

## Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин\*

С. К. ГОЛУШКО<sup>1,2</sup>, С. В. ИДИМЕШЕВ<sup>1</sup>, В. П. ШАПЕЕВ<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,  
Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>4</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет  
e-mail: s.k.golushko@gmail.com, idimeshev@gmail.com, vshapeev@ngs.ru

Предложен и реализован вариант метода коллокаций и наименьших невязок для численного решения задач механики деформируемого твёрдого тела и, в частности, задач расчёта напряжённо-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин, находящихся под действием поперечных нагрузок различного вида.

*Ключевые слова:* метод коллокаций и наименьших невязок, прямоугольная пластина, напряжённо-деформированное состояние.

### Введение

Многие конструктивные элементы машин и аппаратов современной техники представляют собой пластины и оболочки различной формы и слоистой структуры с переменными геометрическими и физико-механическими параметрами. Одним из примеров таких конструкций является, например, дорожное полотно, подверженное воздействию сложного нагружения. Для исследования прочности, жёсткости и несущей способности этих конструкций требуется знание их напряжённо-деформированного состояния (НДС), что приводит к необходимости разработки эффективных методов решения краевых задач теории пластин и оболочек. В замкнутой аналитической форме решение таких задач можно получить лишь в редких случаях. Известные полуаналитические методы [1–3], в которых решение представляется в виде ряда, имеют ограниченную область применения, ввиду их явной зависимости от вида закрепления и нагружения конструкции. Определённые классы задач теории пластин и оболочек можно свести к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и воспользоваться, например, методами дискретной ортогонализации Годунова [4–6], инвариантного погружения [7] или сплайн-коллокации [8]. Однако многие практически важные задачи механики деформируемого твёрдого тела приводят к необходимости решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Следует отметить, что переход от классической теории однородных изотропных пластин и оболочек к тем или иным уточнённым теориям

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00227 и 13-01-12032-офи\_м), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (№ НШ-6293.2012.9).

неоднородных анизотропных конструкций сопровождается не только увеличением порядка разрешающих систем дифференциальных уравнений, но и качественным изменением структуры их решений, появлением новых быстро возрастающих и быстро убывающих решений, имеющих ярко выраженный характер погранслоёв [9]. Традиционные схемы и алгоритмы численного интегрирования краевых задач на таких классах жёстких систем нелинейных дифференциальных уравнений оказываются мало пригодными. Попытки применения конечноразностных методов, методов конечных и граничных элементов к расчёту многослойных композитных конструкций предпринимались, однако приемлемые результаты удалось получить лишь при использовании классической теории пластин и оболочек Кирхгофа — Лява и уточнённой теории Тимошенко [10–12]. Для многослойных конструкций с существенно различными физико-механическими характеристиками слоёв необходимо применять уточнённые теории, учитывающие поперечные сдвиги в слоях [9], а на таких классах задач перечисленные методы оказываются малоэффективными.

Очевидно, что подобные вычислительные трудности возникают и при решении других задач механики сплошных сред. Так, известные уравнения Навье — Стокса, описывающие течение вязкой жидкости, относятся к классу сингулярно возмущённых, т. е. обладают вышеописанными особенностями. С ростом числа Рейнольдса обусловленность задач для этой системы ухудшается, численные методы становятся менее устойчивыми и менее точными. Так, метод коллокаций, который успешно применяется для решения уравнений пограничного слоя, непригоден для решения уравнений Навье — Стокса ввиду того, что при указанных обстоятельствах решение дифференциальной задачи сводится к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). А метод коллокаций и наименьших невязок (КНН) за счёт минимизации функционала погрешности позволяет свести решение этой задачи к решению соответствующей лучше обусловленной СЛАУ. Метод КНН имеет также “управляющие параметры” и исследования [13, 14] показали, что за счёт их выбора можно одновременно уменьшить невязку уравнений исходной дифференциальной задачи на численном решении и улучшить обусловленность соответствующей СЛАУ. Для эталонной задачи о течении в 2D и 3D каверне с движущейся крышкой численное решение, полученное методом КНН, является одним из самых точных [15, 16]. Есть основания полагать, что его применение к задачам теории пластин и оболочек может быть столь же успешным.

Идеи и принципы метода КНН берут начало в работах Ascher, Russel, Christiansen [8], с помощью которых создан известный пакет прикладных программ COLSYS для решения жёстких систем нелинейных ОДУ. Далее метод получил развитие в работах А.Г. Слепцова, В.П. Шапеева, Ю.И. Шокина и других авторов. В [17] впервые реализован вариант метода для систем уравнений в частных производных. Вариант с адаптивной сеткой в областях с криволинейной границей предложен в [18–20]. В работе [16] получен повышенный порядок точности численного решения. В методе КНН расчётная область покрывается сеткой. В каждой ячейке сетки используется метод коллокаций [8], в котором решение ищется из условия удовлетворения исходным уравнениям в некоторых заданных точках — точках коллокации. Численное решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций некоторого линейного конечномерного пространства, и задача сводится к поиску неизвестных коэффициентов данного представления. Для определения этих коэффициентов в ячейке выписывается СЛАУ. Особенностью метода КНН является переопределённость СЛАУ (число уравнений больше числа неизвестных). Решение обеспечивает минимум суммы квадратов невязок урав-

