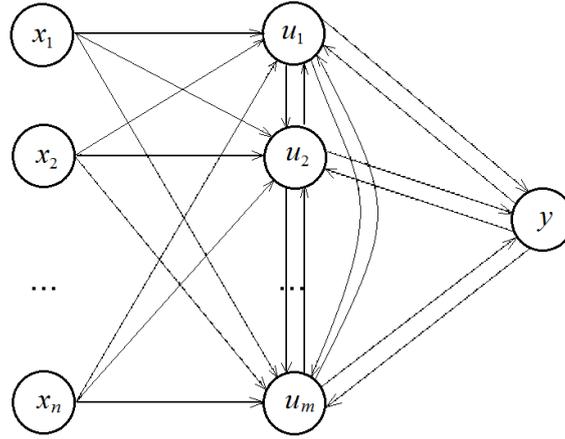


Схема графа, соответствующего персептрону подсистемы системы диполей микротрубочки

тубулина зависит от среднего дипольного момента другой молекулы. Каждой дуге графа соответствует весовой коэффициент персептрона. Начальная вершина дуги графа соответствует молекуле тубулина, от значения дипольного момента которой зависит средний дипольный момент другой молекулы тубулина. Конечная вершина дуги графа соответствует молекуле тубулина, значение среднего дипольного момента которой зависит от среднего дипольного момента другой молекулы.

Рассматриваемой подсистеме дипольной системы микротрубочки соответствует персептрон, связанный с ней по нижеследующим правилам.

Первый слой. Молекулы тубулина x_j (см. рисунок), принадлежащие первому слою, являются входом персептрона. Так как точный механизм взаимодействия молекул тубулина с внешней средой на данный момент не известен, то на вход персептрона накладывается допущение: значения среднего дипольного момента этих молекул определяются только внешней средой, причём предполагается, что влияние соседних молекул скомпенсировано средой. Дипольные моменты молекул тубулина первого слоя взаимодействуют с дипольными моментами молекул второго слоя и не взаимодействуют с молекулами третьего слоя.

Второй слой. Молекулы тубулина, принадлежащие данному слою, обозначены на схеме u_i . Этот слой молекул соответствует скрытому слою персептрона. Дипольные моменты молекул тубулина в скрытом слое взаимодействуют со всеми молекулами тубулина в рассматриваемой системе.

Третий слой. Данный слой состоит из одной молекулы тубулина y . Значение среднего дипольного момента в третьем слое будет рассматриваться как выход персептрона. Дипольный момент молекул тубулина третьего слоя взаимодействуют только с дипольными моментами молекул второго слоя.

В результате имеем: первый слой молекул тубулина является входным вектором персептрона, второй — скрытым слоем нейронов персептрона, третий — выходным слоем нейронов персептрона. Выходы нейронов в момент времени t в данном персептроне будем рассчитывать для скрытого слоя персептрона в соответствии с (5), для выходного слоя в соответствии с (6):

$$u_i(t) = \text{th} \left(\sum_j w_{ij} \cdot x_j(t-1) + \sum_{i \neq k} w_{ik} \cdot u_k(t-1) + w_i \cdot y(t-1) + w_{i0} \right), \quad (5)$$

$$y(t) = \text{th} \left(\sum_i w_i \cdot u_i(t-1) \right), \quad (6)$$

где $x_j(t)$ — компонента входа персептрона, соответствующая среднему дипольному моменту j -й молекулы тубулина первого слоя в момент времени t ; $u_i(t)$ — значение нейрона персептрона в скрытом слое, соответствующее среднему дипольному моменту i -й молекулы тубулина второго слоя в момент времени t ; $y(t)$ — значение нейрона в выходном слое, соответствующее среднему дипольному моменту молекулы тубулина третьего слоя в момент времени t ; $w_{ij} = J_{ij}/T$ — нормированный на температуру коэффициент взаимодействия дипольных моментов j -й молекулы тубулина первого слоя и i -й молекулы второго слоя; $w_{ik} = J_{ik}/T$ — нормированный на температуру коэффициент взаимодействия дипольных моментов i -й молекулы тубулина второго слоя и k -й молекулы второго слоя; $w_i = J_i/T$ — нормированный на температуру коэффициент взаимодействия дипольных моментов i -й молекулы тубулина второго слоя и молекулы тубулина третьего слоя; $w_{i0} = J_{i0} \cdot \langle S_0 \rangle / T$, где J_{i0} — коэффициент взаимодействия дипольного момента i -й молекулы тубулина второго слоя и молекулы тубулина первого слоя, для которой средний дипольный момент $\langle S_0 \rangle$ всегда равен 1, т. е. предполагается, что значение среднего дипольного момента одной молекулы тубулина “входа” постоянно. Далее все параметры w_{ij} , w_{ik} , w_{i0} , w_i будем называть весовыми коэффициентами.

