

Математическое моделирование качки понтона в зумпфе угольного разреза

С. В. ЧЕРДАНЦЕВ¹, Н. В. ЧЕРДАНЦЕВ²

¹Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачёва,
Кемерово, Россия

²Институт угля СО РАН, Кемерово, Россия
e-mail: svch01@yandex.ru, nvch2014@yandex.ru

Получены аналитические формулы для вычисления присоединённых масс жидкости понтона, совершающего вертикальную, боковую и килевую качку. Вычислены моменты инерции плавучей водоотливной установки. Построены графики зависимостей собственной частоты вертикальной, боковой и килевой качки понтона от его основных параметров и выявлены закономерности этих зависимостей.

Ключевые слова: понтон, поперечная и продольная метацентрические высота, присоединённые массы жидкости, моменты инерции, качка, собственные частоты.

Для предотвращения затопления забоев угольных разрезов грунтовыми и подземными водами предусматриваются углубления, называемые зумпфами, которые сооружают в почве забоев в окрестности работающих экскаваторов. По мере заполнения зумпфов водой последнюю откачивают, для чего используются плавучие водоотливные установки (ПВУ), помещаемые непосредственно в зумпфы и представляющие собой плавучие средства в виде понтонов с установленным на них водоотливным оборудованием.

Понтоны состоят из металлических труб-поплавков, расположенных параллельно друг другу и герметически заваренных с торцов заглушками (рис. 1). Как правило, используется нечётное количество поплавков (три-пять, реже семь). На поплавки настилают палубу, на которой закрепляют насосное оборудование с электроприводом, а для безопасного перемещения по понтону устанавливают боковые ограждения и поручни. Понтоны изготавливают в мастерских угольных разрезов по проектам технических отделов. В основе проектов — расчёт только плавучести понтонов. К настоящему времени накоплен определённый опыт по проектированию понтонов на угольных разрезах Кузбасса, но ни его обобщения, ни рекомендаций по проектированию данного вида оборудования пока нет.

Очевидно, что безопасную эксплуатацию понтонов на разрезах можно обеспечить, правильно рассчитав их плавучесть, статическую остойчивость и режимы движения. Проблема использования понтонов на угольных разрезах рассматривалась в ряде работ. Так, в [1] плавучесть и остойчивость понтонов обсуждались на основе теорем Дюпена, в [2] — на базе основных теорем статики корабля [3].

В настоящей работе рассматривается задача о движении понтона в зумпфе угольного разреза. Её особенность заключается в том, что действующие на понтон силы заранее неизвестны и проявляются лишь при взаимодействии понтона с движущейся жидкостью.

