Вычислительные технологии **Том 18, № 5, 2013**

Теоремы существования и единственности для нелинейно-дисперсионных уравнений Грина — Нагди*

С. П. Баутин, С. Л. Дерябин
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: SBautin@math.usurt.ru, SDeryabin@math.usurt.ru

Рассматривается нелинейно-дисперсионная модель длинной волны — система уравнений Грина — Нагди. Доказана теорема существования и единственности аналитических решений невырожденных начально-краевых задач для одномерных систем уравнений Грина — Нагди. В виде сходящихся рядов построены точные решения начально-краевых задач с различными граничными условиями, которые могут быть использованы для тестирования численных методик.

Ключевые слова: нелинейно-дисперсионные уравнения Грина — Нагди, характеристическая задача Коши, теоремы существования и единственности, сходящиеся ряды, точные решения.

Для описания распространения длинных волн используются многие модели — от классических уравнений мелкой воды [1, 2] до системы уравнений газовой динамики и полной системы уравнений Навье — Стокса [3, 4]. В настоящее время для моделирования движения волн на воде наиболее широкое распространение получили численные методы, основанные на аппроксимации уравнений мелкой воды. Однако на границе уреза полная глубина жидкости обращается в нуль, что приводит к сильному вырождению системы и создаёт дополнительные трудности при численном моделировании выхода волны на берег. Вследствие этого для построения надёжных численных методов решения задач с подвижной линией уреза необходимы аналитические исследования, позволяющие определить условия на границе уреза. В работах [5, 6] такие исследования проведены для классических уравнений мелкой воды и получен закон движения границы уреза, который эффективно использовался при расчётах.

Вместе с тем замечено, что для детального моделирования явления на продолжительное время требуются модели, способные воспроизводить дисперсию и отражать неоднородность процесса в вертикальном направлении. Считается, что этим условиям в моделях мелкой воды отвечают нелинейно-дисперсионные уравнения Грина — Нагди [7]. Но система уравнений Грина — Нагди существенно сложнее классических уравнений мелкой воды и не является гиперболической. При её исследовании возникают нетривиальные начально-краевые задачи, в частности, как будет показано ниже, задача Коши для этой системы не имеет единственного решения. Исследованию некоторых начально-краевых задач для системы уравнений Грина — Нагди посвящена данная работа.

*Исследование поддержано РФФИ (проект № 11-01-00198) и Министерством образования и науки РФ (проект № 1.8490.2013).

1. Построение решения начально-краевой задачи для одномерной системы уравнений Грина — Нагди

Рассматривается слой жидкости, ограниченный свободной поверхностью и непроницаемым дном. Предполагается, что жидкость находится в гравитационном поле, является несжимаемой и невязкой. Кроме того, считается, что течение жидкости — безвихревое. Декартова система координат выбирается так, что уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имеет вид $z = 0$, при этом $z = -h(x)$ — известная функция, задающая поверхность непроницаемого дна.

Тогда система уравнений мелкой воды второго приближения для одномерных течений Грина — Нагди имеет вид [7]

$$
\begin{gathered}
H_t + H_x u + H u_x = 0,\\
u_t + u_x u + gH_x = gh_x + (H_x - h_x)R_2 + H\left[R_1\left(H_x - \frac{1}{2}h_x\right) + \frac{1}{2}R_{2x} + \frac{H}{3}R_{1x}\right].
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь H — полная глубина жидкости от непроницаемого дна до свободной поверхности, u — скорость жидкости, g — ускорение свободного падения и использованы следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= u_{xt} + u_{xx}u - u_x^2,\\
R_2 &= (u_t + u_x u)h_x + h_{xx}u^2,\\
R_{1x} &= u_{xxt} + u_{xxx}u - u_x u_{xx},\\
R_{2x} &= (u_{tx} + u_{xx}u + u_x^2)h_x + h_{xx}(u_t + 3u_x u) + h_{xxx}u^2.
\end{aligned}
$$