3. Аппроксимационные свойства

Для анализа аппроксимационных свойств рассмотрим функцию, описывающую числовую детерминированную последовательность s следующего вида:

$$s(t) = h(s(t-1), s(t-2), \dots, s(t-\Delta t)), \quad (7)$$

где $s(t)$ — значение элемента последовательности s с индексом $t \in N$, $s(t) \in M$, $M \subset \mathbb{R}$, M — ограниченное множество. Данная функция оценивает значения члена последовательности s с индексом t по значению членов последовательности s с индексами от $t-\Delta t$ до $t-1$, где $\Delta t \in \mathbb{N}$ задано для всей последовательности. Будем рассматривать только конечные последовательности, где значения элементов с индексами $t \in [0, \Delta t - 1]$ изначально заданы, значения элементов $t \in [\Delta t, t_e]$ определяются в соответствии с (7), где t_e — индекс последнего элемента последовательности. Для разных последовательностей значения Δt и t_e могут быть различными, далее множество индексов $t \in [\Delta t, t_e]$ для заданной последовательности будем обозначать T . Множество всех функций (7), соответствующих таким последовательностям, обозначим H . Функцию из множества H обозначим как h . Значения функции h , соответствующие $s(t)$, обозначим $h(\bar{s}(t))$, где $\bar{s}(t) = s(t-1), s(t-2), \dots, s(t-\Delta t)$. Способность персептрона микротрубочки к аппроксимации таких функций и будет предметом дальнейших исследований.

Задача персептрона микротрубочки состоит в последовательном вычислении некоторой подпоследовательности элементов s с индексами от t_0 до t_1 , где $t_0, t_1 \in T$, причём значения элементов последовательности s с индексами от $t_0 - \Delta t$ до $t_0 - 1$ заданы. Процесс вычислений элементов этой подпоследовательности будет начинаться с вычисления значения элемента с индексом t_0 . Алгоритм оценки элемента с индексом $t_0 \in [t_0, t_1]$ заключается в следующем.

Шаг 1. По заданным значениям последовательности s с индексами от $t_0 - \Delta t$ до $t_0 - 1$ с помощью персептрона микротрубочки проводится вычисление значения последовательности $s(t_0)$, равное $y(s(t_0))$.

Шаг 2. Если индекс элемента, для которого была сделана оценка значения, равен t_1 , то процесс вычисления завершается, иначе — возвращаемся к шагу 1, но теперь проводится вычисление следующего элемента последовательности s с индексом $t_0 + 1$. Данный алгоритм, который начинается с элемента последовательности с индексом t_0 , будет подразумеваться под последовательным вычислением последовательности s .

Для соответствия поставленной задаче переопределим выражения (5) и (6) для персептрона:

$$u_i(t) = \text{th} \left(\sum_{j=1}^{\Delta t} w_{ij} \cdot s(t-j) + \sum_{k=1}^m w_{ik} \cdot u_k(t-1) + w_i \cdot y(t-1) + w_{i0} \right), \quad (8)$$

$$y(t) = \text{th} \left(\sum_{i=1}^m w_i \cdot u_i(t) \right), \quad (9)$$

где $m \in \mathbb{N}$ — количество нейронов в скрытом слое.

Класс персептронов, описываемый выражениями (8) и (9), обозначим P . Функцию, соответствующую персептрону из данного класса, обозначим p . Значение функции p , соответствующее элементу последовательности $s(t)$, обозначим $p(\bar{s}(t))$. Особенность данного персептрона состоит в том, что значения $u_k(t-1)$ и $y(t-1)$ при оценке значения $s(t_0)$ в общем случае являются произвольными величинами из диапазона от -1 до 1 и тем самым вносят погрешность в оценку значения $s(t_0)$.