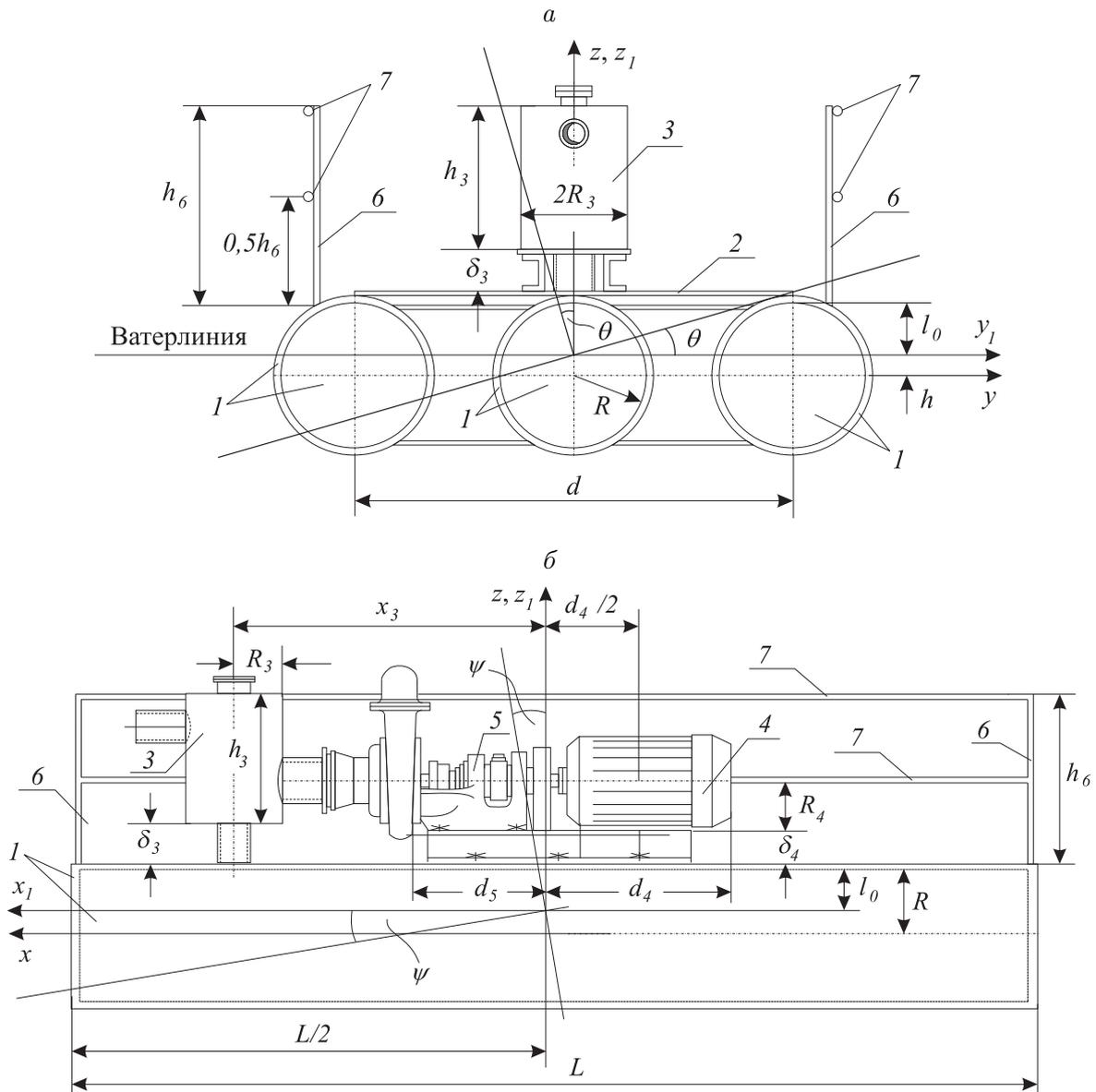


Рис. 1. Плавающая водоотливная установка: *a* – вид с торца, *б* – вид сбоку: 1 – металлические трубы-поплавки, 2 – палубный настил, 3 – бак-запасник воды, 4 – электродвигатель, 5 – насос, 6 – стойки ограждения, 7 – поручни

Вначале под действием какого-либо возмущения нарушается равновесие понтона, что в свою очередь нарушает равновесие жидкости в окрестности понтона и приводит её в движение, представляющее собой волны малой амплитуды на поверхности жидкости [4], поэтому перемещения и углы поворота понтона также будут малыми. В работе [5] показано, что в силу данной конструкции понтона и условий его эксплуатации движение понтона описывается не шестью, а тремя дифференциальными уравнениями, представляющими собой соответственно вертикальную, боковую и килевую качку:

$$(M + M_{33})\ddot{\lambda} + \rho g S_0 \lambda = 0, \tag{1}$$

$$(J_{x_1} + M_{44})\ddot{\theta} + P h_0 \theta = 0, \tag{2}$$

$$(J_{y_1} + M_{55})\ddot{\psi} + P H_0 \psi = 0, \tag{3}$$

где M — масса плавучей водоотливной установки; J_{x_1}, J_{y_1} — её моменты инерции относительно осей Ox_1 и Oy_1 , расположенных в плоскости ватерлинии; M_{33}, M_{44}, M_{55} — присоединённые массы жидкости, характеризующие увеличение соответственно массы и моментов инерции ПВУ в процессе её качки; ρ — плотность жидкости в зумпфе; P — вес ПВУ, равный архимедовой силе; λ — вертикальное перемещение понтона в неподвижной системе координат, углы поворота понтона относительно осей Ox_1 и Oy_1 будем называть в терминах теории корабля [3, 6] соответственно углом крена θ (рис. 1, а) и углом дифферента ψ (рис. 1, б); точками обозначены производные по времени.

Площадь ватерлинии S_0 понтона выражается формулой

$$S_0 = j b L, \quad (4)$$

где j — число труб-поплавков, L — их длина, величина b (рис. 2) определяется по формуле [2]

$$b = 2R\sqrt{\zeta(2-\zeta)}, \quad (5)$$

где $\zeta = l_0/R$ — относительная максимальная высота надводной части труб-поплавков (см. рис. 2), зависящая от коэффициента запаса плавучести k_p , R — радиус трубы-поплавка.

Поперечная h_0 и продольная H_0 метацентрическая высота понтона и его метацентрические радиусы r_θ, r_ψ находятся по формулам [2]

$$h_0 = r_\theta - |z_C| - z_G, \quad H_0 = r_\psi - |z_C| - z_G, \quad (6)$$

$$r_\theta = R \frac{2 \left[\sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right]^3 \left\{ 1 + \frac{3\bar{d}^2}{2j\zeta(2-\zeta)} \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[\left(1 - 2\frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right] \right\}}{3 \left\{ \pi - \left[\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right] \right\}}, \quad (7)$$

$$r_\psi = R \frac{\sqrt{\zeta(2-\zeta)}}{6 \left\{ \pi - \left[\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right] \right\}} \bar{L}^2, \quad (8)$$