нений СЛАУ, т. е. понимается в смысле наименьших квадратов. В данной реализации метода КНН для решения переопределённой системы использован метод отражений Хаусхолдера, который требует меньше арифметических операций, чем ранее применяемый метод вращений Гивенса. Для определения решения во всей области использован метод декомпозиции области — метод итераций по подобластям (альтернирующий метод Шварца [21]). Метод декомпозиции применён для построения быстросходящегося итерационного процесса решения систем большой размерности. Он позволяет свести решение задачи во всей области к последовательности задач в подобластях, вычислительная сложность которых много меньше таковой задачи в исходной области. Такой подход позволяет эффективно распараллеливать процесс вычисления, поскольку данные обрабатываются отдельно по подзадачам (подобластям), что очень важно в условиях развития современных кластерных систем.

Настоящая статья является первым шагом к разработке метода КНН в приложении к задачам механики деформируемого твёрдого тела. В качестве начального объекта исследований выбрана прямоугольная изотропная пластина, в том числе лежащая на упругом основании. Для ряда случаев специального нагружения и закрепления прямоугольных пластин имеются аналитические решения [1], что делает эту задачу хорошим объектом для апробации численного метода.

## 1. Постановка задачи и описание метода

Требуется определить напряжённо-деформированное состояние изотропной прямоугольной пластины, закреплённой на краях и находящейся под действием поперечных нагрузок произвольного вида (рис. 1). Пластина предполагается тонкой, что позволяет свести трёхмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории тонких пластин. Следуя Тимошенко [1], разрешающую систему уравнений запишем в перемещениях, определив которые, можно будет полностью восстановить НДС пластины.

В двумерной прямоугольной области  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

где  $w(x_1, x_2)$  — прогиб срединной поверхности;  $q(x_1, x_2)$  — поперечная нагрузка;  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  — жёсткость пластины при изгибе;  $a, b, h$  — длина, ширина и толщины

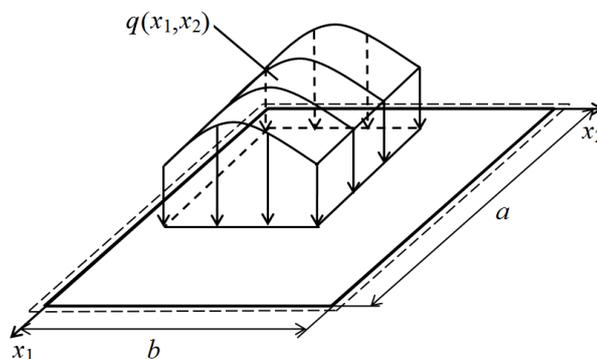


Рис. 1. Прямоугольная изотропная пластина под действием поперечной нагрузки

на пластины;  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины.

На каждом крае прямоугольной области может быть задано одно из следующих условий закрепления:

$$\text{защемлённый край:} \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

$$\text{шарнирно закреплённый край:} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad (3)$$

$$\text{свободный край:} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} = 0, \quad (4)$$

здесь и далее  $n$  — внешняя нормаль к границе области  $\partial\Omega$ .

Область  $\Omega$  покрывается расчётной сеткой с прямоугольными ячейками  $\Omega_i$  ( $i=1, \dots, N$ ,  $N$  — число ячеек сетки). В общем случае сетка может быть неравномерной и нерегулярной. Для удобства в каждой ячейке  $\Omega_i$  вводятся локальные переменные  $(y_{1i}, y_{2i})$ , которые связаны с глобальными переменными  $(x_1, x_2)$  формулами

$$y_{1i} = \frac{x_1 - x_{1i}^*}{h_{1i}}, \quad y_{2i} = \frac{x_2 - x_{2i}^*}{h_{2i}},$$

где  $2h_{1i}, 2h_{2i}$  — размеры ячеек в направлениях  $x_1$  и  $x_2$ ,  $(x_{1i}^*, x_{2i}^*)$  — центры ячеек. Локальные переменные выбраны таким образом, что в каждой ячейке  $y_{1i} \in [-1, 1]$ ,  $y_{2i} \in [-1, 1]$ . Далее, рассматривая конкретную ячейку, для краткости индекс  $i$  будем опускать.

Приближённое решение  $w_i$  в каждой ячейке  $\Omega_i$  представляется в виде линейной комбинации базисных функций некоторого линейного конечномерного пространства

$$w_i(y_1, y_2) = \sum_{j=1}^d c_{ij} \varphi_j(y_1, y_2), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где  $d$  — размерность линейного пространства,  $c_{ij}$  — неизвестные коэффициенты,  $\varphi_j$  — базисные функции. В частности, можно использовать пространство полиномов степени  $m$

$$\varphi_j \in \{y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \mid 0 \leq \alpha_1 \leq m, 0 \leq \alpha_2 \leq m - \alpha_1\}, \quad (6)$$

т. е.  $\varphi_j$  — мономы от двух переменных степени не выше  $m$ .