Для класса P справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой функции $h \in H$, любого $t_0 \in [\Delta t, t_e]$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют функция $p \in P$ и $c > 0$ такие, что при последовательном вычислении последовательности s начиная с элемента с индексом t_0 выполняется условие $|h(\bar{s}(t)) - c \cdot p(\bar{s}(t))| < \varepsilon$ для всех $t \in [t_0, t_e]$.

Для доказательства теоремы рассмотрим две важные теоремы и введём дополнительное определение.

Теорема 2 (теорема Лузина) [10]. Для любой измеримой на \mathbb{R}^n функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют непрерывная функция $\varphi(x)$ и открытое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, для которых $f(x) = \varphi(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon$, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ (μ — мера Лебега на \mathbb{R}^n).

Теорема 3 [11]. Для любой непрерывной функции $f(x)$, заданной на ограниченном множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, и любого $\varepsilon > 0$ существует функция

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^m w_i \cdot \text{th} \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \cdot x_j + w_{i0} \right)$$

такая, что $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in M$, где $n, m \in \mathbb{N}$, $w_i, w_{ij}, w_{i0} \in \mathbb{R}$.

Для дальнейших рассуждений определим класс персептронов P' . Функцию, соответствующую персептрону из класса P' , будем обозначать p' . Значение p' , соответствующее $s(t)$, определяется в соответствии с (8) и (9), но в (8) $y(t-1) = c_p \cdot s(t-1)$, где $c_p > 0$, $c_p \in \mathbb{R}$ и c_p — константа для заданного персептрона p' . Для P' докажем два следующих утверждения.

Лемма 1. Для любой функции $h \in H$, любого $\varepsilon > 0$ и любого $c_p > 0, c_p \in \mathbb{R}$ существуют $p' \in P'$ и $c > 0$ такие, что $|h(\bar{s}(t)) - c \cdot p'(\bar{s}(t))| < \varepsilon$ для всех $t \in T$.

Доказательство леммы 1. Заменяем функцию $h(\bar{s}(t))$ на функцию $g(\bar{s}(t))$ такую, что $g(\bar{s}(t)) = h(\bar{s}(t))$ для всех $t \in T$:

- 1) $g(\bar{s}(t)) = h(\bar{s}(t))$ для всех $t \in T$;
- 2) g непрерывна в $\bar{s}(t)$ для всех $t \in T$;
- 3) $g(\bar{s}) \in M$ для всех $\bar{s} \in M^{\Delta t}$.

Примером последней может быть функция, у которой значение в точке $\bar{d} \in M^{\Delta t}$ равно $h(\bar{s}(t))$ для всех $t \in T$, для которых эвклидова мера $\rho(\bar{s}(t), \bar{s})$ наименьшая. Если меры равны, то выбираем наименьшее значение $h(\bar{s}(t))$ из точек с равной эвклидовой мерой.

Функция g будет измеримой, так как M — ограниченное множество. По теореме 2 для g существует непрерывная функция g_c такая, что $g_c(\bar{s}(t)) = h(\bar{s}(t))$ для всех $t \in T$. В результате лемма 1 будет доказана, если будет доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $p' \in P'$ и $c > 0$ такие, что $|g_c(\bar{s}(t)) - c \cdot p'(\bar{s}(t))| < \varepsilon$ для всех $t \in T$.

Преобразуем (8) для p' с учётом условия $y(t-1) = c_p \cdot s(t-1)$ и примем дополнительное ограничение на все коэффициенты связи между нейронами в скрытом слое $w_{ik} = 0$:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \text{th} \left(\sum_{j=1}^{\Delta t} w_{ij} \cdot s(t-j) + w_i \cdot c_p \cdot s(t-1) + w_{i0} \right) = \\ &= \text{th} \left(\sum_{j=2}^{\Delta t} w_{ij} \cdot s(t-j) + (w_i \cdot c_p + w_{i1}) \cdot s(t-1) + w_{i0} \right). \end{aligned}$$

Определим $w'_{ij} = w_{ij}$, $j > 1$ и $w'_{ij} = w_i \cdot c_p + w_{i1}$, $j = 1$. В результате (8) для p' примет вид

$$u_i(t) = \text{th} \left(\sum_{j=1}^{\Delta t} w'_{ij} \cdot s(t-j) + w_{i0} \right). \quad (10)$$

Совместно с выражением (9) p' будет соответствовать функции $\text{th}(\varphi(x))$, где функция $\varphi(x)$ взята из теоремы 3. Таким образом, доказываемое утверждение верно, если $g_c(\bar{s}(t))/c \in [-1, 1]$ для всех $t \in T$. Константа c может быть произвольным вещественным числом больше нуля, следовательно, её значение можно выбрать таким, чтобы данное условие выполнялось. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любой функции $h \in H$, любого $c_w > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $p' \in P'$ и $c > 0$ такие, что $|h(\bar{s}(t)) - c \cdot p'(\bar{s}(t))| < \varepsilon$ для всех $t \in T$, $c_p = 1/c$ и все коэффициенты w_i такие, что $|w_i| < c_w$.

