Критические числа Рейнольдса в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно-возбуждённого двухатомного газа*

Ю. Н. Григорьев[1], И. В. Ершов[2]
[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Россия*
e-mail: grigor@ict.nsc.ru, i_ershov@ngs.ru

Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Критические числа Рейнольдса в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно-возбуждённого двухатомного газа // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 20–32.

В рамках нелинейной энергетической теории гидродинамической устойчивости исследовано сверхзвуковое плоское течение Куэтта колебательно-возбуждённого двухатомного газа. Соответствующая спектральная задача для критических значений числа Рейнольдса Re_{cr}, определяющих возможное начало ламинарно-турбулентного перехода, решалась численно с помощью метода коллокаций и QZ-алгоритма. Показано, что в сверхзвуковом диапазоне рассчитанные значения Re_{cr} могут в пределах двух порядков превышать аналогичные значения для дозвуковых чисел Маха.

Ключевые слова: энергетическая теория, гидродинамическая устойчивость, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной газовой динамики, критическое число Рейнольдса, метод коллокаций, QZ-алгоритм.

Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. Critical Reynolds numbers in supersonic Couette flow of vibration excited diatomic gas // Comput. Technologies. 2014. Vol. 19, No. 2. P. 20–32.

Supersonic 2D-Couette flow of vibration excited diatomic gas was investigated in the framework of nonlinear energy theory for hydrodynamic stability. The corresponding spectral problem for critical Reynolds numbers Re_{cr} defining possible origin of laminar-turbulent transit was calculated using collocation method and QZ-algorithm. It was shown that in supersonic range of the calculated values of Re_{cr} may be within two orders of magnitude higher than similar values for subsonic Mach numbers.

Key words: energy theory, hydrodynamic stability, two-temperature gas dynamics equations, critical Reynolds number, collocation method, QZ-algorithm.

Введение

В работе [1] на основе нелинейной энергетической теории исследовалась устойчивость дозвукового плоского течения Куэтта колебательно неравновесного молекулярного газа. Выполненное обобщение теории позволило в реальном для двухатомных газов диа-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00064).

пазоне параметров режима получить значения критических чисел Рейнольдса Re_{cr}. При этом найденные значения Re_{cr} по порядку величины совпадали с результатами, полученными в аналогичной постановке для несжимаемого течения [2]. Это подтвердило известное представление о том, что дозвуковое течение Куэтта можно считать практически несжимаемым. Вместе с тем немногочисленные исследования [3 – 5], выполненные в постановке классической линейной теории, показывают, что в рамках данного подхода вопрос гидродинамической устойчивости течения Куэтта сжимаемого совершенного газа до последнего времени не имеет однозначного решения. В частности, в работе [3] констатированы абсолютное стабилизирующее влияние вязкости и отсутствие неустойчивости вплоть до чисел $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^6$ при сверхзвуковых числах Маха $\mathrm{M} = 2 \div 5$. В то же время в более поздних публикациях [4, 5] были рассчитаны критические числа Рейнольдса в пределах $\mathrm{Re}_{cr} \simeq (2 \div 5) \cdot 10^4$ при числах $\mathrm{M} = 3 \div 12$.

Таким образом, исходя из результатов численных расчётов [3 – 5] имеет место следующая ситуация. В рамках линейной теории устойчивости течение Куэтта совершенного газа устойчиво в ближней сверхзвуковой области $\mathrm{M} < 3$ и может проявлять неустойчивость при дальнейшем возрастании числа Маха. Это определило интерес к продолжению начатых в [1] исследований при сверхзвуковом диапазоне $\mathrm{M} = 2 \div 5$, которым посвящена настоящая работа. Полученные данные для зависимостей критических чисел Рейнольдса от параметров течения представляют самостоятельный интерес. Кроме того, использованная в работе модель двухтемпературной газодинамики при отсутствии возбуждения колебательной моды переходит в модель совершенного газа, что позволяет провести сравнение полученных результатов с данными линейной теории устойчивости [4, 5].

1. Постановка задачи

1.1. Исходные уравнения

Задача устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа рассматривается в расчётной области Ω, представляющей собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы $(x_1,\, x_2,\, x_3)$, а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2.

Исходной математической моделью служит система уравнений двухтемпературной газовой динамики. В соответствии с физическими представлениями [6 – 8] эта система описывает течения колебательно-возбуждённого молекулярного газа, когда диссоциацией и возбуждением верхних колебательных уровней молекул, а также поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

Как характерные величины для обезразмеривания выбраны полуширина канала L по оси x_2, модуль скорости потока U_0 на непроницаемых стенках канала, постоянные плотность ρ_0 и температура T_0 основного потока, время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$.

В качестве невозмущённого потока рассматривается плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температур

$$\mathbf{U}_s(x_2) = (x_2, 0, 0), \quad T_s(x_2) = T_{v,\,s}(x_2) = \rho_s(x_2) = 1, \quad p_s(x_2) = 1/\left(\gamma \mathrm{M}^2\right),$$

где p_s — статическое давление, постоянное поперёк канала.

