

## Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне\*

А. А. АГАНИН, А. И. ДАВЛЕТШИН, Д. Ю. ТОПОРКОВ

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия*

e-mail: aganin@kfti.knc.ru, davanas@mail.ru, dmtr@gmail.com

Предлагается математическая модель динамики расположенных в линию кавитационных пузырьков при их однократном сильном совместном расширении-сжатии в жидкости. Основное внимание уделяется работоспособности модели в условиях известных экспериментов по акустическому сверхсжатию кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне.

*Ключевые слова:* кавитационный пузырек, гидродинамическое взаимодействие пузырьков, деформация пузырьков, сильное сжатие пузырьков.

### Введение

Одной из наиболее привлекательных для теории и приложений особенностей динамики пузырьков в жидкости является возможность достижения в определённых условиях в полости пузырьков экстремально высоких давлений, плотностей и температур. В частности, считается экспериментально установленным, что при расширении-сжатии отдельного пузырька на режиме периодической сонолюминесценции внутри пузырька кратковременно может возникать плазма с температурой более 16 000 К [1]. О достижении ещё более высоких степеней кумулятивного сжатия кавитационных пузырьков сообщается в ряде публикаций Талиархана с соавторами [2, 3], в которых утверждается о регистрации в экспериментах по производству нейтронов и ядер трития при акустическом возбуждении кластера кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне.

Для суперсильного кумулятивного сжатия содержимого пузырьков их форма при сжатии должна сохраняться близкой к сферической. В настоящее время широко используются ряд моделей эволюции несферичности отдельных пузырьков на режиме сонолюминесценции [4]. Имеются также исследования [5], посвящённые моделированию деформаций отдельных пузырьков при их ещё больших расширениях-сжатиях, соответствующих режиму акустического суперсжатия кавитационных пузырьков в указанных работах [2, 3]. Экономичные с вычислительной точки зрения модели, описывающие влияние гидродинамического взаимодействия между кавитационными пузырьками на их деформацию при сильном расширении-сжатии пузырьков, пока отсутствуют. Между тем такие модели представляют значительный интерес, поскольку и в практических приложениях, использующих эффект сильного сжатия пузырьков (например в сонохимии [6]), и в экспериментах по акустическому сверхсжатию кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне число пузырьков, вовлечённых в процесс совместного

---

\*Работа выполнена в рамках программы РАН, гранта Президента РФ (№ МК-2244.2014.1) и при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00341-а).

расширения-сжатия, очень велико. При этом межпузырьковые расстояния зачастую таковы, что их взаимное влияние на форму поверхности пузырьков может быть существенным.

В настоящей работе предлагается математическая модель численного исследования влияния гидродинамического взаимодействия кавитационных пузырьков на изменение их формы в задачах однократного сильного совместного расширения-сжатия пузырьков. В общем случае пузырьки могут быть расположены в жидкости произвольным образом, а их взаимодействие — пространственно трёхмерное. Авторами рассматривается частный случай, когда пузырьки расположены в линию. При этом центры пузырьков всегда находятся на одной прямой, взаимодействие между ними пространственно двумерное, а их деформации осесимметричны. Такой частный случай может реализовываться на практике. Так, образование подобных линейчатых стримеров в экспериментах по акустическому сверхсжатию кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне отмечается в [7]. Более того, такие стримеры, нежелательные с точки зрения реализации суперсжатия, оказываются даже более “живучими”, чем сферические кластеры. С учётом этого в настоящей работе основное внимание уделяется работоспособности модели гидродинамического взаимодействия кавитационных пузырьков в условиях экспериментов по акустической кавитации дейтерированного ацетона [2].

## 1. Постановка задачи

Исследуется динамика расположенных в жидкости в линию (в виде линейчатого стримера) кавитационных пузырьков (рис. 1) при их совместном однократном сильном расширении-сжатии, когда гидродинамическое взаимодействие пузырьков играет важную роль. Прямая, на которой расположены центры пузырьков, является осью симметрии задачи. Рассмотрение ведётся в условиях экспериментов по акустической кавитации дейтерированного ацетона [2], поскольку подобные линейчатые стримеры в данных экспериментах наблюдались довольно часто, о чем свидетельствуют фотографии, приведённые в [7].

Пузырьки находятся в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны, где давление  $p_\infty$  изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь  $p_0$  — статическое давление,  $p_a$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота колебаний,  $t$  — время,  $\varphi_0$  — фаза колебаний при  $t = 0$ . Амплитуда  $p_a$  значительно превышает статическое давление  $p_0$ , поэтому в фазе отрицательного звукового давления окружающая пузырьки жидкость находится под действием больших растягивающих напряжений. В силу малых размеров пузырьков сила тяжести не учитывается.

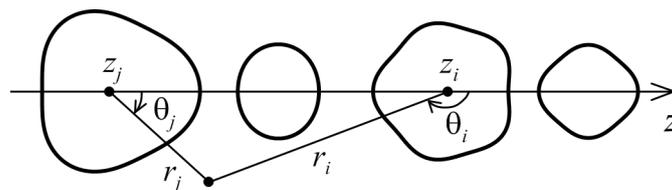


Рис. 1. Контуры взаимодействующих пузырьков в осевом сечении

В результате взаимодействия пузырьки в ходе расширения-сжатия перемещаются в жидкости вдоль оси симметрии. Радиус пузырьков в начале расширения  $R_0 \leq 5$  мкм, в ходе расширения он возрастает до  $R_{\max} \sim 500$  мкм, после чего при сжатии уменьшается до  $R_{\min} \sim 20$  мкм. После сжатия пузырьки совершают ряд быстро затухающих радиальных колебаний (отскоков), которые в настоящей работе не рассматриваются. Расширение и большая часть сжатия относительно медленные. Однако в финальной стадии сжатия скорость уменьшения радиуса  $\dot{R}$  стремительно возрастает до 1–1.5 км/с. В результате этого в конце сжатия внутри пузырьков, если их форма в начале сжатия достаточно близка к сферической, могут возникать радиально сходящиеся простые или ударные волны. При фокусировке таких волн в центральной области пузырьков могут достигаться представляющие большой интерес [8] супервысокие давления, плотности и температуры. Если же несферичность пузырьков в начале сжатия окажется недостаточно малой, то пузырьки в ходе сжатия могут либо стать сильно несферическими, либо вовсе разрушиться (потерять в осевом сечении односвязность). В обоих случаях фокусировка радиально сходящихся волн в полости пузырьков не реализуется близкой к сферической. Как следствие, кумулятивного сжатия пара в центральной области пузырьков, по-видимому, не произойдёт и соответственно не будут достигнуты супервысокие давления, плотности и температуры.

## 2. Математическая модель

Для описания динамики отдельного сферического кавитационного пузырька при его сильном расширении-сжатии можно воспользоваться одномерной моделью Нигматулина [9], являющейся на сегодня одной из наиболее физически реалистичных. Согласно этой модели движение пара как в пузырьке, так и в окружающей жидкости описывается уравнениями газовой динамики. Учитываются нестационарная теплопроводность в обеих фазах, неравновесные испарение и конденсация на межфазной поверхности. Используются реалистичные широкодиапазонные уравнения состояния, построенные по экспериментальным данным. Эту модель можно применять для исследования динамики пузырька как на стадии с относительно небольшими скоростями изменения его радиуса, включающей расширение и большую часть сжатия, так и на стадии с высокими скоростями изменения радиуса, охватывающей кратковременную заключительную часть сжатия, на которой в пузырьке и в жидкости могут возникать ударные волны.