Для определения решения во всей области применим метод итераций по подобластям. Этот метод декомпозиции позволяет свести исходную задачу во всей области к некоторому итерационному процессу. Каждая итерация представляет собой последовательное решение задачи в подобластях. В данной реализации метода КНН подобласть совпадает с ячейкой сетки, поэтому условия согласования на границах между соседними ячейками будем выбирать специальным образом, обеспечивая быструю сходимость итерационного процесса. Следуя [17], потребуем на этих границах непрерывность линейных комбинаций неизвестной функции и её производных вплоть до третьего порядка

$$w_i^k + p_1 \frac{\partial w_i^k}{\partial n} = w_{adj} + p_1 \frac{\partial w_{adj}}{\partial n}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w_i^k}{\partial n^2} + p_2 \frac{\partial^3 w_i^k}{\partial n^3} = \frac{\partial^2 w_{adj}}{\partial n^2} + p_2 \frac{\partial^3 w_{adj}}{\partial n^3}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (8)$$

где  $w_i^k$  — решение в  $\Omega_i$  на  $k$ -й итерации;  $w_{adj}$  — решение в соседней ячейке, имеющей общую границу с  $\Omega_i$ , на  $k$ -й итерации, если ячейка уже “рассчитана”, и на  $(k-1)$ -итерации — в противном случае;  $n$  — внешняя нормаль к границе  $\Omega_i$ ;  $p_1, p_2$  — управляющие параметры метода КНН. Ниже будет показано, что оптимальный выбор этих параметров позволяет значительно ускорить итерационный процесс.

Отметим, что запись условий согласования на границе между двумя ячейками будет различаться знаками перед вторыми слагаемыми в (7), (8) в каждой из двух ячеек с общей границей. Например, на вертикальной границе для ячейки слева от этой границы направление нормали  $n$  совпадает с направлением оси  $y_1$ , поэтому перед указанными слагаемыми берется знак “+”, а для ячейки справа от этой границы направление нормали  $n$  противоположно оси  $y_1$  и берется знак “-”. Для реализации условий согласования также необходимо, чтобы в (6) степень полинома  $m$  была не меньше третьей.

В каждой ячейке  $\Omega_i$  для определения неизвестных коэффициентов  $c_{ij}$  сформируем систему линейных алгебраических уравнений

$$A_i c_{ij} = f_i \quad (9)$$

и назовем её *локальной* СЛАУ. Предполагая, что все функции приведены в локальных переменных, в каждой ячейке  $\Omega_i$  на  $k$ -й итерации можно записать:

— уравнения коллокаций — требования удовлетворения исходным уравнениям задачи в некоторых заданных точках ячейки

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} \frac{\partial^4 w_i^k}{\partial y_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w_i^k}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} \frac{\partial^4 w_i^k}{\partial y_2^4} = h_1^2 h_2^2 \frac{q(y_1, y_2)}{D}, \quad (y_1, y_2) \in \Omega_i; \quad (10)$$

— условия согласования — условия склейки решения в некоторых точках на границе с соседней ячейкой  $w_{adj}$

$$w_i^k + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial w_i^k}{\partial n} = w_{adj} + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial w_{adj}}{\partial n}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 w_i^k}{\partial n^2} + p_2 \frac{1}{h_n} \frac{\partial^3 w_i^k}{\partial n^3} = \frac{\partial^2 w_{adj}}{\partial n^2} + p_2 \frac{1}{h_n} \frac{\partial^3 w_{adj}}{\partial n^3}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad (12)$$

где  $h_n = h_1$ , если  $n = y_1$ , и  $h_n = h_2$ , если  $n = y_2$ ;

— граничные условия задаются в некоторых точках на границах ячеек, прилегающих к границе области  $\Omega$ , и реализуют краевые условия исходной задачи. Например, для защемлённого края (2) их можно выписать как

$$w_i^k = 0, \quad \frac{\partial w_i^k}{\partial n} = 0, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega. \quad (13)$$

В расчётах применялись прямоугольные равномерные в каждом направлении сетки. Решение в ячейке аппроксимировалось в соответствии с (6) при степени полинома  $m = 4$ . Для вычисления неизвестных коэффициентов в каждой ячейке задавались 16 точек коллокаций, равномерно расположенных внутри ячейки, четыре условия согласования на каждой внутренней границе и четыре граничных условия на границе ячейки, принадлежащей границе области решения задачи, также расположенные равномерно (рис. 2).