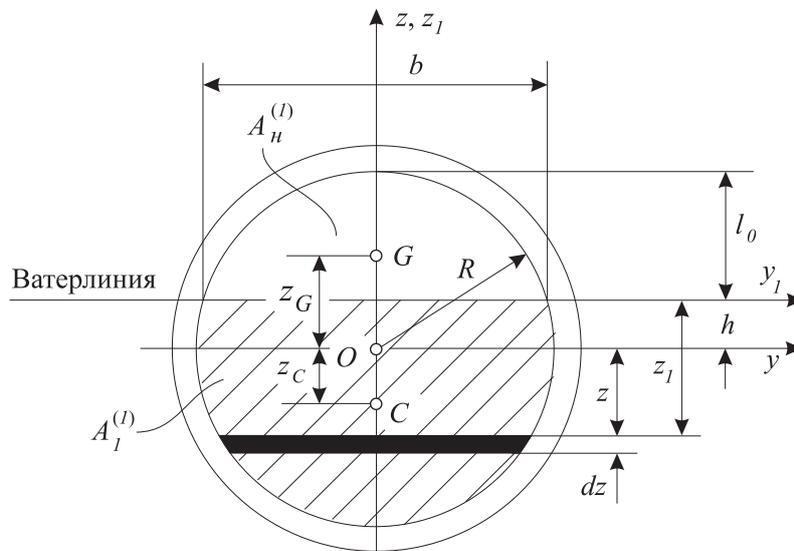


Рис. 2. К вычислению присоединённых масс жидкости

где $\bar{d} = d/R$ — относительное расстояние между центрами тяжести крайних поплавков, $\bar{L} = L/R$ — относительная длина труб-поплавков.

Координаты центра масс ПВУ z_G и центра величины z_C вычисляются следующим образом [2]:

$$z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad z_C = -\frac{2}{3} R \frac{[\zeta(2-\zeta)]^{3/2}}{\pi - [\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)}]}, \quad (9)$$

где z_i — координаты масс m_i , составляющих ПВУ. Величина ζ находится из решения трансцендентного уравнения [2]

$$\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)} = \frac{\pi k_p}{k_p + 1}, \quad (10)$$

в котором вначале следует задать значение коэффициента запаса плавучести k_p , а затем вычислить ζ . Например, если $k_p = 0.3$, то $\zeta = 0.5627$, если $k_p = 0.5$, то $\zeta = 0.7351$ и т.д.

Разделив уравнения (1)–(3) на коэффициенты при вторых производных и приняв $\lambda = Z_1$, $\theta = Z_2$, $\psi = Z_3$, имеем

$$\ddot{Z}_i + \omega_i^2 Z_i = 0, \quad (11)$$

где индекс i относится различным видам движения понтона: $i = 1$ — вертикальному перемещению, $i = 2$ — крену, $i = 3$ — дифференту, а величина ω_i в соответствии с параметрами, входящими в уравнения (1)–(3), представляется в виде

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho g S_0}{M + M_{33}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{Mgh}{J_{x_1} + M_{44}}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{MgH}{J_{y_1} + M_{55}}}. \quad (12)$$

Добавляя к уравнению (11) начальные условия

$$Z_i|_{t=0} = Z_{0i}, \quad \dot{Z}_i|_{t=0} = \dot{Z}_{0i}, \quad (13)$$

получим задачу Коши [7], решение которой

$$Z_i = C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (14)$$

где C_i — амплитуда соответствующего вида качки, φ_i — её начальная фаза, определяемые следующим образом [7]:

$$C_i = \sqrt{Z_{0i}^2 + \left(\frac{\dot{Z}_{0i}}{\omega_i}\right)^2}, \quad \varphi_i = \arctg\left(\frac{Z_{0i}\omega_i}{\dot{Z}_{0i}}\right). \quad (15)$$

Сформулированная задача Коши для описания качки понтона является достаточно простой. Однако вычислить собственные частоты качки понтона, амплитуды C_i и начальные фазы φ_i не представляется возможным, поскольку формулы (12), (15) содержат неизвестные моменты инерции ПВУ и присоединённые массы жидкости M_{33} , M_{44} , M_{55} , которые для рассматриваемого типа понтонов пока не определялись, поэтому процедуру их вычисления рассмотрим подробно.

Известно, что величины M_{33} , M_{44} , M_{55} выражаются формулами [6]

$$M_{33} = \rho \int_{S_1} \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS, \quad M_{44} = \rho \int_{S_1} \Phi_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} dS, \quad M_{55} = \rho \int_{S_1} \Phi_5 \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} dS, \quad (16)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S_1 понтона, находящейся под водой; Φ_3 , Φ_4 , Φ_5 — функции, представляющие собой потенциалы скоростей возмущённого движения жидкости, вызванного равномерным вертикальным перемещением понтона и его вращением соответственно вокруг осей Ox_1 и Oy_1 с единичными скоростями, причём

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial n} = \cos(n, z), \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} = y \cos(n, z) - z \cos(n, y), \quad \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = -x \cos(n, z), \quad (17)$$

в силу чего формулы (16) приводятся к виду

$$\begin{aligned} M_{33} &= \rho \int_{S_1} \Phi_3 \cos(n, z) dS, & M_{44} &= \rho \int_{S_1} \Phi_4 y \cos(n, z) dS - \rho \int_{S_1} \Phi_4 z \cos(n, y) dS, \\ M_{55} &= -\rho \int_{S_1} \Phi_5 x \cos(n, z) dS. \end{aligned} \quad (18)$$