На первый взгляд кажется привлекательным применить обобщение данной модели для описания совместной динамики пузырьков в линейчатом стримере. При этом нужно учесть, что рассматриваемая задача является двумерной (осесимметричной) и что число пузырьков в жидкости значительно больше одного. Однако использование такого обобщения вряд ли возможно, поскольку решение задач в рамках модели Нигматулина находится с помощью численных методов (типа метода Годунова [10]), в силу чего даже для расчёта одномерных задач требуется значительный объём компьютерного времени [11]. Поэтому в настоящей работе используется ряд допущений, позволяющих существенно упростить математическую постановку. Первое из них состоит в том, что отклонения формы пузырьков от сферической являются малыми. Для исследования возможностей экстремально сильного сжатия пузырьков такое допущение не обременительно, поскольку при большой несферичности пузырьков достижение суперсжатия пара в них вряд ли возможно. Это ограничение может даже кратковременно нарушаться в начале расширения пузырьков, однако влияние такого нарушения будет

незначительным, поскольку при расширении несферичность пузырьков быстро уменьшается.

При малой несферичности пузырьков уравнение их поверхности  $F_i(r_i, \theta_i, t) = 0$  удобно представить в виде

$$F_i(r_i, \theta_i, t) = r_i - R_i(t) - \sum_{n=2}^N a_{ni}(t) P_n(\cos \theta_i) = 0, \quad (2)$$

где  $i$  — номер пузырька ( $1 \leq i \leq K$ ,  $K$  — число пузырьков в линейчатом стримере),  $r_i, \theta_i$  — радиальная и широтная координаты сферической системы отсчёта с началом в центре  $i$ -го пузырька,  $R_i$  — радиус  $i$ -го пузырька,  $a_{ni}$  — амплитуда (со знаком) отклонения формы  $i$ -го пузырька от сферической в виде осесимметричной сферической гармоники с номером  $n$ ,  $P_n$  — полином Лежандра степени  $n$ ,  $N$  — максимум среди номеров гармоник, определяющих несферичность пузырьков. Отклонения от сферической формы пузырьков малы, т. е.  $|\varepsilon_{ni}| \ll 1$ , где  $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$  — безразмерная амплитуда (со знаком) отклонения.

Второе допущение заключается в том, что скорости поступательного движения пузырьков полагаются малыми. В полной мере этому ограничению удовлетворяют центральные пузырьки линейчатого стримера, поскольку вызывающая их поступательное движение результирующая сила гидродинамического взаимодействия с соседними пузырьками оказывается малой, так как воздействия находящихся по разную сторону пузырьков во многом взаимно компенсируются. Из-за отсутствия такой компенсации у периферийных пузырьков данное допущение может кратковременно нарушаться в финальной высокоскоростной стадии их сжатия. Однако, как будет показано ниже, в конце сжатия взаимодействие пузырьков оказывается несущественным. Поэтому указанное нарушение не будет влиять на динамику центральных пузырьков, которые с точки зрения сильного сжатия пара представляют наибольший интерес в силу их более слабого трансляционного движения и, как следствие, меньшего роста отклонений их формы от сферической.

## 2.1. Низкоскоростная стадия динамики пузырьков

В рамках указанных допущений для описания динамики пузырьков на низкоскоростной стадии их совместной динамики, которая включает всю фазу расширения и бóльшую часть фазы сжатия, авторами используется обобщение уравнений гидродинамического взаимодействия двух газовых пузырьков [12] на случай произвольного числа пузырьков с центрами на одной прямой. При этом учитывается, что в настоящей работе речь идет о динамике не газовых, а кавитационных пузырьков. Следуя [12], полагается, что эффекты вязкости и сжимаемости малы. Поэтому сначала уравнения взаимодействия пузырьков получаются в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости, а затем с помощью поправок учитываются эффекты вязкости и сжимаемости.

Без учёта эффектов вязкости и сжимаемости уравнения динамики жидкости (уравнение неразрывности и интеграл Коши — Лагранжа) в терминах потенциала скорости  $\Phi$  можно записать следующим образом:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $p$  — давление в произвольной точке жидкости,  $\rho_0$  — невозмущённая плотность жидкости. На поверхности пузырьков ставятся контактные условия

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F_i = 0, \quad (4)$$

$$p = p_i - 2H_i\sigma, \quad (5)$$

где  $p_i$  — давление пара в  $i$ -м пузырьке,  $2H_i$  — средняя кривизна его поверхности,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Потенциал скорости жидкости  $\Phi$  принимается в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^K \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma i}(t) P_{\gamma}(\cos \theta_i)}{r_i^{\gamma+1}}. \quad (6)$$

Используя выражения для поверхностей пузырьков (2) и потенциала скорости жидкости (6), из кинематических (4) и динамических (5) граничных условий путём довольно громоздких преобразований [12] можно получить следующую систему уравнений для радиусов пузырьков  $R_i$ , положений их центров  $z_i$  и амплитуд отклонений их формы от сферической  $a_{ni}$ :

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_{\infty}}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ \frac{\dot{B}_{0j}}{d_{ij}} - \frac{R_j^3 \ddot{z}_j - B_{0j}(\dot{z}_i + 5\dot{z}_j)}{2s_{ij}d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j(\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1, k \neq i}^K \frac{3B_{0j}B_{0k}}{4s_{ij}s_{ik}d_{ij}^2 d_{ik}^2} - \sum_{k=1, k \neq j}^K \frac{(B_{0k}R_j^3)'}{2s_{ij}s_{jk}d_{ij}^2 d_{jk}^2} + \frac{3(R_j^2 \dot{z}_j a_{2j})'}{10s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \psi_{0i} + \Delta_i, \quad (7)$$