Заметим, что приведённые выражения содержат слагаемые с частными производными по времени. Подставляя R_1, R_2, R_{1x}, R_{2x} в систему (1), после тождественных преобразований получим подробный вид системы уравнений Грина — Нагди:

$$
\begin{gathered}
H_t + H_x u + H u_x = 0,\\
u_{txx} + \frac{3H_x}{H}u_{tx} - \frac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x H_x - \frac{H}{2}h_{xx}\right)u_t =\\
= -u_{xxx}u + \left(u_x - \frac{3H_x}{H}u\right)u_{xx} - \frac{3}{2H}(3h_{xx}uu_x + h_{xxx}u^2) + \frac{3}{H^2}uu_x +\\
+ \frac{3}{H^2}(h_x - H_x)(h_x uu_x + h_{xx}u^2 - Hu_x^2 - g).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Для системы (2) задаются начальные условия

$$
H(t_0, x, y) = H_0(x), \quad u(t_0, x, y) = u_0(x). \tag{3}
$$

Решение задачи (2)–(3) не является единственным, так как при $t = t_0$ и подстановке начальных условий (3) во второе уравнение системы (2) для выводящих производных $u_t|_{t=t_0} = u_1(x)$ получается система дифференциальных уравнений по x второго порядка

$$
u_{1xx} + \frac{3H_{0x}}{H}u_{1x} - \frac{3}{H_0^2}\left(1 + h_x^2 - h_x H_{0x} - \frac{H_0}{2}h_{xx}\right)u_1 = F(x).
$$

Здесь $F(x)$ — функция, известным образом вычисляемая с помощью условий (3).

Для получения единственного решения задачи (2)–(3) необходимо задать дополнительные условия. В частности, такими условиями могут быть

$$u(t, x_{00}) = u^0(t), \quad u_x(t, x_{00}) = u^1(t). \tag{4}$$

Также предполагается, что условия (3), (4) — согласованы

$$u_0(x_{00}) = u^0(t_0), \quad u_{0x}(x_{00}) = u^1(t_0).$$

Функции $u_0(x)$, $H_0(x)$, $h(x)$, $u^0(t)$, $u^1(t)$ будут предполагаться аналитическими в окрестности точек $x = x_{00}$ и $t = t_0$ соответственно.

В данной работе не рассматривается выход волны на берег, поэтому предполагается, что в момент времени $t = t_0$ точка $x = x_{00}$ не лежит на границе уреза, т. е. исследуется так называемый невырожденный случай:

$$H_0\ (x_{00}) \neq 0. \tag{5}$$

При этих предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача (2)–(4) имеет единственное локально-аналитическое решение.*

Доказательство теоремы проведём по методике [4, 8].

Введём новые неизвестные функции $R = H_x$, $v = u_x$, $w = v_x$, и система (2) перепишется в виде

$$\begin{gathered}
R_t + R_x u = -2Rv - Hw,\\
H_t = -Ru - Hv,\\
w_t + \frac{3R}{H}v_t - \frac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R - \frac{H}{2}h_{xx}\right)u_t + uw_x =\\
= \left(v - \frac{3H_x}{H}u\right)w - \frac{3}{2H}(3h_{xx}uv + h_{xxx}u^2) + \frac{3}{H^2}uv +\\
+\frac{3}{H^2}(h_x - R)(h_x uv + h_{xx}u^2 - Hv^2 - g),\\
0 \cdot u_t + u_x = v,\\
0 \cdot v_t + v_x = w.
\end{gathered} \tag{6}$$

Для системы (6) задаются начальные условия

$$\begin{gathered}
R(t_0, x) = H_{0x}(x) = R_0(x), \quad H(t_0, x) = H_0(x), \quad u(t_0, x) = u_0(x),\\
v(t_0, x) = u_{0x}(x) = v_0(x), \quad w(t_0, x) = u_{0xx}(x) = w_0(x).
\end{gathered} \tag{7}$$

Для приведения системы (6) к стандартному виду [4] введём дополнительно две новых неизвестных функции $U = u_t$, $V = v_t$. Тогда система (6) перепишется в виде

$$\begin{gathered}
R_t + R_x u = -2Rv - Hw,\\
H_t = -Ru - Hv,\\
w_t + uw_x = -\frac{3R}{H}V + \frac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R - \frac{H}{2}h_{xx}\right)U + P,
\end{gathered}$$

$$u_t = U, \quad v_t = V,$$
$$0 \cdot U_t + U_x = V,$$
$$0 \cdot V_t + V_x + uw_x = -\frac{3R}{H}V + \frac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R - \frac{H}{2}h_{xx}\right)U + P, \tag{8}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{A}(R,H,w,u,v,U,V)\mathbf{V}_t + \mathbf{B}(R,H,w,u,v,U,V)\mathbf{V}_x = \mathbf{C}(R,H,w,u,v,U,V),$$