Преобразуя интегралы в (18) по формуле Остроградского — Гаусса [8]

$$\begin{aligned} M_{33} &= \rho \int_{S_1} \Phi_3 \cos(n, z) dS = \rho \int_{V_1} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} dV = \rho \int_{V_1} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z} dV, \\ M_{44} &= \rho \int_{V_1} \frac{\partial(\Phi_4 y)}{\partial z} dV - \rho \int_{V_1} \frac{\partial(\Phi_4 z)}{\partial y} dV = \rho \int_{V_1} y \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z} dV - \rho \int_{V_1} z \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} dV, \\ M_{55} &= -\rho \int_{V_1} \frac{\partial(\Phi_5 x)}{\partial z} dV = -\rho \int_{V_1} x \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z} dV \end{aligned}$$

и используя ещё раз (17), получим

$$M_{33} = \rho \int_{V_1} \cos(n, z) \frac{1}{\cos(n, z)} dV = \rho V_1, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_{44} &= \rho \int_{V_1} y [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] \frac{1}{\cos(n, z)} dV - \\ &\quad - \rho \int_{V_1} z [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] \frac{1}{\cos(n, y)} dV = \\ &= \rho \int_{V_1} y^2 dV - \rho \int_{V_1} yz \frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} dV - \rho \int_{V_1} zy \frac{\cos(n, z)}{\cos(n, y)} dV + \rho \int_{V_1} z^2 dV, \end{aligned} \quad (20)$$

$$M_{55} = -\rho \int_{V_1} x [-x \cos(n, z)] \frac{1}{\cos(n, z)} dV = \rho \int_{V_1} x^2 dV. \quad (21)$$

Ввиду симметрии понтона относительно плоскости xOz , второй и третий интегралы в формуле (20) равны нулю [9], и поэтому присоединённая масса жидкости M_{44} вычисляется с помощью только двух интегралов

$$M_{44} = \rho \int_{V_1} y^2 dV + \rho \int_{V_1} z^2 dV. \quad (22)$$

Из формул (19), (21) и (22) видно, что присоединённая масса жидкости M_{33} представляет собой массу жидкости в объёме V_1 , а присоединённые массы M_{44} , M_{55} являются моментами инерции этой массы относительно осей Ox_1 и Oy_1 .

Поскольку длина понтона превышает его ширину, а трубы в силу параллельности друг другу не образуют вдоль своей длины клиновидности, обводов и закруглений, то будем полагать, что обтекание труб жидкостью в процессе качки является плоским [6, 10]. Поэтому, так как интегралы по области V_1 можно свести к определённым интегралам, вычисление M_{44} и M_{55} существенно упрощается.

Процедуру начнем с интеграла (21), в котором dV представим в виде

$$dV = jA_1^{(1)} dx,$$

где $A_1^{(1)}$ — часть площади поперечного сечения одной трубы, находящаяся под водой (см. рис. 2), определяемая по формуле [2]

$$A_1^{(1)} = R^2 \left[\pi - \arccos(1 - \zeta) + (1 - \zeta) \sqrt{\zeta(2 - \zeta)} \right]. \quad (23)$$

Следовательно, формула (21) упрощается к виду

$$M_{55} = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 j A_1^{(1)} dx,$$

и, выполнив в ней преобразования, получим формулу

$$M_{55} = \overline{M}_{55} \rho L R^4, \quad (24)$$

в которой присоединённая масса в безразмерной форме \overline{M}_{55} определяется следующим образом:

$$\overline{M}_{55} = \frac{1}{12} j \overline{A}_1^{(1)} \overline{L}^2. \quad (25)$$

Процедуру вычисления присоединённой массы M_{44} выполним поэтапно. Вначале по формуле (22) найдём присоединённую массу $M_{44}^{(c)}$ только одного поплавка (например, центрального), которую назовем собственной присоединённой массой

$$M_{44}^{(c)} = \rho \int_{V_1^{(c)}} y^2 dV + \rho \int_{V_1^{(c)}} z^2 dV, \quad (26)$$

где бесконечно малый элемент dV области $V_1^{(c)}$ $dV = dy dz L$. Тогда первый интеграл в (26) приведём к виду

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{V_1^{(c)}} y^2 dV = L \int_{A_1^{(1)}} y^2 dy dz = L \int_{-R}^h dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} y^2 dy = \frac{2}{3} L \int_{-R}^h \left(\sqrt{R^2-z^2} \right)^3 dz = \\ &= \frac{2}{3} L \int_{-(R+h)}^0 \left[\sqrt{R^2-(z+h)^2} \right]^3 dz, \end{aligned} \quad (27)$$

а второй найдём по аналогии

$$I_2 = 2L \int_{-(R+h)}^0 \sqrt{R^2-(z+h)^2} z^2 dz. \quad (28)$$

С помощью подстановки

$$z+h = R \sin u, \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \arcsin(1-\zeta) \right]$$

вычислим интегралы (27) и (28) в замкнутом виде и, подставив их в (26), определим собственную присоединённую массу жидкости

$$\begin{aligned} M_{44}^{(c)} &= \rho L R^4 \left\{ [1 + 2(1-\zeta)^2] [2 \arcsin(1-\zeta) + \pi] + \right. \\ &+ \frac{1}{3} [1 + 3(1-\zeta)^2] (1-\zeta) \sqrt{1-(\zeta-1)^2} - \frac{1}{6} (1-\zeta) \sqrt{1-(\zeta-1)^2} [1 - 2(\zeta-1)^2] + \\ &\left. + \frac{4}{3} (1-\zeta) \sqrt{1-(\zeta-1)^2} [1 - (\zeta-1)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