$$\left(1 - \frac{7\varepsilon_{2i}}{5}\right) R_i \ddot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\varepsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \sum_{m=2}^N \frac{9\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} \dot{z}_i^2 \varepsilon_{mi}}{5} = \\ = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ -\frac{3(B_{0j}R_i)'}{s_{ij}d_{ij}^2} + \frac{3(R_i R_j^3 \dot{z}_j)'}{d_{ij}^3} + \frac{9R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{s_{ij}d_{ij}^4} + \right. \\ \left. + \frac{3(\dot{B}_{0j}a_{2i} + 3B_{0j}\dot{a}_{2i} + 4B_{0j}\dot{R}_i \varepsilon_{2i})}{5s_{ij}d_{ij}^2} + \sum_{m=2}^N \frac{18\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{5s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \psi_{1i}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{n+1} \left[ R_i \ddot{a}_{ni} + 3\dot{R}_i \dot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} - \frac{3}{2} \sum_{m=2}^N \left( \Theta_{m1n}^{2/3, n-2} \ddot{z}_i a_{mi} - \bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} \dot{z}_i \dot{a}_{mi} \right) \right] + \\ + \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} - \frac{3\dot{z}_i}{2} \sum_{m=2}^N \left[ \frac{3}{2} \left( \sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{\bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2} \beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} - \chi_{m11n} \right) \dot{z}_i \varepsilon_{mi} + \frac{\beta_{m1n} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{m+1} \right] + \\ + \frac{(n-1)(n+2)\sigma \varepsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left\{ \frac{9\beta_{11n} B_{0j} \dot{z}_i}{4s_{ij}d_{ij}^2} - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} - \frac{5\beta_{21n} R_i B_{0j} \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \right. \\ \left. + \frac{15\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4s_{ij}d_{ij}^4} + \frac{21\beta_{31n} R_i^2 B_{0j} \dot{z}_i}{8s_{ij}d_{ij}^4} + \sum_{k=1, k \neq i}^K \frac{9\beta_{11n} B_{0j} B_{0k}}{8s_{ij}s_{ik}d_{ij}^2 d_{ik}^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9\alpha_{11n}B_{0j}\dot{z}_i\varepsilon_{2i}}{10s_{ij}d_{ij}^2} - \sum_{m=2}^N \left[ \frac{3\bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} (B_{0j}a_{mi})'}{2s_{ij} (n+1) d_{ij}^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\Theta_{m1n}^{2,m+1} B_{0j} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i\varepsilon_{mi})}{2s_{ij} (m+1) d_{ij}^2} - \frac{3B_{0j}\dot{z}_i\varepsilon_{mi}}{2s_{ij}d_{ij}^2} \left( \sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{2\Theta_{\gamma1n}^{1/2,\gamma+1}\bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2}}{\gamma+1} - 3\chi_{m11n} \right) \right] + \\
& \left. + \frac{5(R_i^2 B_{0j})'}{3d_{ij}^3} \delta_{2n} - \frac{7(R_i^3 B_{0j})'}{4s_{ij}d_{ij}^4} \delta_{3n} - \frac{5(R_i^2 R_j^3 \dot{z}_j)'}{2s_{ij}d_{ij}^4} + 10R_i^2 B_{0j} s_{ij} \dot{d}_{ij} \delta_{2n} \right\} + \psi_{ni}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Здесь точка и штрих означают производную по времени,  $d_{ij} = |z_i - z_j|$  — расстояние между центрами  $i$ -го и  $j$ -го пузырьков,  $B_{0i} = -R_i^2 \dot{R}_i$ ,  $s_{ij} = (z_i - z_j)/d_{ij}$ ,  $\Theta_{\gamma1\varsigma}^{n,k} = nk\alpha_{\gamma1\varsigma} + \beta_{\gamma1\varsigma}$ ,  $\bar{\Theta}_{\gamma1\varsigma}^{n,k} = nk\alpha_{\gamma1\varsigma} - \beta_{\gamma1\varsigma}$ ,  $\beta_{\gamma1\varsigma} = [\gamma(\gamma+1) + 2 - \varsigma(\varsigma+1)]\alpha_{\gamma1\varsigma}/2$ ,  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера,

$$\alpha_{\gamma1\varsigma} = \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 \eta P_\gamma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta, \quad \chi_{\gamma11\varsigma} = \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_\gamma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta,$$

$\psi_{0i}$ ,  $\psi_{1i}$ ,  $\psi_{ni}$ ,  $\Delta_i$ , — поправки, учитывающие влияние вязкости и сжимаемости жидкости.

Аналогично [13] эффект вязкости жидкости учитывается в предположении потенциальности её движения [13]. В этом случае поправки  $\psi_{0i}$ ,  $\psi_{1i}$ ,  $\psi_{ni}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\psi_{0i} &= -\frac{4\nu\dot{R}_i}{R_i}, \quad \psi_{1i} = -\frac{12\nu}{R_i} \left( \dot{z}_i (1 - \varepsilon_{2i}) + \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ \frac{B_{0j}}{s_{ij}d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j}{d_{ij}^3} - \frac{B_{0j}\varepsilon_{2i}}{s_{ij}d_{ij}^2} \right] \right), \\
\psi_{ni} &= -\frac{2\nu}{R_i} \left\{ (n+2)\dot{a}_{ni} + 2(n-1)\dot{R}_i\varepsilon_{ni} + \sum_{m=2}^N \frac{3n\bar{\Theta}_{m1n}^{2/n, n-2} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{2} - \right. \\
& \left. - \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[ \frac{10R_i B_{0j}}{d_{ij}^3} \delta_{2n} - \frac{21R_i^2 B_{0j}}{s_{ij}d_{ij}^4} \delta_{3n} - \frac{15R_i R_j^3 \dot{z}_j}{s_{ij}d_{ij}^4} \delta_{2n} - \sum_{m=2}^N \frac{3n\bar{\Theta}_{m1n}^{2/n, n-2} B_{0j} \varepsilon_{mi}}{2s_{ij}d_{ij}^2} \right] \right\}, \quad (10)
\end{aligned}$$

где  $\nu = \mu/\rho_0$ ,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Эффект сжимаемости жидкости предполагается малым и поэтому описывается без учёта деформаций и взаимодействия пузырьков [14]. В таком предположении поправка на сжимаемость  $\Delta_i$  определяется в виде

$$\Delta_i = \frac{\dot{R}_i}{c_0} \left( R_i \ddot{R}_i + \frac{\dot{R}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{4} + \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} \right) + \frac{R_i}{c_0} \left( \frac{\dot{z}_i \ddot{z}_i}{2} + \frac{\dot{p}_i - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - \frac{4\nu \ddot{R}_i}{R_i} \right), \quad (11)$$

где  $c_0$  — невозмущённая скорость звука в жидкости.

Следует отметить, что в уравнениях (7)–(11) не учитывается влияние завихрённости жидкости, поскольку движение жидкости принимается потенциальным. В частном случае одиночного неподвижного пузырька (7)–(11) сводятся к таким же уравнениям, к которым на низкоскоростной стадии сводятся уравнения динамики отдельного пузырька [5], если в них пренебречь завихрённостью жидкости, теплопроводностью и испарением-конденсацией. Влияние завихрённости жидкости на низкоскоростной стадии существенно лишь в начале расширения очень маленьких пузырьков (порядка размеров кавитационных зародышей). Для отдельных пузырьков его нужно учитывать,

в то время как для пузырьков в группе этого можно не делать. Последнее объясняется тем, что взаимодействие между пузырьками при их расширении оказывается настолько сильным, что полностью нейтрализует остаточный эффект влияния завихренности жидкости на форму пузырьков, обусловленный проявлением завихренности в самом начале их расширения. На низкоскоростной стадии расширения-сжатия эффекты теплопроводности и испарения-конденсации приводят к тому, что давление в пузырьках  $p_v$  незначительно отличается от давления насыщения  $p_s(T_0)$ , соответствующего температуре окружающей жидкости  $T_0$ . Поэтому влияние этих эффектов можно приближённо учесть, если принять  $p_i = p_v = p_s(T_0)$ , что и делается в настоящей работе.

При выводе уравнений (7)–(11) полагается, что величиной  $\delta^5$  по сравнению с 1 можно пренебречь, где  $\delta = \max_{ij}[(R_i + R_j)/d_{ij}]$ . Это означает, что уравнения (7)–(11) можно применять в случаях не очень малых расстояний между пузырьками, когда  $\delta^5 < 10^{-3}$  или  $h/(2R) > 10^{3/5} - 1 \approx 3$ , где  $R$ ,  $h$  — характерные радиус пузырьков и расстояние между их поверхностями.