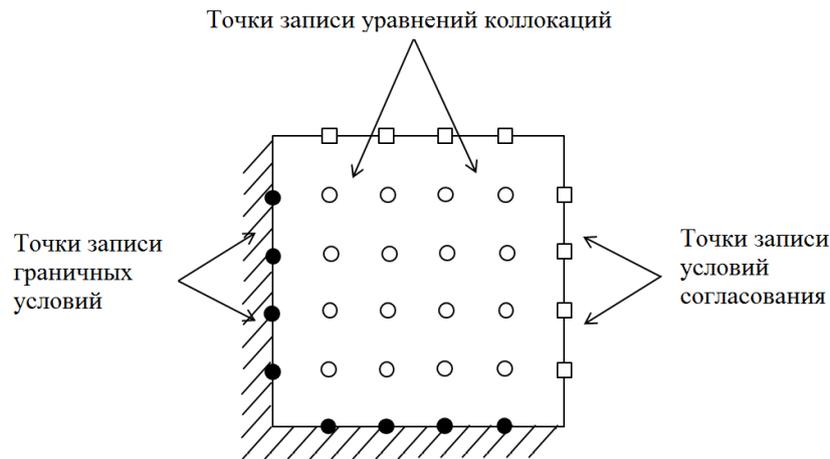


Рис. 2. Схема расположения точек записи граничных условий, уравнений коллокаций и условий согласования

Подставляя решение (5) с неопределёнными коэффициентами  $c_{ij}$  в уравнения коллокаций, условия согласования и граничные условия в точках с конкретными координатами, получаем переопределённую СЛАУ относительно  $c_{ij}$  с числовыми коэффициентами. Для её решения применим ортогональный метод  $QR$ -разложения, который даёт то же решение, что и метод наименьших квадратов [22]. Однако ортогональные методы не ухудшают обусловленность исходной задачи, следовательно, они менее чувствительны к ошибкам округления, что особенно важно для плохообусловленных систем.

Ранее [13] в методе КНН применялся метод вращений Гивенса, в котором при помощи умножения на элементарные матрицы вращения последовательно аннулируется каждый поддиагональный элемент матрицы. В настоящей работе для метода КНН реализован метод отражений Хаусхолдера. Этот алгоритм аналогичен методу вращений, однако в нём аннулируются все поддиагональные элементы каждого столбца за один шаг, поэтому  $QR$ -разложение с использованием матриц отражений требует меньшее число арифметических действий [22].

Таким образом, задача сведена к построению итерационного процесса, в котором одна итерация представляет собой последовательное решение каждой локальной СЛАУ. В численных экспериментах в качестве начального приближения все неизвестные коэффициенты приравнивались к 1. Остановка итерационного процесса происходила при выполнении условия

$$\max_{i,j} |c_{ij}^k - c_{ij}^{k-1}| < \varepsilon,$$

где  $c_{ij}^k$  —  $j$ -й коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером  $i$  на  $k$ -й итерации,  $\varepsilon$  — псевдопогрешность решения (выбирается такой, чтобы погрешность решения СЛАУ была существенно меньше погрешности аппроксимации задачи, в настоящей работе  $\varepsilon = 10^{-10}$ ).

Отметим важное свойство совместного применения метода КНН и альтернирующего метода Шварца. Если известна матрица  $Q$ , приведение матрицы  $A$  к верхнетреугольному виду сводится к простому умножению  $Q$  на  $A$ . Ясно, что  $Q$  зависит только от матрицы  $A$ , которая в свою очередь зависит от многих параметров. Напомним, что локальная СЛАУ (9) состоит из уравнений коллокаций, условий согласования и гра-

ничных условий. Если уравнения коллокаций таковы, что их левые части не зависят от номера итерации (зависимость возможна, например, при линеаризации исходных уравнений), то матрица  $A_i$  для ячейки  $\Omega_i$  не зависит от номера итерации. Следовательно, вместо приведения матрицы к верхнетреугольному виду на каждой итерации можно использовать домножение матрицы  $A_i$  на сохранённую на первой итерации матрицу  $Q_i$ . Для исходного уравнения (1) с постоянными коэффициентами все внутренние ячейки будут иметь одинаковую матрицу  $A_i$ , а следовательно, одну и ту же  $Q_i$ . Лишь для ячеек, касающихся границ области  $\Omega$ , локальные матрицы  $A_i$  будут различны (для некоторых краевых условий также возможны упрощения). Такой приём не уменьшает числа необходимых итераций, но позволяет снизить время расчёта одной итерации почти на порядок.

Для ускорения итерационного процесса применялся метод ускорения сходимости итераций, использующий подпространства Крылова. В этом методе через каждые  $n$  шагов к текущему приближению  $c^k$  добавляется поправка, являющаяся линейной комбинацией  $n$  векторов  $r^i = c^{i+1} - c^i$ ,  $i = (k - n), \dots, (k - 1)$ . Поправка ищется из условия минимума функционала, составленного из квадратов невязок уравнений системы, эквивалентной исходной системе (9). Подробное описание варианта этого метода дано в [14, 15].

Другое важное свойство альтернирующего метода Шварца — его высокая эффективность при расчётах на многопроцессорных вычислительных системах. Из проведённых численных экспериментов можно заключить, что при достаточно большом числе итераций не имеет принципиального значения последовательность решения локальных СЛАУ (9). Поэтому задачу обращения локальных матриц на итерации можно распределить между вычислительными узлами, добившись минимального времени простоя.