На втором этапе, суммируя собственные присоединённые массы всех труб-поплавков понтона, с учётом теоремы о моментах инерции при параллельном переносе осей [9] определим присоединённую массу M_{44} всей подводной части понтона по формуле

$$M_{44} = \bar{M}_{44} \rho L R^4, \quad (30)$$

в которой \bar{M}_{44} является безразмерной присоединённой массой

$$\bar{M}_{44} = j \bar{M}_{44}^{(c)} + \frac{1}{2} \bar{A}_1^{(1)} \bar{d}^2 \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[\left(1 - 2 \frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right], \quad (31)$$

где $\bar{M}_{44}^{(c)} = M_{44}^{(c)} / \rho L R^4$, $\bar{A}_1^{(1)} = A_1^{(1)} / R^2$.

При вычислении моментов инерции массы ПВУ относительно осей Ox_1 и Oy_1 будем учитывать её составляющие элементы, показанные на рис. 1 и приведённые в таблице. В ходе вычисления использованы формулы моментов инерции простейших тел (цилиндрическая тонкостенная труба, круговой цилиндр, тонкий стержень) и уже упомянутая теорема о моментах инерции при параллельном переносе осей. Например, центральный

Элементы, составляющие ПВУ (размеры в метрах)

№ п/п	Название элемента	Количество составляющих элементов	Масса, кг	
			1 шт.	общая
1	Труба-поплавок $R = 0.35, L = 5.1, \delta_{\text{тр}} = 0.008$	3	683.75	2051
	Заглушка трубы $R = 0.34$	6	23	138
2	Палубный настил $d = 1.8$	1	179	179
3	Бак-запасник воды $R_3 = 0.26, h_3 = 0.76, \delta_3 = 0.25$	1	158	158
4	Электродвигатель $R_4 = 0.3, \delta_4 = 0.17$	1	890	890
5	Насос $R_5 = 0.2$	1	485	485
6	Стойки ограждения $h_6 = 1.0$	10	7.6	76
7	Поручни $h_7 = 5.0$	4	12.25	49

поплавок представляет собой тонкостенную трубу, а заглушка является круглой пластинкой. Поэтому

$$\begin{aligned}
 I_{x_1}^{(1)} &= I_{\text{тр}} + m_{\text{тр}} h^2 + 2(I_{\text{заг}} + m_{\text{заг}} h^2) = m_{\text{тр}} R^2 + m_{\text{тр}} h^2 + 2 \left(\frac{m_{\text{заг}} R^2}{2} + m_{\text{заг}} h^2 \right) = \\
 &= m_{\text{тр}} R^2 \left(1 + \frac{h^2}{R^2} \right) + m_{\text{заг}} R^2 \left(1 + 2 \frac{h^2}{R^2} \right), \quad (32)
 \end{aligned}$$

где $m_{\text{тр}}$ — масса трубы поплавка, $m_{\text{заг}}$ — масса заглушки.

Учитывая, что $h/R = 1 - \zeta$, перепишем формулу (32) в виде

$$\bar{I}_{x_1}^{(1)} = 1 + (1 - \zeta)^2 + \frac{m_{\text{заг}}}{m_{\text{тр}}} [1 + 2(1 - \zeta)^2], \quad (33)$$

где $\bar{I}_{x_1}^{(1)} = I_{x_1}^{(1)}/m_{\text{тр}} R^2$.

Момент инерции всех труб-поплавков и заглушек найдем по формуле

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_{x_1}^{(1)} &= j \left\{ 1 + (1 - \zeta)^2 + \frac{m_{\text{заг}}}{m_{\text{тр}}} [1 + 2(1 - \zeta)^2] \right\} + \\
 &+ \frac{\bar{d}^2}{2} \left(1 + 2 \frac{m_{\text{заг}}}{m_{\text{тр}}} \right) \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[\left(1 - 2 \frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right]. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Опуская процедуру получения формул для вычисления моментов инерции других элементов ПВУ, приведём окончательный вид этих формул:

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_{x_1}^{(2)} &= \frac{1}{12} \frac{m_2}{m_{\text{тр}}} \left(\bar{d}^2 + 12\zeta^2 \right), \\
 \bar{J}_{x_1}^{(3)} &= \frac{m_3}{m_{\text{тр}}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_3}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{2\delta_3 + h_3}{2R} \right)^2 \right\}, \\
 \bar{J}_{x_1}^{(4)} &= \frac{m_4}{m_{\text{тр}}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_4}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{\delta_4 + R_4}{R} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{x_1}^{(5)} &= \frac{m_5}{m_{\text{тр}}} \left[\left(\frac{R_5}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{\delta_4 + R_5}{R} \right)^2 \right], \\
\bar{J}_{x_1}^{(6)} &= n_6 \frac{m_6}{m_{\text{тр}}} \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h_6}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{h_6}{2R} \right)^2 + \frac{1}{4} \bar{d}^2 \right], \\
\bar{J}_{x_1}^{(7)} &= 2 \frac{m_7}{m_{\text{тр}}} \left[\left(\zeta + \frac{h_6}{2R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{h_6}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{d}^2 \right],
\end{aligned} \tag{35}$$

в которых моменты инерции также отнесены к величине $m_{\text{тр}} R^2$.