Решение системы (7)–(11) при заданных начальных значениях  $R_i$ ,  $\dot{R}_i$ ,  $z_i$ ,  $\dot{z}_i$ ,  $a_{ni}$ ,  $\dot{a}_{ni}$  находится численно высокоточным методом Дормана — Принса с автоматическим выбором шага интегрирования [15].

## 2.2. Высокоскоростная стадия динамики пузырьков

Процесс сжатия в финальной высокоскоростной стадии с течением времени всё более отклоняется от того, что соответствует низкоскоростной стадии и описывается уравнениями (7)–(11). В частности, давление пара  $p_v$  всё более отличается от давления насыщения при  $T = T_0$ , нарастает неоднородность полей давления, плотности и температуры пара, в полости пузырьков возникают радиально сходящиеся волны (простые или ударные). В самом конце сжатия эти волны фокусируются в центральной области пузырька.

Таким образом, высокоскоростная стадия сжатия во многом отличается от начальной низкоскоростной. Несмотря на это для описания радиального движения, перемещений и деформаций пузырьков на данной стадии так же, как и на низкоскоростной, используется система (7)–(11). Одной из целей представленного здесь исследования является обоснование возможности применения такого подхода для получения оценок влияния гидродинамического взаимодействия пузырьков на уровень их несферичности в момент экстремального сжатия пара в них в результате совместного однократного сильного расширения-сжатия пузырьков.

Для реализации такого подхода, во-первых, необходимо ограничить сжатие пузырьков неким радиусом  $R_c$ , поскольку в силу предположения о постоянстве давления пара в них сжатие пузырьков в рамках системы (7)–(11) будет продолжаться до их разрушения, так как при отсутствии роста внутреннего давления радиус пузырька может уменьшаться до нуля, а при  $R \rightarrow 0$  несферичность пузырька неограниченно нарастает. Во-вторых, нужно оценить погрешность получаемых изменений радиуса пузырька и искажения его сферичности из-за использования допущений системы (7)–(11) на высокоскоростной стадии сжатия.

В настоящей работе принимается, что экстремальное сжатие пара во всех пузырьках достигается тогда, когда их радиус становится равным радиусу  $R_c$ , соответствующему экстремальному сжатию пара в одиночном пузырьке, подвергнутом расширению-сжатию в условиях экспериментов [2, 3]. Для этого полагается, что влияние гидроди-

намического взаимодействия на величину радиуса  $R_c$  в момент экстремального сжатия пара в пузырьках является несущественным. Это допущение основано на том, что, как будет показано ниже, при малых деформациях и скоростях поступательного движения пузырьков различие радиальных составляющих их движения в ходе всего процесса расширения-сжатия в рамках системы (7)–(11) незначительно по сравнению со случаем одиночного пузырька.

Возможность применения системы (7)–(11) для высокоскоростной стадии сжатия обусловлена тем, что промежуток времени, в котором радиальное движение пузырька значительно зависит от растущего давления пара в его полости, относительно невелик, и, как будет показано, погрешность получаемой оценки несферичности пузырька в момент экстремального сжатия пара является приемлемой.

Для определения величины  $R_c$  используется одномерная модель Нигматулина [9] динамики кавитационного пузырька при его однократном сильном расширении-сжатии. Решение находится численно методом Годунова с использованием подвижной сетки, равномерной в паре и неравномерной в жидкости (размер ячеек в жидкости увеличивается по геометрической прогрессии от поверхности пузырька).

### 3. Работоспособность модели

Для иллюстрации работоспособности предлагаемой модели входные данные сильного расширения-сжатия линейчатого стримера кавитационных пузырьков принимаются близкими к соответствующим в экспериментах [2]. В частности, полагается, что статическое давление жидкости (дейтерированного ацетона  $C_3D_6O$ )  $p_0 = 1$  бар, её температура  $T_0 = 273$  К. Давление в пучности стоячей волны  $p_\infty$  изменяется с частотой  $\omega = 2\pi \cdot 19.3$  кГц и амплитудой  $p_a = 15$  бар. Фаза колебаний давления  $p_\infty$  в момент времени  $t = 0$  равна  $\varphi_0 = \pi/2$ , что в [2] соответствует включению нейтронного источника и зарождению кавитационных пузырьков. В этот момент давление жидкости  $p_\infty$  минимально и равно  $-14$  бар. Давление пара  $p_v$  в пузырьках при  $t = 0$  принимается однородным и равным давлению насыщения  $p_s(T_0)$ . Поверхностное натяжение  $\sigma = \sigma(T_0) = 0.0276$  Н/м, вязкость жидкости  $\mu = \mu(T_0) = 4.18 \cdot 10^{-4}$  Па·с, скорость звука в жидкости  $c_0 = 1131.7$  м/с, плотность жидкости  $\rho_0 = 894$  кг/м<sup>3</sup>. Кроме того, при  $t = 0$  полагается, что скорость поступательного движения пузырьков  $\dot{z}_i = 0$ , радиус пузырьков  $R_0 \leq 5$  мкм, скорость его изменения  $\dot{R}_0 = 0$ . Радиусы всех пузырьков и расстояния между соседними пузырьками в линейчатом стримере в начале расширения считаются одинаковыми, т. е.  $R_i(0) = R_0$ ,  $d_{ij}(0) = d_0 = 42R_{\max}$  ( $R_{\max} \approx 450$  мкм — максимальный радиус пузырьков), амплитуды отклонения их формы от сферической  $a_{ni} = 0$ , скорости изменения амплитуд возмущений сферичности  $\dot{a}_{ni} = 0$ .

На рис. 2 показано изменение радиусов трёх кавитационных пузырьков при их сильном расширении-сжатии. Расчёты выполнены по предлагаемой методике, в которой система (7)–(11) применяется совместно с моделью радиального движения Нигматулина [9]. При этом модель [9] используется лишь для определения радиуса  $R_c$ , при котором достигается экстремальное сжатие пара в случае одиночного пузырька. Для сравнения на рис. 2 приведены аналогичные зависимости для отдельного сферического пузырька, полученные с применением методики настоящей работы и модели Нигматулина [9].

В финальной высокоскоростной стадии сжатия в пузырьках возникают радиально-сходящиеся ударные волны [9], что описывается в рамках модели [5, 9, 11] и не учитывается в уравнениях (7)–(11), в которых пузырьки считаются гомобарическими с неиз-

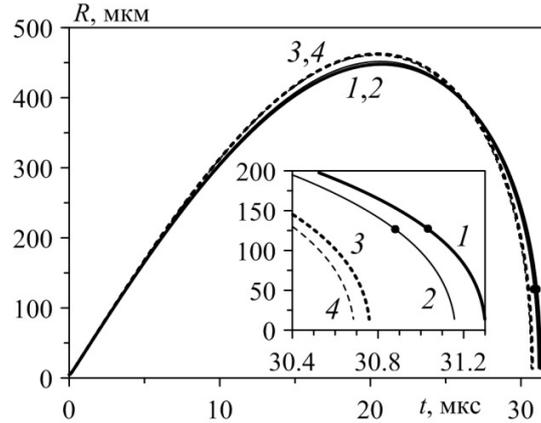


Рис. 2. Изменение радиусов трёх взаимодействующих пузырьков (кривые 1, 2) и одиночного пузырька (кривые 3, 4) при их расширении-сжатии: 1 — центральный из трёх пузырьков, 2 — боковые пузырьки, 3 — одиночный пузырёк по модели настоящей работы, 4 — то же, по модели [9]. Точками отмечен момент, когда  $\dot{R} = -200$  м/с, после которого влияние взаимодействия пузырьков несущественно

менным внутренним давлением  $p_v = p_s(T_0)$ . Это допущение методики настоящей работы является наиболее сильным. Однако (см. рис. 2) на изменение радиуса пузырька оно влияет незначительно, что обусловлено быстрым ростом сил инерции жидкости, в результате чего происходящие в пузырьке процессы заметно влияют на динамику жидкости лишь кратковременно в самом конце сжатия.