Представление мгновенных значений гидродинамических величин возмущённого течения в виде

$$\rho = 1 + \rho', \quad u_i = U_{s,i} + u_i', \quad T = 1 + T', \quad T_v = 1 + T_v', \quad p = 1/\left(\gamma \mathrm{M}^2\right) + p'$$

позволяет получить [1] из системы уравнений двухтемпературной газовой динамики уравнения для возмущений ρ', u_i', p', T', T_v' основного течения без ограничения на их амплитуды:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial T'}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}\right) + \gamma(\gamma - 1)\mathrm{M}^2 p \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_v \rho (T_v' - T')}{\tau} +$$
$$+ \frac{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2}{2\mathrm{Re}} \left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i}\right)^2 + 2\left(\alpha_1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\right], \tag{3}$$

$$\gamma_v \rho\left(\frac{\partial T_v'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial T_v'}{\partial x_j} + U_{s,j} \frac{\partial T_v'}{\partial x_j}\right) = \frac{20}{33} \frac{\gamma \gamma_v}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 T_v'}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_v \rho (T_v' - T')}{\tau}, \tag{4}$$

$$\gamma \mathrm{M}^2 p' = \rho T' + \rho', \quad i = 1,\, 2,\, 3, \quad j = 1,\, 2,\, 3. \tag{5}$$

Здесь ρ', u_i', p', T', T_v' — возмущения плотности и компонент вектора скорости, давления, статической и колебательной температуры газа соответственно. В (1)–(4) и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Параметры, входящие в уравнения (1)–(5), определяются следующим образом: α_1 — относительный коэффициент объёмной вязкости, γ_v — параметр, характеризующий степень неравновесности колебательной моды, γ — показатель адиабаты, Re, M, Pr — числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока соответственно. Предполагается, что коэффициент α_1 и время τ в системе (1)–(5) не зависят от статической и колебательной температуры потока и постоянны.

В качестве краевых условий в задаче устойчивости принималось, что при $x_1 = \pm x_0/2$ и $x_3 = \pm z_0/2$ возмущения гидродинамических переменных удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения. В расчётах размеры области Ω по периодическим (однородным) координатам x_1, x_3 полагались равными длине волны возмущения по соответствующей координате: $x_0 = 2\pi/\alpha$, $z_0 = 2\pi/\delta$ (α, δ — модули проекций волнового вектора возмущения $\mathbf{k}$ на оси координат x_1, x_3).

1.2. Уравнение энергетического баланса возмущений

В работе [1] из системы (1)–(5) было выведено уравнение энергетического баланса, которое записывается следующим образом:

$$\frac{dE_t}{dt} \equiv \Phi = -\int\limits_{\Omega} \left\{ (1+\rho') u_i' u_j' \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\gamma_v}{\tau}(1+\rho')(T_v' - T')^2 + \frac{\rho'}{\gamma \mathrm{M}^2} \frac{\partial \rho' u_i'}{\partial x_i} + \right.$$

$$+\left((\gamma-1)(1+T')-\frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}\right)(1+\rho')T'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}-\frac{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\ T'}{2\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2+\right.$$

$$+2\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i}\right)^2+2\left(\alpha_1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2\Bigg]+$$

$$\left.+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2+\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left(\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)^2+\frac{20\gamma_v}{33}\left(\frac{\partial T_v'}{\partial x_i}\right)^2\right)\right]\right\}d\Omega. \qquad (6)$$

Квадратичная форма

$$E_t(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\rho\left(u_i'^2+T'^2+\gamma_v T_v'^2\right)+\frac{\rho'^2}{\gamma \mathrm{M}^2}\right]d\Omega$$

определяет полную пульсационную энергию возмущений. В последней строке уравнения (6) содержится группа положительно определённых слагаемых, поэтому с уменьшением числа Рейнольдса, начиная с некоторого критического значения Re_{cr}, правая часть этого уравнения становится отрицательной. При этом $dE_t/dt<0$ и любые начальные возмущения затухают. Критическое число Рейнольдса Re_{cr} соответствует условию $dE_t/dt=0$ и вычисляется как минимум функционала в правой части энергетического уравнения.

Дальнейшее упрощение уравнения (6) состояло в пренебрежении корреляциями возмущений четвёртого порядка и в частичном разделении переменных под знаком интеграла [1, 8]. При этом зависимости возмущений скорости, плотности и температуры от периодической координаты x_3 представлялись в виде

$$u_1'=u_1''(x_1,\,x_2)\cos(\delta x_3),\quad u_2'=u_2''(x_1,\,x_2)\cos(\delta x_3),\quad u_3'=u_3''(x_1,\,x_2)\sin(\delta x_3),$$

$$\rho'=\rho''(x_1,\,x_2)\cos(\delta x_3),\quad T'=T''(x_1,\,x_2)\cos(\delta x_3),\quad T_v'=T_v''(x_1,\,x_2)\cos(\delta x_3). \qquad (7)$$

Подстановка (7) в уравнение (6) и интегрирование по переменной x_3 в интервале $[-\pi/\delta;\ \pi/\delta]$ приводят к энергетическому уравнению для функций от переменных x_1, x_2

$$\frac{dE_t''}{dt}\equiv\Phi''=-\int\limits_{S}\left\{u_1''u_2''+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2''}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2''}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3''}{\partial x_1}\right)^2+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial u_3''}{\partial x_2}\right)^2+\delta^2\left(u_1''^2+u_2''^2+u_3''^2\right)+\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2''}{\partial x_2}+\delta u_3''\right)^2+\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left\{\left(\frac{\partial T''}{\partial x_1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial T''}{\partial x_2}\right)^2+\delta^2T''^2+\frac{20\gamma_v}{33}\left[\left(\frac{\partial T_v''}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial T_v''}{\partial x_2}\right)^2+\delta^2T_v''^2\right]\right\}-2\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2T''\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u_2''}{\partial x_1}\right)\right]+\frac{\gamma_v\left(T_v''-T''\right)^2}{\tau}+\left(\gamma-\frac{1+\gamma\mathrm{M}^2}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)T''\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2''}{\partial x_2}+\delta u_3''\right)\Bigg\}dS.$$

В результате варьируемый функционал Φ'' в правой части становится квадратичным по функциям возмущений u_i'', T'', T_v'' и их производным.