Момент инерции ПВУ относительно оси Ox_1 представляет собой сумму найденных моментов инерции

$$\bar{J}_{x_1} = \bar{J}_{x_1}^{(1)} + \bar{J}_{x_1}^{(2)} + \dots + \bar{J}_{x_1}^{(7)}. \tag{36}$$

Аналогично получим формулы для вычисления безразмерных моментов инерции составных элементов ПВУ относительно оси Oy_1 :

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{y_1}^{(1)} &= \frac{j}{12} \left\{ 6 + \bar{L}^2 + 12(1 - \zeta)^2 + 2 \frac{m_{\text{зар}}}{m_{\text{тр}}} \left[1 + 3\bar{L}^2 + 12(1 - \zeta)^2 \right] \right\}, \\
\bar{J}_{y_1}^{(2)} &= \frac{1}{12} \frac{m_2}{m_{\text{тр}}} \left(\bar{L}^2 + 12\zeta^2 \right), \\
\bar{J}_{y_1}^{(3)} &= \frac{m_3}{m_{\text{тр}}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h_3}{R} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{\delta_3}{R} + \frac{h_3}{2R} \right)^2 \right\}, \\
\bar{J}_{y_1}^{(4)} &= \frac{m_4}{m_{\text{тр}}} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{R_4}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d_4}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{\delta_4}{R} + \frac{R_4}{R} \right)^2 \right\}, \\
\bar{J}_{y_1}^{(5)} &= \frac{m_5}{m_{\text{тр}}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R_5}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d_5}{R} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{\delta_4}{R} + \frac{R_5}{R} \right)^2 \right\}, \\
\bar{J}_{y_1}^{(6)} &= \frac{1}{12} \frac{m_6}{m_{\text{тр}}} \left[n_6 \left(\frac{h_6}{R} \right)^2 + 120 \left(\zeta + \frac{h_6}{2R} \right)^2 + 15\bar{L}^2 \right], \\
\bar{J}_{y_1}^{(7)} &= \frac{1}{3} \frac{m_7}{m_{\text{тр}}} \left[\bar{L}^2 + \frac{3}{2} \left(2\zeta + \frac{h_6}{R} \right)^2 + 6 \left(\zeta + \frac{h_6}{R} \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{37}$$

а затем безразмерный момент инерции всей ПВУ

$$\bar{J}_{y_1} = \bar{J}_{y_1}^{(1)} + \bar{J}_{y_1}^{(2)} + \dots + \bar{J}_{y_1}^{(7)}. \tag{38}$$

Анализируя формулы (32)–(38), видим, что они содержат массу трубы-поплавка, которую более удобно выразить через плотность материала трубы и её геометрические параметры

$$m_{\text{тр}} = 2\pi R \delta_{\text{тр}} L \rho_{\text{тр}}, \tag{39}$$

где $\delta_{\text{тр}}$ — толщина трубы, $\rho_{\text{тр}}$ — плотность её материала.

Определив присоединённые массы жидкости и моменты инерции ПВУ, можно найти частоты всех трёх видов качки понтона. Начнем с вычисления ω_1 . В силу (19), первая формула (12) преобразуется к виду

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho g S_0}{\rho V_1 + \rho V_1}} = \sqrt{\frac{g S_0}{2V_1}}. \quad (40)$$

Учитывая, что площадь ватерлинии S_0 вычисляется по формуле (4), а объём подводной части понтона можно найти как $V_1 = \rho A_1^{(1)} L$, формулу (40) перепишем следующим образом:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{\bar{b}}{2A_1^{(1)}}}, \quad (41)$$

где $\bar{b} = b/R$.

Для удобства вычислений частот боковой и килевой качки две последние формулы (12) с учётом формул (24), (30), (36), (38), (39) приведём к виду

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{j\bar{A}_1^{(1)}\bar{h}_0}{2\pi\bar{\delta}_{\text{тр}}\bar{\rho}_{\text{тр}}\bar{J}_{x_1} + M_{44}}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{j\bar{A}_1^{(1)}\bar{H}_0}{2\pi\bar{\delta}_{\text{тр}}\bar{\rho}_{\text{тр}}\bar{J}_{y_1} + M_{55}}}, \quad (42)$$

где $\bar{h}_0 = h_0/R$, $\bar{\delta}_{\text{тр}} = \delta_{\text{тр}}/R$, $\bar{\rho}_{\text{тр}} = \rho_{\text{тр}}/\rho$.

Далее выполним анализ собственных частот качки понтона в зависимости от радиуса трубы-поплавка, её длины и расстояния между крайними трубами-поплавками. Выбор этих параметров не случаен, поскольку от них зависят коэффициент запаса плавучести k_p , относительная величина надводной части понтона ζ , его метацентрические высоты h_0 , H_0 , моменты инерции ПВУ J_{x_1} , J_{y_1} и, наконец, присоединённые массы жидкости M_{33} , M_{44} , M_{55} .