В результате взаимодействия пузырьки, как видно, расширяются меньше, чем одиночные, продолжительность их сжатия немного возрастает. Крайние пузырьки в стримере сжимаются чуть быстрее центральных, представляющих наибольший интерес. Если бы влияние взаимодействия пузырьков в конце сжатия было существенным, то моделирование окончания сжатия центрального пузырька было бы осложнено, поскольку требовало бы учёта влияния на него следующего за максимальным сжатием расширения крайних пузырьков. Однако в данной работе в этом нет необходимости, так как в финальной высокоскоростной стадии сжатия при скоростях  $\dot{R} \leq -200$  м/с влияние взаимодействия пузырьков на их динамику становится несущественным и сжатие пузырьков можно рассматривать независимо друг от друга до достижения радиусом величины  $R_c$ . Это обусловлено уменьшением отношения  $R_i/d_{ij}$  и проверено в расчётах путём неучёта в системе (7)–(11) слагаемых, ответственных за взаимодействие.

На рис. 3 приведена картина эволюции эллипсоидальной несферичности отдельного пузырька при его сжатии. Представлены кривые, полученные с использованием моделей настоящей работы и [5]. Помимо разного описания радиальной составляющей движения различие в описании деформаций пузырька в используемых моделях состоит в том, что в модели [5] учитывается влияние завихрённости жидкости, а в предлагаемой модели — не учитывается. На продолжительной начальной части стадии сжатия изменение несферичности пузырьков в обеих моделях практически одинаково. То же наблюдается и на всей не представленной на рис. 3 стадии расширения. В конце сжатия скорости  $\dot{R}$  (и ускорения  $\ddot{R}$ ) радиального движения в рассматриваемых случаях в силу применяемого в (7)–(11) допущения о постоянстве давления пара в пузырьках сильно различаются. В результате заметно различаются и изменения амплитуды несферичности.

Влияние принятых упрощающих допущений на оценку роста несферичности пузырька на фазе его сжатия к моменту экстремального сжатия пара в его полости показано на рис. 4. Здесь приведены зависимости роста амплитуды несферичности пузырька на фазе его сжатия от номера сферической гармоники (определяющей вид несферичности), полученные как в рамках системы (7)–(11), так и по более полной модели работы [5]. Представленные данные иллюстрируют основные погрешности оценок роста несферичности в рассматриваемых задачах расширения-сжатия нескольких пузырьков, поскольку эволюция несферичности пузырька на стадии расширения в рамках системы (7)–(11) описывается удовлетворительно. Из рис. 4 следует: при  $2 \leq n \leq 10$ , что соответствует наиболее реалистичным длинноволновым искажениям сферичности пузырька, влияние принятых допущений на огибающую относительно невелико, а с увеличением  $n$  — возрастает. При этом как в модели настоящей работы, так и в модели [5] по мере увеличения  $n$  рост амплитуды несферичности при сжатии из-за влияния вяз-

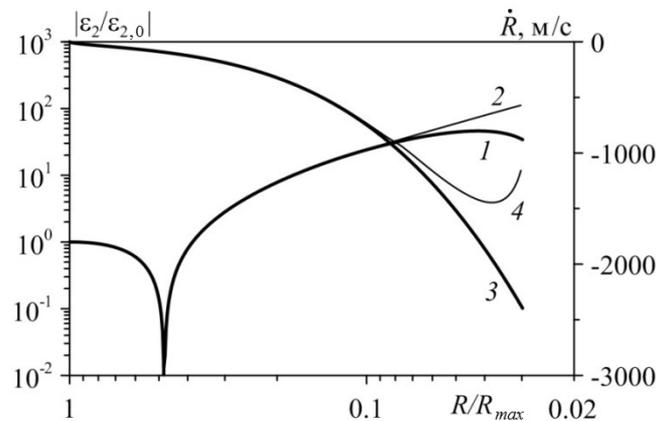


Рис. 3. Изменение амплитуды малой эллипсоидальной несферичности (кривые 1, 2) и радиальной скорости (кривые 3, 4) при сжатии одиночного кавитационного пузырька: 1, 3 — модель настоящей работы, 2, 4 — модель [5],  $R_{\max}$  — максимальный радиус пузырька,  $\varepsilon_{2,0}$  — значение  $\varepsilon_2$  в начале сжатия

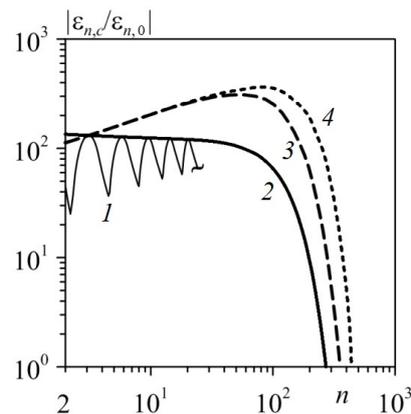


Рис. 4. Фрагмент зависимости относительной амплитуды малой несферичности пузырька в виде сферической гармоники степени  $n$  в момент экстремального сжатия пара в нем от степени  $n$  (кривая 1,  $\varepsilon_{n,0}$  — значение  $\varepsilon_n$  в начале сжатия), и её огибающая (кривая 2), полученные по методике настоящей работы. Кривые 3, 4 — аналогичные огибающие, но рассчитанные по модели [5] с учётом и без учёта завихренности жидкости соответственно

кости жидкости резко падает. Как будет видно из последующего, существенную роль в развитии деформаций пузырьков в рассматриваемых задачах играют лишь наиболее длинноволновые искажения сферичности (при  $n = 2-5$ ). Поэтому можно заключить, что влияние принятых в предлагаемой методике упрощающих допущений, в том числе пренебрежение завихрённостью жидкости, на рост несферичности пузырьков в виде гармоник с номером  $n = 2-5$  является вполне приемлемым.

Таким образом, приведённые на рис. 2–4 результаты свидетельствуют о адекватности представленной модели для изучения влияния взаимодействия пузырьков на их деформацию в ходе сильного совместного расширения и последующей наиболее продолжительной низкоскоростной начальной стадии сжатия пузырьков. Модель также можно применять для оценки величины длинноволновой несферичности пузырьков в конце их высокоскоростной стадии сжатия. Для анализа эволюции несферичности взаимодействующих пузырьков на высокоскоростной стадии сжатия нужны более точные модели.