1.3. Спектральная задача

Из условия экстремума функционала Φ'' на множестве допустимых функций следуют уравнения Эйлера – Лагранжа, определяющие обобщённую дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re:

$$\Delta u_1'' + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial D}{\partial x_1} - \gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\frac{\partial T''}{\partial x_2} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[u_2'' - \left(\gamma - \frac{1+\gamma\mathrm{M}^2}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)\frac{\partial T''}{\partial x_1}\right] = 0,$$

$$\Delta u_2'' + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial D}{\partial x_2} - \gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\frac{\partial T''}{\partial x_1} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[u_1'' - \left(\gamma - \frac{1+\gamma\mathrm{M}^2}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)\frac{\partial T''}{\partial x_2}\right] = 0,$$

$$\Delta u_3'' - \delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)D - \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(\gamma - \frac{1+\gamma\mathrm{M}^2}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)\delta T'' = 0,$$

$$\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\Delta T'' + \gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\left(\frac{\partial u_1''}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_1}\right) - \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[2\,\gamma_v\frac{T''-T_v''}{\tau} + \left(\gamma - \frac{1+\gamma\mathrm{M}^2}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)D\right] = 0,$$

$$\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\,\Delta\,T_v'' - \frac{\mathrm{Re}}{2}\,\frac{33\,(T_v''-T'')}{10\,\tau} = 0. \tag{8}$$

Здесь

$$D = \frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3'', \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \delta^2.$$

Амплитудные функции u_i'', ρ'', T'', T_v'' при $x_1 = \pm\pi/\alpha$ удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения.

Для периодических по координате x_1 возмущений

$$\varphi''(x_1,\, x_2) = (u_1'',\, u_2'',\, u_3'', T'', T_v'') = \boldsymbol{\varphi}(x_2)\exp(i\alpha x_1),$$

где $\boldsymbol{\varphi} = (u,\, v,\, w,\, \theta,\, \theta_v)$, α — проекция вещественного волнового вектора на координатную ось x_1, i — мнимая единица, спектральная задача (8) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пульсаций u, v, w, θ, θ_v:

$$u'' + i\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)v' - \left[\alpha^2\left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) + \delta^2\right]u + i\alpha\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)w - \gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\theta' =$$

$$= \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[v + \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)i\alpha\theta\right],$$

$$\left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)v'' + i\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)u' + \delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)w' - k^2 v - \gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\, i\alpha\theta =$$

$$= \frac{\mathrm{Re}}{2}\left[u + \left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)\theta'\right],$$

$$w'' - \delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)v' - i\alpha\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)u - \left[\delta^2\left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) + \beta^2\right]w =$$

$$= -\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1 - \gamma + \frac{1}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)\delta\theta,$$

$$\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left(\theta''-k^2\theta\right)+\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\left(u'+i\alpha v\right)=$$
$$=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[\frac{2\gamma_v}{\tau}\left(\theta-\theta_v\right)-\left(1-\gamma+\frac{1}{\gamma\mathrm{M}^2}\right)\left(v'+i\alpha u+\delta w\right)\right],$$
$$\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left(\theta_v''-k^2\theta_v\right)=-\frac{\mathrm{Re}}{2}\,\frac{33\left(\theta-\theta_v\right)}{10\,\tau},\qquad k^2=\alpha^2+\delta^2. \tag{9}$$

Здесь и далее штрихи у неизвестных функций означают их прозводные соответствующего порядка по переменной x_2. Задача (9) замыкается граничными условиями

$$u\big|_{x_2=\pm1}=v\big|_{x_2=\pm1}=w\big|_{x_2=\pm1}=\theta\big|_{x_2=\pm1}=\theta_v\big|_{x_2=\pm1}=0. \tag{10}$$

Как было показано в [1], спектральная задача (9), (10) имеет вещественный спектр собственных значений $\mathrm{Re}(\alpha,\delta)$, симметричный относительно осей $\alpha=0$, $\delta=0$ на плоскости волновых чисел (α,δ). Кроме того, путём сведения системы (9) к спектральному пучку третьего порядка обыкновенных дифференциальных операторов для функции $\vartheta=\theta-\theta_v$ в длинноволновом приближении была получена асимптотическая формула для зависимости критического числа Рейнольдса от параметров задачи

$$\mathrm{Re}_{cr}=\pi^2\left(\frac{a_0}{\tau^3}+\frac{b_0}{\tau M_0^4(\alpha_1+4/3)}\right)^{-1/3}, \tag{11}$$

где a_0, b_0 — некоторые положительные постоянные порядка $O(1)$.