Графики зависимостей собственной частоты вертикальной, боковой и килевой качки понтона от величины радиуса труб-поплавков R при их длине $L = 5.1$ м и расстоянии между крайними поплавками $d = 2.4$ м показаны на рис. 3, где кривая $\omega_1(R)$ соответ-

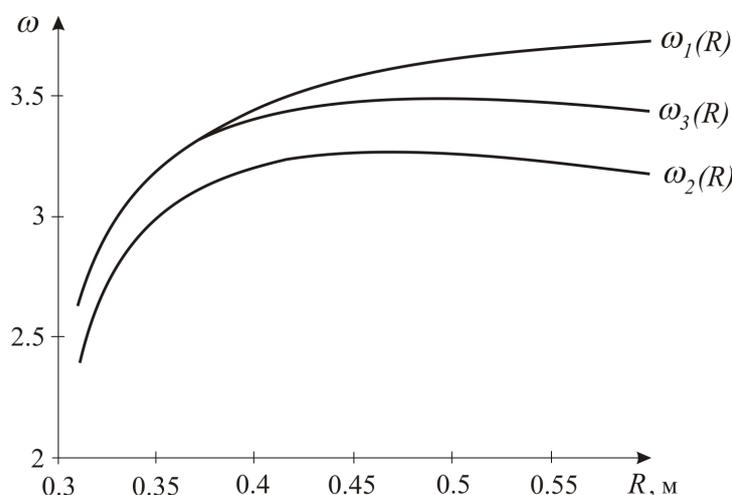


Рис. 3. Зависимости собственных частот качки понтона от радиуса R для $L = 5.1$ м, $d = 2.4$ м

ствуется вертикальной качке, $\omega_2(R)$ — боковой, а $\omega_3(R)$ — килевой. Видно, что все три графика гладко-выпуклые, причём кривые $\omega_2(R)$ и $\omega_3(R)$ имеют два участка монотонности, разделённые точками экстремума (при $R = 0.475$ м для $\omega_2(R)$ и при $R = 0.5$ м для $\omega_3(R)$), а кривая $\omega_1(R)$ на всем рассматриваемом интервале монотонна и экстремальных точек не имеет.

Участок монотонного возрастания характерен тем, что с увеличением R рост метацентрических высот h_0 , H_0 происходит интенсивнее роста моментов инерции и присоединённых масс жидкости в совокупности. На участке монотонного убывания, наоборот, с ростом R приращение J_{x_1} , J_{y_1} и M_{44} , M_{55} более существенно, чем h_0 и H_0 . Для вертикальной качки увеличение R приводит к монотонному росту коэффициента запаса плавучести и, как следствие, к увеличению собственной частоты качки.

Зависимости $\omega_1(L)$, $\omega_2(L)$, $\omega_3(L)$, представленные на рис. 4 и построенные при $R = 0.35$ м, $d = 1.8$ м, практически эквидистантны и монотонно возрастают, не обнаруживая на интервале $L \in [4; 7.5]$ локальных экстремумов собственных частот. Таким образом, увеличение длины труб-поплавков приводит к тому, что рост метацентрических высот понтона происходит более интенсивно, чем рост моментов инерции и присоединённых масс жидкости.

Следует отметить, что кривые на рис. 3, 4 показывают качественное сходство зависимостей частот от радиуса и длины труб-поплавков для всех трёх видов качки, а зависимости частот от расстояния d для вертикальной, боковой и килевой качки (рис. 5) принципиально отличны от предыдущих графиков. Так, если в условиях боковой качки увеличение d приводит к существенному росту частоты, то для условий вертикальной и килевой качки, наоборот, снижает частоты, хотя и незначительно. В самом деле, увеличение d приводит к росту параметров h_0 , J_{x_1} , M_{44} , характеризующих боковую качку понтона, но меняет не параметры H_0 , M_{55} , а только массу палубного настила, что незначительно увеличивает массу ПВУ и величину J_{y_1} и, значит, немного уменьшает частоту вертикальной и килевой качки.

Ещё одно принципиальное отличие графиков на рис. 3, 4 от таковых на рис. 5 состоит в том, что если в первом случае частота килевой качки всюду выше частоты боковой