Доказательство. По лемме 1 существуют $p' \in P'$ и $c_0 > 0$ такие, что $|h(\bar{s}(t)) - c_0 \cdot p'(\bar{s}(t))| < \varepsilon/2$. Далее p' будем обозначать p_1 . Важно отметить, что для любого $c_1 > c_0$ существует такая функция p_1 , что верно неравенство

$$|h(\bar{s}(t)) - c_1 \cdot p_1(\bar{s}(t))| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

Рассмотрим функцию $p_2 \in P'$ такую, что в (8) и (9) значения коэффициентов w_{ij} для $j > 1$, w_{ik} , w_{i0} равны значениям соответствующих коэффициентов p_1 . Соответствующие коэффициенты w_i функций p_1 и p_2 соотносятся как $w_i^1 = w_i^2 \cdot c_2$, где w_i^1 — коэффициент w_i функции p_1 , w_i^2 — коэффициент w_i функции p_2 , $c_2 > 1$ — константа такая, что $|w_i^2| < c_w$. Коэффициент $w_{ij}^2 = w_{ij}^1 + w_i^1 \cdot c_{p1} - w_i^2 \cdot c_{p2}$ для $j = 1$, где $c_{p1} -$

параметр c_p , соответствующий p_1 , c_{p2} — параметр c_p , соответствующий p_2 . Функция p_2 будет соответствовать функции p' из леммы 2. В этом случае (8) для p_2 примет вид

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \text{th} \left(\sum_{j=1}^{\Delta t} w_{ij}^2 \cdot s(t-j) + \sum_{k=1}^m w_{ik}^2 \cdot u_k(t-1) + w_i^2 \cdot c_{p1} \cdot y(t-1) + w_{i0}^2 \right) = \\
&= \text{th} \left(\sum_{j=1}^{\Delta t} w_{ij}^1 \cdot s(t-j) + (w_i^1 \cdot c_{p1} - w_i^2 \cdot c_{p2}) \cdot s(t-1) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^m w_{ik}^1 \cdot u_k(t-1) + w_i^2 \cdot c_{p2} \cdot s(t-1) + w_{i0}^1 \right) = \\
&= \text{th} \left(\sum_{j=1}^{\Delta t} w_{ij}^1 \cdot s(t-j) + \sum_{k=1}^m w_{ik}^1 \cdot u_k(t-1) + w_i^1 \cdot c_{p1} \cdot y(t-1) + w_{i0}^1 \right). \quad (12)
\end{aligned}$$

В результате выражения (8) для функций p_1 и p_2 становятся эквивалентными.

Лемма будет доказана, при доказательстве того, что существуют c_1 и c_2 такие, что верно (13), где $c = c_1 \cdot c_2$. Если учесть неравенство (11), то (13) верно, если верно неравенство (14):

$$|h(s(t)) - c_1 \cdot c_2 \cdot p_2(s(t))| < \varepsilon, \quad (13)$$

$$|c_1 \cdot p_1(s(t)) - c_1 \cdot c_2 \cdot p_2(s(t))| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

Значения (8) для функций p_1 и p_2 будут одинаковыми для всех $t \in T$. Значения (9) для функций p_1 и p_2 будут различаться только тем, что для p_2 в (9) аргумент будет разделен на c_2 . Следовательно, неравенство (14) верно, если верно неравенство

$$|c_1 \cdot \text{th}(x) - c_1 \cdot c_2 \cdot \text{th}(x/c_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (15)$$