2. Численный метод

Для произвольных значений волновых чисел α, δ (длин волн возмущений) спектральная задача (9), (10) решалась численно с помощью метода коллокаций [9], в основе которого лежит алгебраическое интерполирование искомого решения по некоторой чебышевской системе функций. В данном случае использовался инструментарий математического пакета Matlab, где в случае непериодических функций применяется интерполяция полиномами Чебышева

$$T_k(x_2)=\cos(k\arccos x_2),\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Такой выбор обеспечивает экспоненциально быструю сходимость аппроксимирующего ряда для произвольных граничных условий, по крайней мере, в классе бесконечно дифференцируемых функций. На практике этим достигается высокая точность вычислений даже на грубых сетках.

В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса—Лобатто $x_{2,n}=\cos(\pi\,n/N)$, $n=0,\,1,\,\ldots,\,N$, в которых полином Чебышева N-й степени имеет экстремумы на отрезке $[-1,\,1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу (9), (10), аппроксимируются на данной сетке матрицей коллокационных производных D_N^1 размером $(N+1)\times(N+1)$ [9]:

$$D^1_{N,lj}=\begin{cases}(-1)^{l+j}s_l/[s_j(z_l-z_j)], & l\neq j,\\ -z_j/[2(1-z_j^2)], & 1\le l=j\le N-1,\\ (2N^2+1)/6, & l=j=0,\\ -(2N^2+1)/6, & l=j=N,\end{cases}\qquad s_j=\begin{cases}2, & j=0,\,N,\\ 1, & j=1,\,2,\,\ldots,\,N-1.\end{cases}$$

При этом элементы l-й строки матрицы D_N^1 являются коэффициентами разностной аппроксимации первой производной в l-м узле коллокации на шаблоне $\{x_{2,n}\}$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$.

В терминах введённых аппроксимаций задача (9), (10) сводится к обобщённой задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра $\lambda = \mathrm{Re}$:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} \big(G_{ij} - \lambda\, F_{ij}\big) q_j = 0, \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, 5N+4. \tag{12}$$

Здесь вектор неизвестных $\mathbf{q}$ размером $5(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{q} = (u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_N,\, v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_N,\, w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_N,\, \theta_0,\, \theta_1,\, \ldots,\, \theta_N,\, \theta_{v,0},\, \theta_{v,1},\, \ldots,\, \theta_{v,N}).$$

Матрицы G, F размером $5(N+1)\times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A \otimes D_N^2 + B_1 \otimes D_N^1 + C_1 \otimes I_N, \quad F = B_2 \otimes D_N^1 + C_2 \otimes I_N,$$

где матрицы A, B_1, C_1, B_2, C_2 размером 5×5 имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 + \dfrac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & 0 & -b & 0 \\ i\alpha\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & 0 & \delta\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\delta\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\left[\alpha^2\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) + k^2\right] & 0 & i\alpha\delta\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 & -i\alpha b & 0 \\ -i\alpha\delta\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) & 0 & -\left[\delta^2\left(\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\right) + k^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha b & 0 & -ak^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ak^2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & i\alpha c/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta c/2 & 0 \\ -i\alpha c/2 & 0 & -\delta c/2 & \gamma_v/\tau & -\gamma_v/\tau \\ 0 & 0 & 0 & -33/(20\,\tau) & 33/(20\,\tau) \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}, \quad b = \gamma\,(\gamma - 1)\,\mathrm{M}^2, \quad c = 1 - \gamma + \frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}^2},$$

I_N — единичная матрица размером $(N+1)\times(N+1)$, а знак $\otimes$ означает прямое (тензорное) произведение матриц [10].

Однородные граничные условия (10) учитываются неявно через оператор D_N^1 [9] и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^l $(l = 1, 2)$ на окаймлённые матрицы размером $(N-1)\times(N-1)$. Последние получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^l = D_{N,j}^l = 0, \quad D_{i,0}^l = D_{i,N}^l = 0, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \ldots, N, \quad l = 1, 2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщённой спектральной задачи (12) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [11], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщённой верхней треугольной форме. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений числа Маха M, коэффициента α_1, степени неравновесности колебательной энергии γ_v, времени колебательной релаксации τ и каждой пары волновых чисел $(\alpha,\, \delta)$ получался набор из $(N+1)$ собственных значений, среди которых находилось минимальное по модулю число Рейнольдса $\mathrm{Re}(\alpha,\, \delta) = |\,\lambda_{\min}(\alpha,\, \delta)|$. Значение критического числа Рейнольдса Re_{cr} для данных $\mathrm{M}, \alpha_1, \gamma_v, \tau$ принималось равным минимальному значению Re во всем диапазоне волновых чисел $\mathrm{Re}(\alpha,\, \delta)$: $\mathrm{Re}_{cr} = \min\limits_{(\alpha,\,\delta)} [\mathrm{Re}(\alpha,\, \delta)]$. Затем вычислялись соответствующие Re_{cr} собственные функции u, v, w, θ, θ_v.

Расчёты спектров собственных значений $\lambda(\alpha,\, \delta,\, \mathrm{M},\, \alpha_1,\, \gamma_v,\, \tau)$ проводились в диапазоне волновых чисел $\alpha = 0 \div 10$, $\delta = 0 \div 10$ при следующих значениях параметров: $\gamma_v = 0.111 \div 0.667$, $\tau = 1 \div 4$, $\alpha_1 = 0 \div 2$, $\mathrm{M} = 2 \div 5$, $\mathrm{Pr} = 3/4$, $\gamma = 7/5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\alpha = h_\delta = 0.1$. В большинстве расчётов число узлов коллокации в интервале $[-1,\, 1]$ принималось равным $N + 1 = 50$. Для проверки точности расчётов на основе симметрии спектра выполнялись расчёты в диапазоне волновых чисел $\alpha = -10 \div 10,\ \delta = -10 \div 10$ и варьировалось число узлов коллокации: $N + 1 = 32 \div 100$.