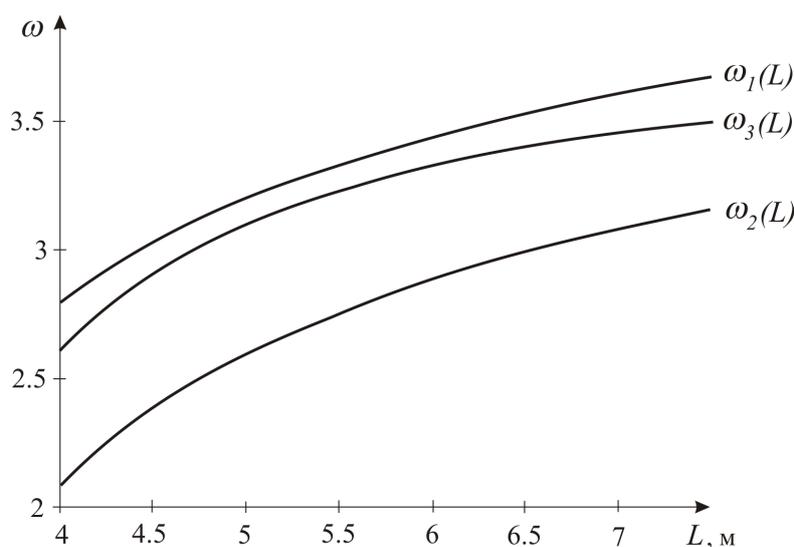


Рис. 4. Зависимости собственных частот качки понтона от длины L для $R = 0.35$ м, $d = 1.8$ м

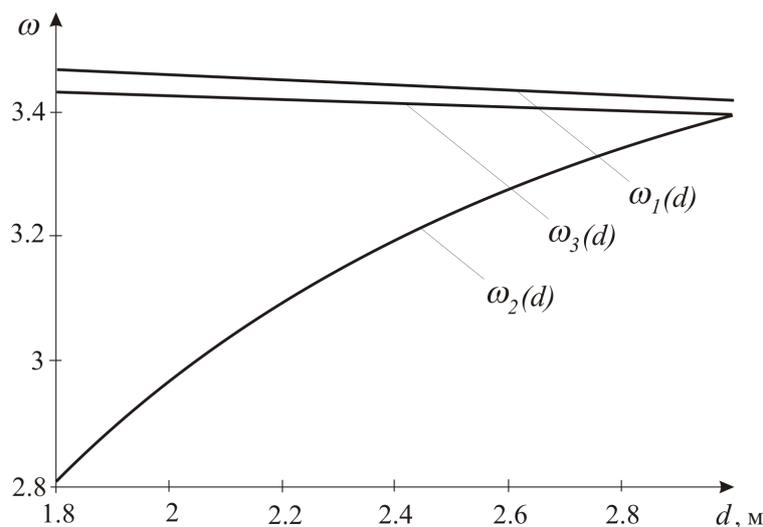


Рис. 5. Зависимости собственных частот качки понтона от расстояния d для $R = 0.4$ м, $L = 5.1$ м

качки, то во втором при $R = 0.4$ м, $L = 5.1$ м, $d = 3$ м частоты боковой и килевой качки совпадают. Следовательно, изменяя параметры понтона, можно добиться совпадения собственных частот при его боковой и килевой качке.

На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы.

1. Получены формулы для вычисления собственных частот вертикальной, боковой и килевой качки понтона, находящегося в зумпфе угольного разреза.

2. Показано, что присоединённые массы жидкости понтона, выражаемые интегралами по области, при плоском обтекании сводятся к квадратурам и в преобразованном виде представляют собой аналитические выражения.

3. Построены графики собственных частот вертикальной, боковой и килевой качки понтона в зависимости от радиуса труб-поплавков, их длины и расстояния между крайними поплавками, в результате анализа которых:

а) установлено, что практически на всех рассмотренных диапазонах изменения параметров понтона его собственная частота боковой качки ниже собственных частот вертикальной и килевой качки. Следовательно, характер вертикальной и килевой качки более порывистый, чем боковой;

б) найдены параметры понтона $R = 0,4$ м, $L = 5,1$ м, $d = 3$ м, при которых собственные частоты его боковой и килевой качки совпадают;

в) установлен интервал изменения радиуса труб-поплавков $R \in [0.32; 0.37]$, на котором собственные частоты вертикальной и килевой качки понтона совпадают.

Список литературы

- [1] Кучер Н.А., Черданцев С.В., Протасов С.И. и др. Условия безопасного применения плавучих водоотливных установок // Безопасность труда в промышленности. 2003. № 1. С. 12–14.
- [2] Черданцев С.В. Теоретические основы расчёта понтонов, используемых на угольных разрезах // ФТПРПИ. 2013. № 1. С. 61–69.

- [3] БОРИСОВ Р.В., ЛУГОВСКИЙ В.В., МИРОХИН Б.М., РОЖДЕСТВЕНСКИЙ В.В. Статика корабля. СПб.: Судостроение, 2005. 256 с.
- [4] ЧЕРДАНЦЕВ С.В. Постановка задачи о гравитационных волнах жидкости в зумпфах угольных разрезов. // Вестник КузГТУ. 2012. № 6. С. 10–12.
- [5] ЧЕРДАНЦЕВ С.В. Уравнения движения понтонов в зумпфах угольных разрезов // Там же. 2013. № 1. С. 7–10.
- [6] РЕМЕЗ Ю.В. Качка корабля. Л.: Судостроение, 1983. 328 с.
- [7] ПОНТРЯГИН Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
- [8] НИКОЛЬСКИЙ С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001. 592 с.
- [9] КИЛЬЧЕВСКИЙ Н.А. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1977. 544 с.
- [10] КОЧИН Н.Е., КИБЕЛЬ И.А., РОЗЕ И.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.

*Поступила в редакцию 2 июля 2013 г.,
с доработки — 6 декабря 2013 г.*