для всех $x \in X$, для которых верно $c_1 \cdot \text{th}(x) \in M$. Далее рассматриваем $x \geq 0$, для $x < 0$ рассуждения аналогичные. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = c_2 \cdot \text{th}(x/c_2) - \text{th}(x)$. Производная данной функции будет равна $d\varphi(x)/dx = \text{th}^2(x) - \text{th}^2(x/c_2)$, поэтому функция $\varphi(x)$ монотонна и непрерывна. Для всех $c_2 > 1$ наибольшая погрешность будет соответствовать наибольшему элементу x_{\max} из множества X . Для функции $\varphi(x)$ при $c_2 > 1$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) < x - \text{th}(x). \quad (16)$$

Элемент x_{\max} связан с максимальным элементом y_{\max} из M соотношением

$$y_{\max} = c_1 \cdot \text{th}(x_{\max}). \quad (17)$$

С учётом (17) и (16) для левой части неравенства (15) будет справедлива зависимость

$$\begin{aligned}
|c_1 \cdot \text{th}(x) - c_1 \cdot c_2 \cdot \text{th}(x/c_2)| &< |c_1 \cdot (x_{\max} - \text{th}(x_{\max}))| = \\
&= \left| c_1 \cdot \left(\frac{\text{arcth}(y_{\max})}{c_1} - \frac{y_{\max}}{c_1} \right) \right|. \quad (18)
\end{aligned}$$

Следовательно, (15) верно, если существует c_1 такое, что верно неравенство

$$\left| c_1 \cdot \left(\frac{\operatorname{arcth}(y_{\max})}{c_1} - \frac{y_{\max}}{c_1} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19)$$

Важно отметить, что неравенство (19) не зависит от c_2 , т. е. если оно верно, то верно при любых c_2 .

Возможные значения константы c_1 находятся в диапазоне от $c_{1 \min}$ такой, что $y_{\max}/c_{1 \min} = 1$, до $c_{1 \max}$, значение которой стремится к бесконечности. При значении константы c , равном $c_{1 \min}$, левая часть неравенства (19) будет стремиться к бесконечности, при c , равном $c_{1 \max}$, левая часть (19) будет стремиться к нулю. Так как выражение в правой части неравенства (19) является непрерывной функцией от c_1 в диапазоне c_1 от $c_{1 \min}$ до $c_{1 \max}$, то всегда можно подобрать такое значение $c_1 \in \mathbb{R}$, что неравенство (19) будет верным. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим две функции $p \in P$ и $p' \in P'$. Соответствующие весовые коэффициенты в (8) и (9) у функций p и p' будут одинаковыми. Константа c_p в функции p' равна константе $1/c$. Согласно лемме 2, для $p' \in P'$ будет верно неравенство $|h(\bar{s}(t)) - c \cdot p'(\bar{s}(t))| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t \in T$.

Вычисление значений элементов последовательности s с помощью функции p начинается с элемента с индексом t_0 , поэтому значение $y(t_0 - 1)$ в (8) будет равно произвольному значению из диапазона $[-1, 1]$:

$$y(t_0 - 1) = s(t_0 - 1) + \Delta s(t_0 - 1). \quad (20)$$

Ошибка $\Delta s(t_0 - 1)$ будет вносить ошибку $\Delta u_i(t_0)$ в величину $u_i(t_0)$, определяемую по (8). Поскольку производная гиперболического тангенса меньше или равна 1, то приращение его аргумента всегда будет больше или равно приращению его значения и для $\Delta u_i(t_0)$ и $\Delta s(t_0 - 1)$ справедливо выражение

$$|w_i \cdot \Delta s(t_0 - 1)| \geq |\Delta u_i(t_0)|. \quad (21)$$

Ошибка $\Delta u_i(t_0)$ будет вносить ошибку $\Delta y(t_0) = p(s(t_0)) - p'(s(t_0))$. Учитывая (9) и неравенство (21), для ошибки $\Delta y(t_0)$ справедливо отношение

$$|\Delta y(t_0)| \leq \left| \sum_i w_i \cdot \Delta u_i(t_0) \right| \leq \left| \sum_i w_i^2 \cdot \Delta s(t_0 - 1) \right| \leq \sum_i w_i^2 \cdot 2. \quad (22)$$

Оценка значения p' вычисляется с ошибкой

$$|s(t_0) - p'(\bar{s}(t_0))| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot c}. \quad (23)$$

Учитывая неравенства (22) и (23), для ошибки $\Delta s(t_0)$ верно выражение

$$\Delta s(t_0) \leq \sum_i w_i^2 \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2 \cdot c} = \Delta s(t_0) \leq \|w_i\|^2 \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2 \cdot c}. \quad (24)$$