3. Результаты расчётов и их обсуждение

Выполненные расчёты показали, что при всех рассмотренных значениях параметров задачи минимальные по модулю собственные значения $\mathrm{Re}(\alpha,\, \delta) = |\,\lambda_{\min}(\alpha,\, \delta)|$ достигаются на оси $\alpha \neq 0$ при $\delta = 0$ в плоскости волновых чисел $(\alpha,\, \delta)$. Изолинии $\mathrm{Re}(\alpha, \delta)$ приведены на рис. 1.

Как и в случае дозвуковых чисел Маха [1], наиболее “опасными” являются возмущения продольной моды. С учётом периодичности полученного решения по продольной координате x_1 эти возмущения представляют собой пары двумерных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях, с осями, перпендикулярными несущему потоку. Распределение завихренности вычисляется по формуле

$$\frac{\omega(x_1, x_2)}{\omega_0} = -\frac{1}{w_0}\left[\left(\alpha v_i + \frac{du_r}{dx_2}\right)\cos\alpha x_1 - \left(\alpha v_r - \frac{du_i}{dx_2}\right)\sin\alpha x_1\right].$$

Здесь $u_r(x_2)$, $u_i(x_2)$, $v_r(x_2)$, $v_i(x_2)$ — вещественные и мнимые части собственных функций u, v, а нормировочный множитель ω_0 представляет собой безразмерный поток за-

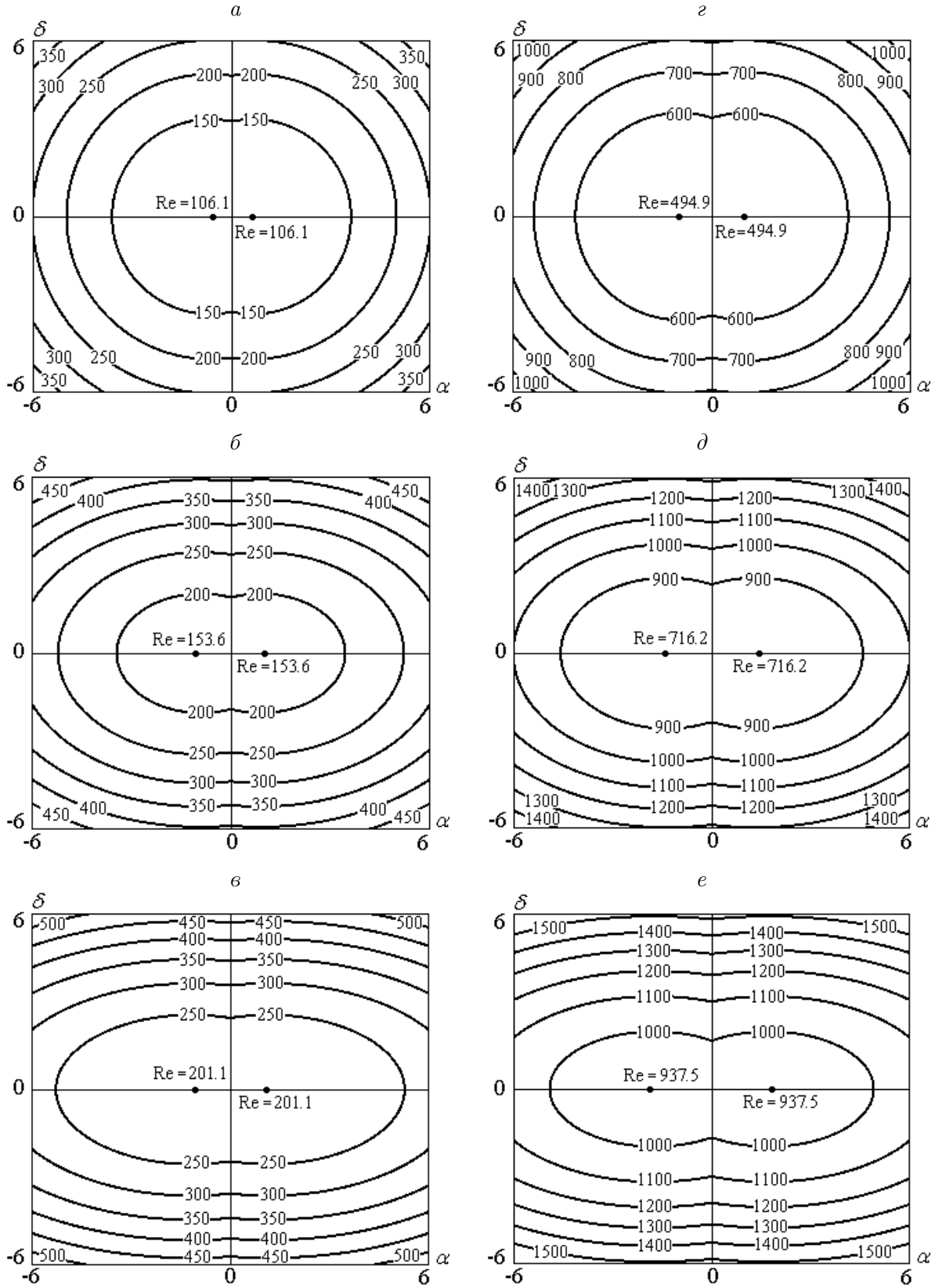

Рис. 1. Изолинии поверхностей $\mathrm{Re}(\alpha, \delta)$ для M = 3 (*а, б, в*) и M = 5 (*г, д, е*) при $\alpha_1 = 0$, $\tau = 2$ (*а, г* — $\gamma_v = 0$; *б, д* — $\gamma_v = 0.250$; *в, е* — $\gamma_v = 0.667$; точки на линии $\delta = 0$ фиксируют критические значения числа Рейнольдса для данного режима)