Однако самым эффективным способом уменьшения времени счёта является выбор оптимальных управляющих параметров метода. Важно, что этот способ не противоречит вышеописанным подходам оптимизации вычислительного процесса, а гармонично их дополняет.

## 2. Управляющие параметры метода КНН

Как уже было отмечено, выбор оптимальных значений управляющих параметров позволяют принципиально ускорить итерационный процесс [13]. Покажем, как управляющие параметры влияют на итерационный процесс, и определим область оптимальных параметров. Следует отметить, что выбор управляющих параметров — это также способ ускорения итерационного процесса. Из численных экспериментов известно, что существуют значения параметров, при которых итерационный процесс заведомо сходится с приемлемой скоростью. Управляющими параметрами метода КНН являются весовые коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$  в условиях согласования (11)–(12). Для определения области параметров, обеспечивающих быструю сходимость, был проведён ряд численных экспериментов для задачи (1) с краевыми условиями (2) при различных значениях параметров  $p_1$  и  $p_2$ . Для каждой пары значений управляющих параметров определялось число итераций, необходимых для достижения фиксированной псевдопогрешности ( $\varepsilon_0 = 10^{-11}$ ). Такие тесты проводились на трёх сетках (рис. 3). Здесь и далее  $N_1$  и  $N_2$  — количество ячеек сетки в направлениях  $x_1$ ,  $x_2$ . Из рис. 3 следует, что область значений параметров, при использовании которых требуется наименьшее число итераций (ей соответствует более тёмный оттенок), практически не зависит от размера сетки. При решении задачи (1)

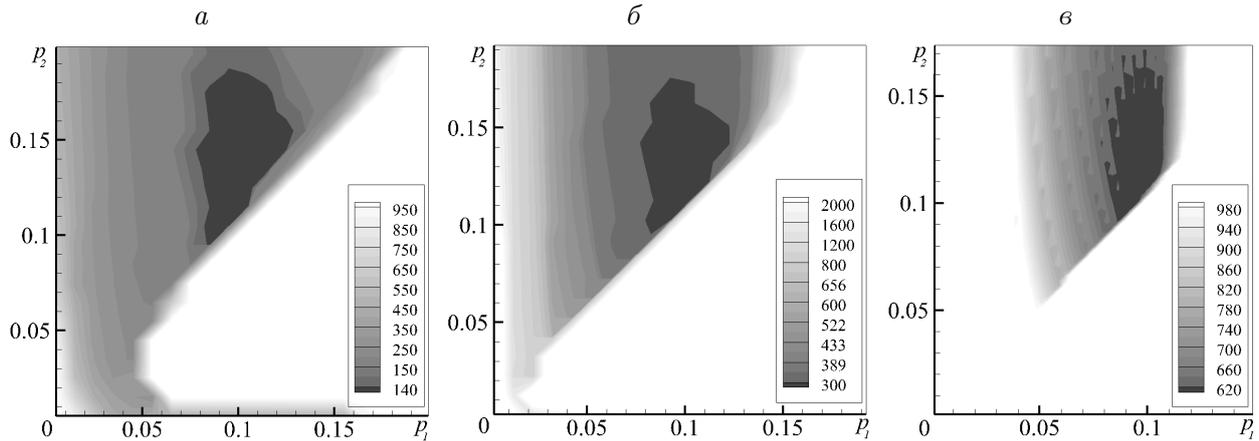


Рис. 3. Зависимость числа итераций от значений управляющих параметров на разных сетках.  $N_1 = N_2 = 10$  (а),  $N_1 = N_2 = 20$  (б),  $N_1 = N_2 = 40$  (в). Более тёмным областям соответствуют значения параметров, обеспечивающие более быструю сходимость

Т а б л и ц а 1. Зависимость числа итераций от значений управляющих параметров на разных сетках

$N_1 \times N_2$	Число итераций	
	$p_1 = p_2 = 1/h_n$	$p_1 = 0.10, p_2 = 0.12$
$10 \times 10$	206	129
$20 \times 20$	807	282
$40 \times 40$	3242	593
$80 \times 80$	12146	2090

с краевыми условиями (2) для любого размера прямоугольной сетки с квадратными ячейками можно рекомендовать следующие значения управляющих параметров метода:

$$p_1 = 0.10, \quad p_2 = 0.12.$$

Приведённые результаты были получены экспериментально и, конечно, не являются априорно очевидными. Обычно в расчётах используются “стандартные” значения управляющих параметров

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{h_n},$$

при которых, как установлено из численных экспериментов, итерационный процесс сходится. Из табл. 1 видно, что оптимальные значения параметров особенно важны на мелких сетках. Так как на каждой итерации количество обрабатываемых матриц есть  $N_1 N_2$ , то уменьшение количества итераций в значительной мере влияет на общее время расчёта.

### 3. Численные эксперименты

Для верификации метода КНН проведён ряд численных экспериментов по расчёту НДС изотропных пластин. Представлены сравнения численных решений, полученных методом КНН, с аналитическими решениями из [1], а также рассмотрен ряд задач, аналитическое решение которых не известно.