Аналогичным образом для ошибки $\Delta s(t_0 + 1)$ получена зависимость

$$\Delta s(t_0 + 1) \leq \|w_i\|^4 \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2 \cdot c} + \|w_i\|^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot c}. \quad (25)$$

Для ошибки $\Delta s(t_0 + k)$, где $k \in N$, будет верна зависимость

$$\Delta s(t_0 + k) \leq \|w_i\|^{2 \cdot (k+1)} \cdot 2 + \sum_{j=0}^k \|w_i\|^{2 \cdot j} \frac{\varepsilon}{2 \cdot c}. \quad (26)$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (26) является суммой геометрической прогрессии. Если $\|w_i\| < 1$, то (26) можно переписать в виде

$$\Delta s(t_0 + k) \leq \|w_i\|^{2 \cdot (k+1)} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{(1 - \|w_i\|^2) \cdot 2 \cdot c}. \quad (27)$$

Теорема будет доказана, если для любого $t_0 \in [\Delta t, t_e]$, любого $k \in [0, t_e - t_0]$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $p \in P$ и $c > 0$ такие, что для для всех $t \in [t_0 + k, t_e]$ верна зависимость

$$\Delta s(t_0 + k) \leq \frac{\varepsilon}{c}. \quad (28)$$

Учитывая (27), неравенство (28) верно, если верно отношение

$$\|w_i\|^{2 \cdot (k+1)} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{(1 - \|w_i\|^2) \cdot 2 \cdot c} \leq \frac{\varepsilon}{c}. \quad (29)$$

Выражение (29) не зависит от t_0 , поэтому, если оно верно, то верно при любом t_0 . Очевидно, что можно подобрать параметр $w_c > 0$ такой, что $|w_i| < w_c$, и неравенство (29) будет верно. По лемме 2 будет существовать p' с такими коэффициентами. Так как коэффициенты функции p' и p одинаковы, то теорема 1 доказана.

Таким образом, в работе показано, что микротрубочку цитоскелета можно описывать в виде рекуррентного перцептрона с симметричными связями в приближении среднего молекулярного поля. Установлена связь физических параметров рекуррентного и рассматриваемого перцептрона. Показано, что при соответствии предложенной модели микротрубочка может выполнять предсказание элементов последовательности по заданному числу предыдущих элементов последовательности.

Список литературы

- [1] HAMEROFF S., WATT R.C. Information processing in microtubules // J. of Theor. Biology. 1982. Vol. 98, No. 4. P. 549–561.
- [2] RASMUSSEN S., KARAMPURWALA H., VAIDYANATH R. ET AL. Computational connectionism within neurons: A model of cytoskeletal automata subserving neural networks // Phys. D-non-linear Phenomena — PHYSICA D. 1990. Vol. 42, No. 1-3. P. 428–449.
- [3] PENROSE R. Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness. Oxford Univ. Press, 1989.
- [4] BROWN J.A., TUSZYNSKI J.A. Dipole interactions in axonal microtubules as a mechanism of signal propagation // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, No. 5. P. 5834–5840.
- [5] WOOLF N.J., TUSZYNSKI J.A. Neural cytoskeleton capabilities for learning and memory // J. of Biolog. Phys. 2010. Vol. 36, No. 1. P. 3–21.

- [6] Слядников Е.Е. Физическая модель и ассоциативная память информационной биомолекулы // Журнал техн. физики. 2007. Т. 32, № 8. С. 52–59.
- [7] Слядников Е.Е. О взаимосвязи физических и информационных характеристик в окрестности точки сегнетоэлектрического перехода в системе микротрубочки цитоскелета // Там же. 2009. Т. 79, № 7. С. 1–12.
- [8] Слядников Е.Е. Микроскопическая модель и фазовая диаграмма дипольной системы микротрубочки цитоскелета при конечных температурах // Там же. 2010. Т. 80, № 5. С. 32–39.
- [9] Слядников Е.Е. Физические основы, модели представления и распознавания образов в микротрубочке цитоскелета нейрона // Там же. 2011. Т. 81, № 12. С. 1–33.
- [10] НАТАНСОН И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
- [11] HORNIK K. Multilayer feedforward networks are universal approximates // Neural Networks. 1989. Vol. 2, No. 5. P. 359–366.

*Поступила в редакцию 24 октября 2013 г.,
с доработки — 9 января 2014 г.*