вихренности через расчётную область (циркуляцию вектора скорости по границе), вычисляемый по формуле

$$\omega_0 = \int\limits_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} dx_1 \int\limits_{-1}^{1} dx_2\, \omega(x_1, x_2).$$

На рис. 2 представлены примеры изолиний завихрённостей $\omega(x_1, x_2)$ при различных критических числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}(\alpha,\, \alpha_1,\, \gamma_v,\, \tau,\, \mathrm{M})$ и значениях амплитуд возмущений скорости, составляющих 10 % значения модуля скорости несущего потока на непроницаемых границах.

Зависимость числа Рейнольдса для продольных мод возмущений от волнового числа α показана на рис. 3. Здесь штрихпунктирные линии соединяют значения абсолютных минимумов на параметризованных по γ_v и τ кривых $\mathrm{Re}(\alpha)$, что позволяет проследить эволюцию Re_{cr}. На рис. 4 приведена зависимость Re_{cr} от степени неравновесности γ_v. Рисунки 1, 3, 4 позволяют констатировать, что с возрастанием параметров α_1, γ_v, τ, M устойчивость течения (критическое число Re_{cr}) также возрастает, а соответствующие значения волновых чисел α сдвигаются в сторону более коротких волн. Сопоставление этих результатов с формулой (11) показывает, что длинноволновая асимптотика на качественном уровне правильно воспроизводит зависимость Re_{cr} от параметров течения в области волновых чисел $\alpha \sim O(1)$.

Критические значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}(\alpha_1,\, \gamma_v,\, \tau,\, \mathrm{M})$ приведены в табл. 1, а соответствующие им значения волнового числа α — в табл. 2. Из таблицы 1 следует, что максимальный диапазон изменения Re_{cr} при рассмотренных вариациях параметров задачи приближается к полутора порядкам, что существенно больше, чем было получено в [1] для дозвукового течения. Действительно, если при $\mathrm{M} \le 1$ и тех же значениях других параметров режима, как и в настоящей работе, критические числа Рейнольдса находились в пределах $\mathrm{Re}_{cr} \simeq (1.5 \div 3.5) \cdot 10^1$, то в данном случае соответствующие пределы составляют $\mathrm{Re}_{cr} \simeq 0.5 \cdot 10^2 \div 1.5 \cdot 10^3$. Рассматривая степень влияния каждого параметра на Re_{cr} при фиксированных значениях остальных параметров, можно

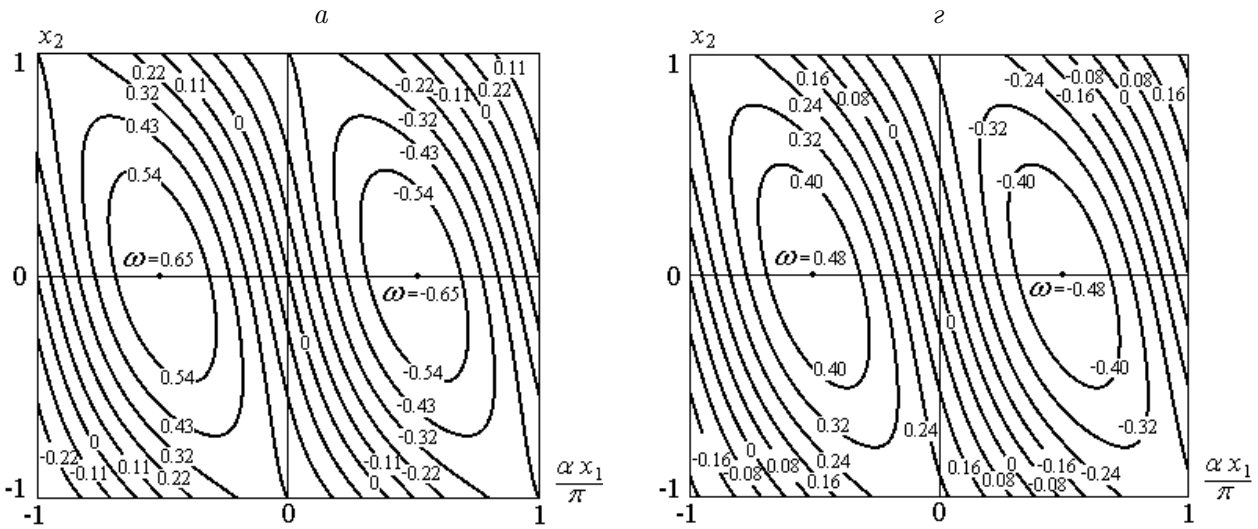

Рис. 2. Изолинии завихренности критических возмущений $\omega(x_1, x_2)$ для $\mathrm{M} = 3$, $\alpha_1 = 0$, $\tau = 2$ (*а* — $\gamma_v = 0$, $\mathrm{Re}_{cr} = 106.1$; *б* — $\gamma_v = 0.667$, $\mathrm{Re}_{cr} = 201.1$; точки на линии $x_2 = 0$ фиксируют максимальное и минимальное значения ω для данного режима)