#### 4. Временные затраты

Основными параметрами, влияющими на время расчёта однократного расширения-сжатия кавитационных пузырьков в линейчатом стримере по предложенной модели, являются количество пузырьков  $K$  и число гармоник  $N$ , используемых для описания их поверхностей. Влияние других параметров (коэффициента поверхностного натяжения, давления пара в пузырьках, амплитуды и частоты колебаний давления на бесконечности и др.) незначительно.

Зависимость абсолютного времени счёта  $t_{\text{cost}}$  однократного расширения-сжатия кавитационных пузырьков в линейчатом стримере от чисел  $K$  и  $N$  при  $K \leq 10$  и  $N \leq 10$  иллюстрирует рис. 5. Расчёты проводились на персональном компьютере в монопольном режиме. Указанные значения  $K$  и  $N$  рассматривались в силу того, что для анализа взаимодействия их обычно бывает достаточно. Как видно, с увеличением числа взаимодействующих пузырьков  $K$  от 2 до 10 (при  $N = 10$ ) время счёта возрастает от 2 до 16 с, а при увеличении числа гармоник  $N$  в представлении поверхностей пузырьков от 2 до 10 (при  $K = 10$ ) — от 1 до 16 с. Для сравнения отметим, что определение  $R_c$  по полной модели занимает порядка полутора часов.

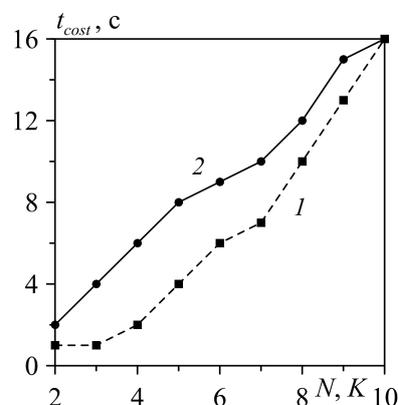


Рис. 5. Зависимости времени счёта  $t_{\text{cost}}$  от количества взаимодействующих пузырьков  $K$  (кривая 1,  $N = 10$ ) и числа гармоник  $N$  в описании их поверхностей (кривая 2,  $K = 10$ )

## 5. Эволюция несферичности пузырьков при их сильном расширении-сжатии в линейчатом стримере

Влияние взаимодействия пузырьков на развитие их деформаций при сильном совместном расширении-сжатии в линейчатом стримере иллюстрирует рис. 6, где представлены результаты, полученные при тех же значениях входных параметров, что и в случае трёх пузырьков, но для числа пузырьков, равного семи.

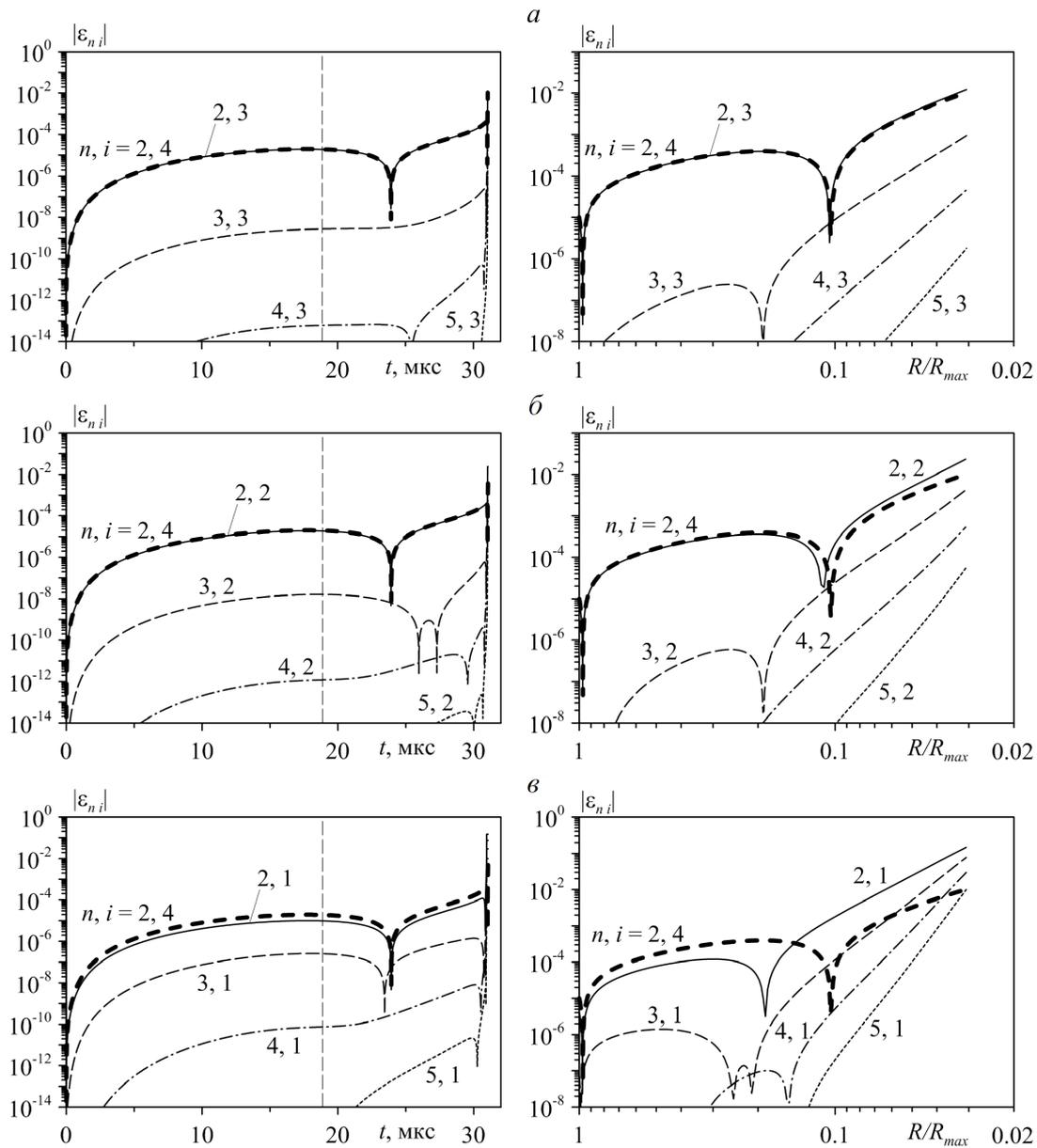


Рис. 6. Эволюция амплитуды основных гармоник, определяющих спектр несферичности семи взаимодействующих пузырьков при их расширении-сжатии (слева) и, более подробно, на стадии сжатия (справа). Жирные линии соответствуют центральному пузырьку ( $i = 4$ ), тонкие — другим пузырькам: *а* — первым от центрального ( $i = 3$ ), *б* — вторым от центрального ( $i = 2$ ), *в* — третьим, боковым ( $i = 1$ ). Вертикальной линией на левых рисунках указана граница между расширением и сжатием пузырьков