Для всех рассматриваемых постановок (кроме пластины на ложементе) будем использовать разрешающее уравнение (1). Краевые условия и способ нагружения будут описаны ниже для каждого конкретного примера. Для иллюстрации напряжённого состояния пластины используем функцию распределения интенсивности напряжений

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\sigma_{xy}^2},$$

$$\sigma_x = -\bar{E}(w_{xx} + \nu w_{yy}), \quad \sigma_y = -\bar{E}(w_{yy} + \nu w_{xx}), \quad \sigma_{xy} = -\bar{E}(w_{xy}), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

### 3.1. Пластина под специальной нагрузкой

Рассмотрим прямоугольную изотропную пластину, свободно опёртую (3) по всему контуру и находящуюся под действием нагрузки  $q$  вида

$$q = 10^5 \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right).$$

В этом случае задача имеет аналитическое решение [1]

$$w(x_1, x_2) = \frac{qa^4b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}.$$

В расчётах использовались следующие параметры:  $a = b = 10$  м,  $h = 0.1$  м,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.28$ .

Для определения порядка сходимости проведены численные эксперименты на последовательности сеток с уменьшением шага сетки вдвое. Для расчета погрешности в каждой ячейке равномерно в каждом направлении распределялось 100 точек. Погрешность численного решения во всей области определялась в этих точках по формуле

$$E_{N_1, N_2} = \frac{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2) - w^h(x_1, x_2)|}{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2)|}.$$

На более мелких сетках в погрешности решения возрастает доля ошибок округления, что неизбежно сказывается на точности вычисления решения и порядке сходимости погрешности. Из полученных результатов видно (табл. 2), что сходимость начинается уже на достаточно грубых сетках, а после пяти этапов мельчения шагов сетки вдвое порядок сходимости не ниже второго. Расчёты проводились на одном вычислительном узле персонального компьютера, имеющего частоту 2.67 ГГц.

Т а б л и ц а 2. Время расчёта, погрешность и коэффициент уменьшения погрешности численного решения, полученного на сетках с уменьшением шага вдвое

$N_1 \times N_2$	$E_{N_1, N_2}$	$E_{N_1, N_2} / E_{(N_1/2), (N_2/2)}$	Время расчёта, с
10 × 10	1.82-02	—	0.6
20 × 20	2.83-03	6.4	4.3
40 × 40	4.56-04	6.2	46
80 × 80	7.57-05	6.0	419
160 × 160	1.32-05	5.7	5487

### 3.2. Пластина, защемлённая по трём краям

Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть прямоугольная изотропная пластина находится под действием равномерной поперечной нагрузки  $q = \text{const}$ . Три края пластины защемлены (2), а оставшийся край свободен (4). В расчётах использована сетка  $40 \times 40$ . На рис. 4 показана форма прогиба  $w$  и интенсивность напряжений  $I$  при параметрах задачи  $a = b = 10$  м,  $h = 0.1$  м,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.28$ ,  $q = 0.1$  МПа.

### 3.3. Локально нагружённая пластина

Рассмотрим квадратную изотропную пластину, локально нагружённую по площади прямоугольника  $\Omega_q = [2, 4] \times [2, 4]$ . Будем применять два способа закрепления пластины по контуру: защемление (2) и свободное опирание (3). В расчётах использована сетка  $40 \times 40$ . Параметры задачи при расчётах следующие:  $a = b = 10$  м,  $h = 0.1$  м,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.28$ ,  $q_0 = 1$  МПа,

$$q(x_1, x_2) = \begin{cases} q_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_q, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_q. \end{cases}$$

На рис. 5 приведены решения задачи для двух способов закрепления пластины.

### 3.4. Пластина на упругом основании (ложементе)

Рассмотрим изотропную пластину, у которой два смежных края защемлены (2), а оставшиеся два — свободны (4). Пластина находится на ложементе, реакция которого на пластину считается пропорциональной прогибу [1]. Математически это допущение представляется как дополнительная внешняя нагрузка  $k^*w/D$ , где  $k^*$  — коэффициент постели. Тогда определяющие уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D} + \frac{k^*w}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