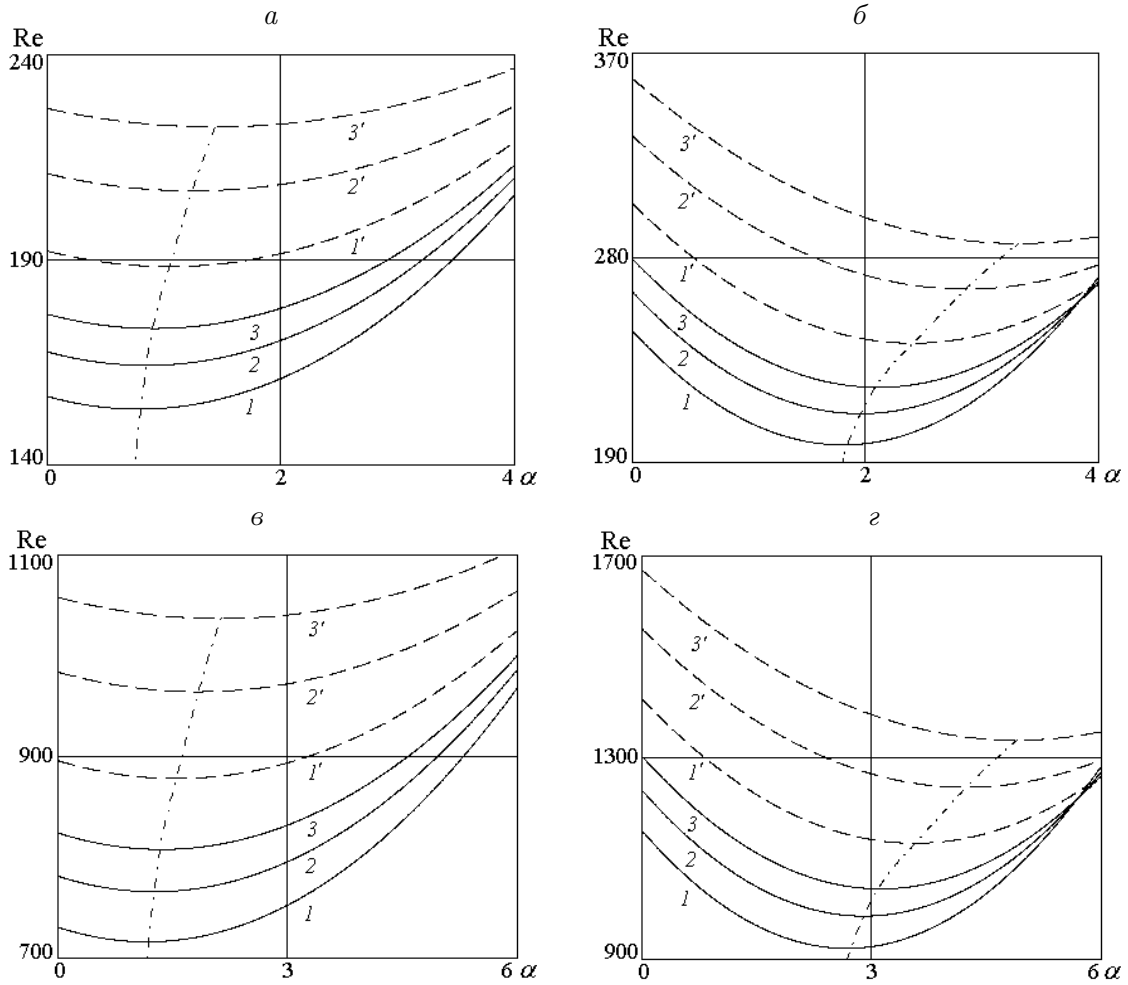

Рис. 3. Зависимость $\mathrm{Re}(\alpha)$ для продольных мод возмущений при числах Маха $\mathrm{M} = 3$ (*а*, *б*) и $\mathrm{M} = 5$ (*в*, *г*) (*а*, *в* — $\alpha_1 = 0$; *б*, *г* — $\alpha_1 = 2$; *1*, *1′* — $\gamma_v = 0.250$; *2*, *2′* — $\gamma_v = 0.429$; *3*, *3′* — $\gamma_v = 0.667$; сплошные линии — $\tau = 1$, штриховые — $\tau = 3$, штрихпунктирные — зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от волнового числа α)