Пузырьки в начале расширения принимаются сферическими с размерами порядка размеров кавитационных зародышей  $\approx 40$  нм (результаты для начального радиуса пузырька из интервала  $40 \text{ нм} < R_0 < 5 \text{ мкм}$  от полученных практически не отличаются). При отсутствии взаимодействия между пузырьками они оставались бы сферическими вплоть до конца сжатия. Однако вследствие взаимодействия пузырьки, как видно, деформируются. При этом в отличие от одиночного пузырька, у которого деформации на стадии расширения уменьшаются, а на стадии сжатия возрастают [5], в рассматриваемом случае в результате взаимодействия они увеличиваются не только при сжатии, но и при расширении. Спектр несферичности центрального пузырька в линейчатом стримере, состоящем из нечётного числа пузырьков, содержит, как следует из анализа уравнений (7)–(11) и подтверждается расчётами, лишь одну эллипсоидальную гармонику. Основными составляющими спектра несферичности других пузырьков можно считать гармоники с  $n = 2 - 5$ . Вклад гармоник с  $n > 2$  при расширении и на низкоскоростной начальной стадии сжатия незначителен. В ходе высокоскоростного сжатия их амплитуды резко возрастают, причём с увеличением номера  $n$  и удалением от центра линейчатого стримера скорость роста амплитуд повышается. Следует отметить, что стремительный рост несферичности боковых пузырьков в ходе высокоскоростного сжатия обусловлен не взаимодействием пузырьков, а резким ускорением их поступательного движения в процессе быстрого сжатия. Естественно, что поступательное движение боковых пузырьков на низкоскоростной стадии их динамики является результатом их взаимодействия с другими пузырьками. Центральный пузырек, в отличие от боковых, в ходе взаимодействия остается неподвижным. В силу этого искажение сферичности центрального пузырька в конце сжатия оказывается меньше такового боковых пузырьков, хотя при расширении и в начале сжатия центральный пузырек является более несферическим.

## 6. О применимости модели в условиях, отличных от условий экспериментов с дейтерированным ацетоном

Работоспособность предлагаемых модели и методики расчёта однократного сильного расширения-сжатия пузырьков, организованных в линейчатый стример, оценивалась при условиях, близких к условиям экспериментов с кавитацией в дейтерированном ацетоне [2]. Однако это не означает, что данная модель и методика могут применяться только в этих случаях. Для приближённой оценки области их применимости можно исходить из того, что расширение-сжатие пузырьков должно быть достаточно большим, деформации пузырьков относительно малыми, а в конце сильного сжатия пузырьков рост их деформаций не должен сильно зависеть от неустойчивости Релея — Тейлора.

Для иллюстрации необходимой последовательности шагов, которые нужно выполнить для проверки работоспособности предлагаемых модели и методики в тех или иных конкретных условиях, проведём оценку их применимости в условиях, максимально отличных от рассмотренных выше.

В качестве среды выберем бензол, в котором впервые удалось экспериментально провести синтез наноалмазов посредством его кавитационной диссоциации [16]. Отметим, что многие физические характеристики (скорость звука, плотность и др.) бензола и ацетона заметно различаются. Температуру бензола примем равной 293 К, т. е. также отличной от температуры ацетона (273 К). Другими (по сравнению со случаем пузырьков в ацетоне) примем и параметры акустического воздействия на жидкость (амплитуда

колебаний давления  $p_a = 10$  бар, частота  $\omega = 2\pi \cdot 25$  кГц), а также количество пузырьков в стримере (пять) и начальное расстояние между соседними пузырьками  $d_0 = 22R_{\max}$  (здесь максимальный радиус пузырька  $R_{\max} \approx 280$  мкм).

Чтобы сделать заключение о возможности применения предлагаемых модели и методики, необходимо убедиться в следующем.

Во-первых, временная зависимость радиуса одиночного пузырька и временные зависимости радиусов пузырьков в стримере, соответствующие уравнениям (7)–(11), должны быть близкими. В этом случае к ним, как следует из раздела 2, также будет близка и временная зависимость радиуса одиночного пузырька, соответствующая уравнениям работы [17] (они отличаются от уравнений работы [9], взятыми из [18], широкодиапазонными уравнениями состояния). Как видно на рис. 7, для пузырьков в бензоле данное требование выполняется. На основе этого полагается, что сжатие всех пузырьков в стримере завершается при радиусе  $R_c = 10.5$  мкм, что соответствует завершению сжатия одиночного пузырька, рассчитанного по уравнениям из [17].

Во-вторых, влияние взаимодействия пузырьков в высокоскоростном конце их сжатия должно быть несущественным. Это требование важно, поскольку при его выполнении нет необходимости рассматривать динамику пузырьков после достижения ими радиуса  $R_c$ , что иначе пришлось бы делать, поскольку они достигают радиус  $R_c$  не одновременно. Кроме того, при выполнении данного требования даже нарушение периферийными пузырьками используемого в (7)–(11) допущения о малости скорости перемещения пузырьков, что возможно в финале их сжатия, не окажет влияния на динамику центральных пузырьков. Как видно из рис. 7, а, б, это требование выполняется после достижения скоростью сжатия значения  $-200$  м/с.

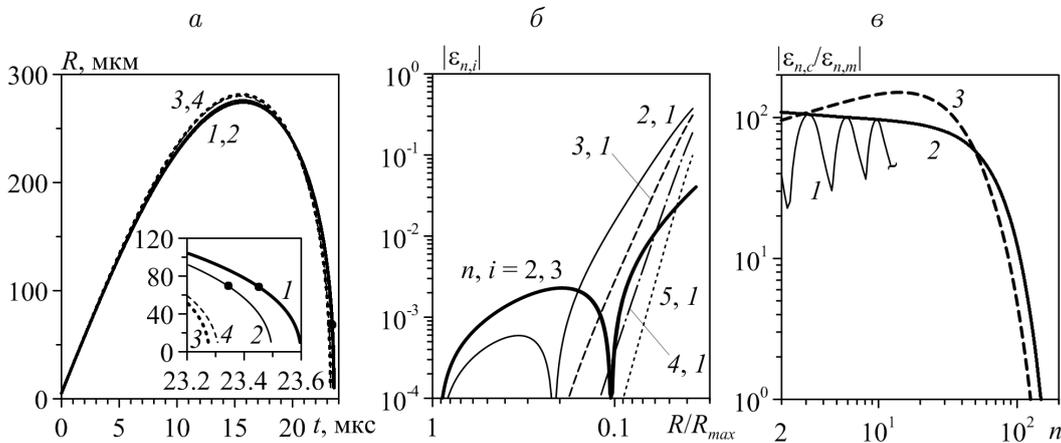


Рис. 7. а — изменение радиусов боковых (кривые 2) и центрального (кривые 1) пузырьков в стримере из пяти пузырьков и одиночного пузырька (кривые 3 — модель настоящей работы, кривые 4 — модель работы [17]), точки — момент при  $\dot{R} = -200$  м/с; б — эволюция амплитуды основных гармоник ( $n = 2-5$ ), определяющих спектр несферичности пяти взаимодействующих пузырьков на стадии их сжатия, полученная как с учётом, так и с пренебрежением взаимодействия пузырьков при  $\dot{R} < -200$  м/с (кривые графически совпадают), жирная линия соответствует центральному пузырьку ( $i = 3$ ), тонкие — боковым ( $i = 1$ ); в — фрагмент зависимости роста искажения сферичности одиночного пузырька на фазе его сжатия от номера  $n$  (кривая 1) и её огибающая (кривая 2), полученные по методике настоящей работы, кривая 3 — аналогичная огибающая, рассчитанная по модели [17]

В-третьих, деформации пузырьков (т.е. отклонения их формы от сферической) должны быть относительно небольшими. Из рис. 7, б следует, что данное требование в основном выполняется. Небольшое нарушение кратковременно наблюдается у боковых пузырьков. Однако именно в силу кратковременности и отсутствия взаимодействия пузырьков в конце сжатия влияние этого фактора на деформацию центральных пузырьков несущественно.