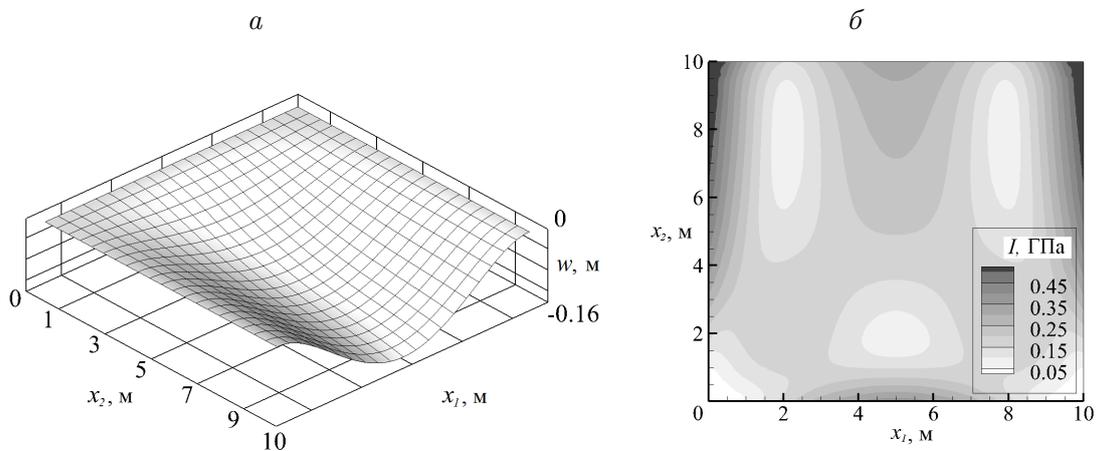


Рис. 4. Прогиб  $w$  (а) и интенсивность напряжений  $I$  (б) деформированной пластины, защемлённой по трём краям. Более тёмный цвет соответствует областям с большей напряжённостью (то же на рис. 5, 6)

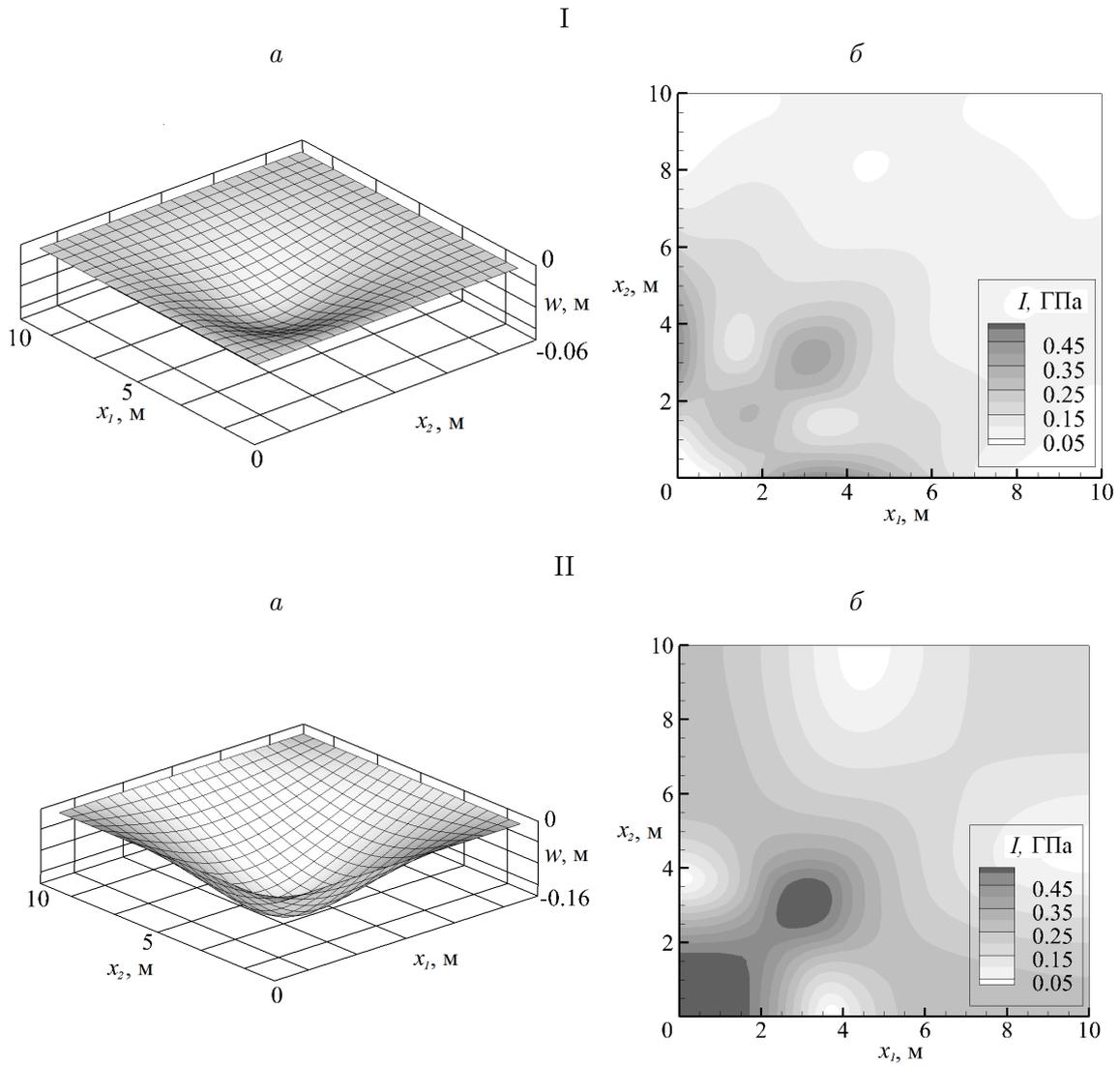


Рис. 5. Прогиб  $w$  (а) и интенсивность напряжений  $I$  (б) деформированной пластины при закреплении краёв (I) и шарнирном закреплении (II)