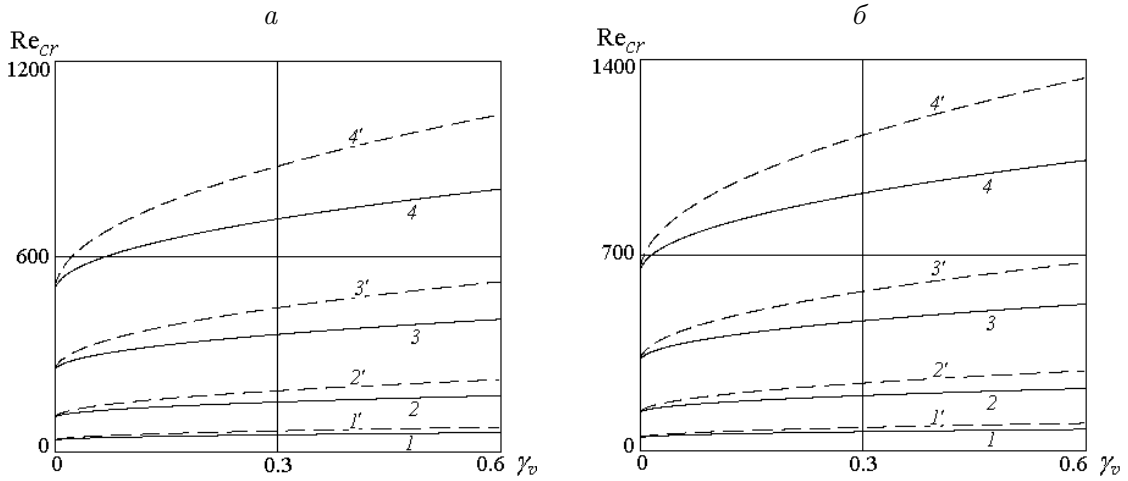

Рис. 4. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от степени неравновесности колебательной моды γ_v (*а* — $\alpha_1 = 0$; *б* — $\alpha_1 = 2$; *1*, *1′* – $\mathrm{M} = 2$; *2*, *2′* — $\mathrm{M} = 3$; *3*, *3′* — $\mathrm{M} = 4$; *4*, *4′* — $\mathrm{M} = 5$; сплошные линии — $\tau = 1$, штриховые — $\tau = 3$)

Т а б л и ц а 1. Критические значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}(\alpha_1,\ \gamma_v,\ \tau,\ \mathrm{M})$

M	$\tau = 1$			$\tau = 4$		
	$\gamma_v = 0.111$	$\gamma_v = 0.250$	$\gamma_v = 0.667$	$\gamma_v = 0.111$	$\gamma_v = 0.250$	$\gamma_v = 0.667$
$\alpha_1 = 0$						
2	48.22	53.02	59.82	59.82	69.42	82.98
3	139.70	153.62	173.28	173.28	201.08	240.41
4	328.80	361.54	407.81	407.81	473.25	565.80
5	651.37	716.19	807.86	807.86	937.51	1120.85
$\alpha_1 = 2$						
2	62.07	68.25	76.99	76.99	89.34	106.81
3	179.83	197.72	223.03	223.03	258.82	309.44
4	423.22	465.34	524.90	524.90	609.14	728.26
5	838.40	921.84	1039.83	1039.83	1206.70	1442.69

Т а б л и ц а 2. Значения волнового числа α, соответствующие критическим значениям числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}(\alpha_1,\ \gamma_v,\ \tau,\ \mathrm{M})$

M	$\tau = 1$			$\tau = 4$		
	$\gamma_v = 0.111$	$\gamma_v = 0.250$	$\gamma_v = 0.667$	$\gamma_v = 0.111$	$\gamma_v = 0.250$	$\gamma_v = 0.667$
$\alpha_1 = 0$						
2	0.672	0.733	0.855	0.855	1.099	1.587
3	0.718	0.784	0.914	0.914	1.175	1.698
4	0.868	0.947	1.105	1.105	1.421	2.052
5	1,063	1,160	1.353	1.35319	1.739	2.513
$\alpha_1 = 2$						
2	1.548	1.689	1.970	1.970	2.533	3.658
3	1.656	1.806	2.107	2.107	2.709	3.913
4	2.001	2.183	2.547	2.547	3.275	4.731
5	2.450	2.673	3.118	3.119	4.009	5.791

заметить, что наибольшее воздействие на возрастание Re_{cr} оказывает рост числа Маха (сжимаемость). При этом в диапазоне $\mathrm{M} = 2 \div 5$ критическое число Рейнольдса увеличиваются более чем на порядок. В то же время при изменении числа Маха в дозвуковом диапазоне $\mathrm{M} = 0.2 \div 0.8$ возрастание Re_{cr} лежит в пределах 10 %. Вместе с тем степень влияния коэффициента возбуждения γ_v и времени релаксации τ, определявших основное воздействие при $\mathrm{M} \leq 1$, при переходе к сверхзвуковому режиму остаются на прежнем уровне. Тем не менее сделанный в [1] вывод о возможности управления потоком с помощью лазерного возбуждения колебательной моды остается в силе, так как в расчётных пределах изменения γ_v число Re_{cr} возрастает в этой работе приблизительно на 30 %.

В заключение отметим, что полученные значения Re_{cr} остаются более чем на порядок ниже критических чисел Рейнольдса, рассчитанных в рамках линейной теории устойчивости для совершенного газа [5]. Кроме того, имеется качественное различие в зависимостях $\mathrm{Re}_{cr}(\mathrm{M})$. Если в рассмотренном случае Re_{cr} с ростом числа Маха в диапазоне $\mathrm{M} = 2 \div 5$ монотонно возрастает, то в рамках линейной теории Re_{cr} в этом диапазоне, наоборот, убывает.

Список литературы

[1] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 57–73.

[2] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.

[3] Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 258. P 131–165.

[4] Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10, No. 3. P. 709–729.

[5] Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, iss. 3. P. 036322(15).

[6] Жданов В.М., Алиевский М.Е. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.

[7] Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского гос. ун-та, 2003.

[8] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.

[9] Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer Ser. in Comput. Phys. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[10] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.

[11] Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10, No. 2. P. 241–256.

Поступила в редакцию 30 октября 2013 г.