В-четвёртых, величины роста несферичности одиночного пузырька при сжатии, рассчитанные по уравнениям из [17] и полученные с использованием системы (7)–(11), должны быть близкими. Из рис. 7, в видно, что для наиболее реалистичных длинноволновых гармоник ( $n = 2 - 5$ ) эти величины согласуются удовлетворительно.

При достаточно сильном расширении-сжатии пузырьков первые два требования обычно выполняются вне зависимости от физических характеристик среды. Выполнение же третьего и четвёртого условий зависит от этих физических характеристик. Третье условие может выполняться для одной среды и нарушаться для другой при одних и тех же параметрах внешнего возбуждения (амплитуды и частоты), например, из-за различия в величине  $R_c$ . Четвёртое требование может нарушаться в силу того, что в некоторых жидкостях на рост несферичности пузырька в конце сжатия может оказать существенное влияние неустойчивость Релея — Тейлора. В этом случае расхождение аналогичных представленным на рис. 7, в кривых величины роста несферичности пузырька, рассчитанной по уравнениям из [17] и по (7)–(11), может быть значительным.

Таким образом, предлагаемая модель и методика можно использовать для изучения деформаций пузырьков в процессе их однократного совместного сильного расширения-сжатия в бензоле в указанных в работе условиях, поскольку все основные требования их применимости выполнены.

## Заключение

Предложена математическая модель динамики расположенных в жидкости в линию (в виде линейчатого стримера) кавитационных пузырьков при их однократном сильном совместном расширении-сжатии в пучности давления интенсивной стоячей акустической волны. Данная модель представляет собой сочетание обобщения модели взаимодействия двух слабонесферических пузырьков работы [12] на случай многих пузырьков, расположенных в линию, и модели Нигматулина динамики отдельного сферического кавитационного пузырька работы [9]. При этом модель Нигматулина применяется лишь для определения радиуса, при котором завершается сжатие пузырьков в линейчатом стримере. Предложенная модель имеет четвёртый порядок точности относительно безразмерного параметра, представляющего собой отношение характерного радиуса пузырьков к характерному расстоянию между ними, в силу чего пузырьки в рассматриваемых задачах должны быть расположены не очень близко друг к другу.

Проведено численное исследование работоспособности рассматриваемой модели в условиях известных экспериментов по акустическому сверхсжатию кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне, где линейчатые стримеры возникают довольно часто. Показано, что она удовлетворительно описывает влияние гидродинамического взаимодействия пузырьков на деформацию последних в ходе их расширения и последующей наиболее продолжительной начальной низкоскоростной стадии сжатия и позволяет получать удовлетворительные оценки величины длинноволновой несферичности пузырьков в конце высокоскоростной стадии сжатия.

Проиллюстрирована зависимость компьютерного времени, необходимого на решение рассматриваемых задач, от количества взаимодействующих пузырьков и от числа гармоник, используемых в описании их поверхностей.

Рассмотрена эволюция малых деформаций семи расположенных в линию равноотстоящих друг от друга кавитационных пузырьков при их сильном совместном расширении-сжатии. Пузырьки в начале расширения сферические с размерами порядка размеров кавитационных зародышей. Показано, что в результате взаимодействия они деформируются. При этом в отличие от одиночного пузырька деформации взаимодействующих пузырьков возрастают не только при сжатии, но и при расширении.

Приведена иллюстрация выполнения шагов, необходимых для проверки возможности применения предложенной модели в тех или иных конкретных условиях на примере условий, близких к тем, при которых был экспериментально проведен синтез наномазов посредством кавитационной диссоциации бензола [16].

## Список литературы

- [1] FLANNIGAN D.J., SUSLICK K.S. Inertially confined plasma in an imploding bubble // *Nature Phys.* 2010. Vol. 6. P. 598–601.
- [2] TALEYARKHAN R.P., WEST C.D., CHO J.S. ET AL. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science.* 2002. Vol. 295, No. 5561. P. 1868–1873.
- [3] TALEYARKHAN R.P., WEST C.D., LAHEY R.T.(JR.) ET AL. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. 034301.
- [4] HILGENFELDT S., GROSSMANN S., LOHSE D. Sonoluminescence light emission // *Phys. Fluids.* 1999. Vol. 11, No. 6. P. 1318–1330.
- [5] АГАНИН А.А., ИЛЬГАМОВ М.А., НИГМАТУЛИН Р.И., ТОПОРКОВ Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. № 1. С. 57–69.
- [6] SUSLICK K.S. Sonochemistry // *Science.* 1990. Vol. 247. P. 1439–1445.
- [7] XU Y., BUTT A. Confirmatory experiments for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Nuclear Engng and Design.* 2005. Vol. 235. P. 1317–1324.
- [8] BASS A., RUUTH S.J., CAMARA C. ET AL. Molecular dynamics of extreme mass segregation in a rapidly collapsing bubble // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101. 234301.
- [9] NIGMATULIN R.I, АКНАТОВ I.SH., ТОПОЛНИКОВ A.S. ET AL. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids.* 2005. Vol. 17, No. 10. 107106.
- [10] ГОДУНОВ С.К., ЗАБРОДИН А.В., ИВАНОВ М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [11] АГАНИН А.А., ХАЛИТОВА Т.Ф., ХИСМАТУЛЛИНА Н.А. Расчёт сильного сжатия сферического парогазового пузырька в жидкости // *Вычисл. технологии.* 2008. Т. 13, № 6. С. 54–64.
- [12] АГАНИН А.А., ДАВЛЕТШИН А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учётом их малой несферичности // *Математическое моделирование.* 2009. Т. 21, № 6. С. 89–102.

- [13] GAVRILYUK S.L., TESHUKOV V.M. Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds number // Eur. J. of Mech. B/Fluids. 2005. Vol. 24, No. 4. P. 468–477.
- [14] DOINIKOV A.A. Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17, No. 12. 128101.
- [15] ХАЙРЕР Э., НЕРСЕТТ С., ВИННЕР Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [16] ГАЛИМОВ Э.М., КУДИН А.М., СКОРОВОГАТСКИЙ В.Н. и др. Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 2. С. 187–191.
- [17] АГАНИН А.А., ТОПОРКОВ Д.Ю. Эволюция малых деформаций парового пузырька при его сильном сжатии в бензоле // Вестник Казанского технологического ун-та. 2013. № 15. С. 28–33.
- [18] БОЛОТНОВА Р.Х. Широкодиапазонные уравнения состояния органических жидкостей // Труды Ин-та механики Уфимского научного центра РАН. 2007. Вып. 5. С. 113–120.

*Поступила в редакцию 21 февраля 2013 г.,  
с доработки — 8 ноября 2013 г.*