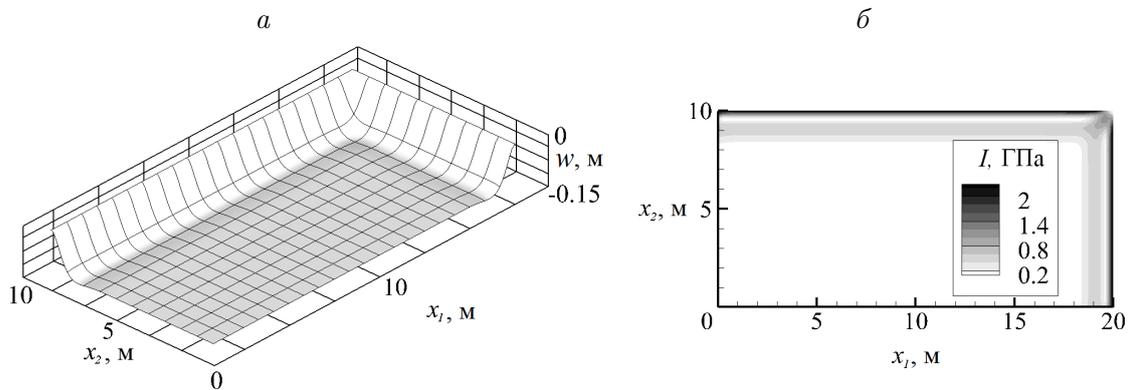


Рис. 6. Прогиб  $w$  (а) и интенсивность напряжений  $I$  (б) деформированной пластины на упругом основании

Параметры задачи в расчётах:  $a = 2b = 20$  м,  $h = 0.1$  м,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.28$ ,  $q = 10$  МПа,  $k^* = 700$  МПа/м (гравий),  $N_1 = 40$ ,  $N_2 = 20$ . На рис. 6 приведены результаты, полученные для данного случая.

## Заключение

В работе предложен и реализован вариант метода КНН для расчёта напряжённо-деформированного состояния прямоугольных изотропных пластин под действием различных поперечных нагрузок. Для апробации метода проведён ряд численных экспериментов при различных способах нагружения, закрепления и относительных размерах пластин. Показано, что численные решения, полученные методом КНН, сходятся с повышенным порядком и с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями.

Есть основания ожидать, что подходы, использованные в представленном варианте метода КНН, могут быть успешно применены и для решения более сложных задач теории анизотропных пластин и оболочек.

## Список литературы

- [1] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Коренева Е.Б. Аналитические методы расчёта пластин переменной толщины и их практические приложения. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009.
- [3] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960.
- [4] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математики. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
- [5] Голушко С.К., Горшков В.В., Юрченко А.В. О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 24–33.
- [6] Голушко С.К., Морозова Е.В., Юрченко А.В. О численном решении краевых задач для жёстких систем дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Математика, механика, информатика. 2005. № 2. С. 12–26.
- [7] Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001.
- [8] ASCHER U., CHRISTIANSEN J., RUSSEL R.D. A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems // Math. Comput. 1979. Vol. 33. P. 659–679.
- [9] Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит, 2008.
- [10] Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решения задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979.
- [11] Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988.
- [12] БРЕВБИЯ К., ТЕЛЛЕС Ж., ВРОУБЕЛ Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.

- [13] ИСАЕВ В.И., ШАПЕЕВ В.П., ЕРЁМИН С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье—Стокса // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
- [14] ИСАЕВ В.И., ШАПЕЕВ В.П. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 41–60.
- [15] ШАПЕЕВ В.П., ВОРОЖЦОВ Е.В. ИСАЕВ В.И., ИДИМЕШЕВ С.В. Метод коллокаций и наименьших невязок для трёхмерных уравнений Навье—Стокса // Вычисл. математика и программирование. М.: ВЦ МГУ, 2013. Т. 14, разд. 1. С. 306–322.
- [16] ИСАЕВ В.И., ШАПЕЕВ В.П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье—Стокса // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2010. Т. 50, № 10. С. 1758–1770.
- [17] СЁМИН Л.Г., СЛЕПЦОВ А.Г., ШАПЕЕВ В.П. Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 2. С. 90–98.
- [18] ПЛЯСУНОВА А.В., СЛЕПЦОВ А.Г. Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений на подвижных сетках // Моделирование в механике. Новосибирск: ВЦ, ИТПМ СО АН СССР. 1987. Т. 1 (18), № 4. С. 116–137.
- [19] СЛЕПЦОВ А.Г., ШОКИН Ю.И. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1997. Т. 37, № 5. С. 572–586.
- [20] БЕЛЯЕВ В.В., ШАПЕЕВ В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 12–21.
- [21] ВАСИЛЕВСКИЙ Ю.В., ОЛЬШАНСКИЙ М.А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: МАКС ПРЕСС, 2007.
- [22] ДЕММЕЛЬ ДЖ. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения М.: Мир, 2001.

*Поступила в редакцию 3 сентября 2013 г.,  
с доработки — 19 ноября 2013 г.*