где

$$\mathbf{V} = \{R,H,w,u,v,U,V\},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} u&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&u&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&u&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2Ru - Hw \\ -Ru - Hv \\ \dfrac{3R}{H}V + \dfrac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R - \dfrac{H}{2}h_{xx}\right)U + P \\ U \\ V \\ V \\ \dfrac{3R}{H}V + \dfrac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R - \dfrac{H}{2}h_{xx}\right)U + P \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$P = \left(v - \frac{3H_x}{H}u\right)w - \frac{3}{2H}(3h_{xx}uv + h_{xxx}u^2) + \frac{3}{H^2}uv +$$
$$+\frac{3}{H^2}(h_x - R)(h_x uv + h_{xx}u^2 - Hv^2 - g).$$

Для системы (8) необходимо задать начальные условия

$$H(t_0,x) = H_0(x), \quad R(t_0,x) = H_{0x}(x), \quad u(t_0,x) = u_0(x),$$
$$v(t_0,x) = u_{0x}(x), \quad w(t_0,x) = u_{0xx}(x), \quad U(t_0,x) = u_1(x),$$
$$V(t_0,x) = v_1(x), \tag{9}$$

где функции u_1, v_1 пока не найдены. Для их определения проведём следующие вспомогательные построения.

Последние два уравнения системы (6) продифференцируем по t и, подставляя w_t из третьего уравнения, получим

$$u_{tx} = v_t, \quad v_{tx} = -\frac{3R}{H}v_t + \frac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R - \frac{H}{2}h_{xx}\right)u_t - uw_x + P. \tag{10}$$

Положив в системе (10) $t = t_0$, будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_{1x} = v_1, \quad v_{1x} = -\frac{3R_0}{H_0}v_1 + \frac{3}{H_0^2}\left(1 + h_x^2 - h_x R_0 - \frac{H_0}{2}h_{xx}\right)u_1 - u_0 w_{0x} + P_0. \tag{11}$$

Чтобы получить начальные условия для системы (11), необходимо условия (4) продифференцировать по t и принять $t = t_0$:

$$u_1(x_{00}) = u_t^0(t_0), \quad v_1(x_{00}) = u_t^1(t_0). \tag{12}$$

По теореме Коши задача (11)–(12) имеет единственное аналитическое решение [9] и, следовательно, функции u_1, v_1 найдены. Таким образом, для системы (8) поставлены начальные условия (9) и граничные условия (4).

Задача (8), (9) является характеристической, поскольку определитель матрицы $\mathbf{A}$ равен нулю. Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен пяти — две нижние строки состоят из нулей, а верхний минор размерности 5×5 равен единице. Поэтому поверхность $t = t_0$ является характеристикой кратности 2 и для построения единственного решения необходимо задать два дополнительных условия [4]. Этими условиями являются (4).

В матрице $\mathbf{A}$ два правых столбца и две нижние строки состоят из нулей, а минор размерности 2×2, стоящий в нижнем углу матрицы $\mathbf{B}$, отличен от нуля. Следовательно, задача (4), (10), (11) является характеристической задачей Коши стандартного вида [4], в силу чего для неё справедлив аналог теоремы Ковалевской [4].

Таким образом, теорема доказана.

Аналитическое по всем переменным решение задачи (2)–(4) представим в виде сходящегося ряда по степеням $t - t_0$:

$$\mathbf{F}(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}_k(x)\frac{(t - t_0)^k}{k!}, \quad \mathbf{F} = \{H, u\}. \tag{13}$$

В системе (2) примем $t = t_0$ и, учитывая (3), будем иметь

$$H_1 = -H_{0x}u_0 - H_0 u_{ox}, \quad u_{1xx} + \frac{3H_{0x}}{H_0}u_{1x} - \frac{3}{H_0^2}\left(1 + h_x^2 - h_x H_{0x} - \frac{H_0}{2}h_{xx}\right)u_1 = G_1(x). \tag{14}$$

Здесь

$$G_1(x) = -u_{0xxx}u_0 + \left(u_{0x} - \frac{3H_{0x}}{H_0}u_0\right)u_{0xx} - \frac{3}{2H_0}(3h_{xx}u_0u_{0x} + h_{xxx}u_0^2) +$$

$$+\frac{3}{H_0^2}u_0u_{0x} + \frac{3}{H_0^2}(h_x - H_{0x})(h_x u_0 u_{0x} + h_{xx}u_0^2 - H_0 u_{0x}^2 - g) -$$

известная функция, вычисляемая с помощью начальных условий (3).

Чтобы получить остальные коэффициенты ряда (13), продифференцируем систему (2) $n-1$ раз по t, положим $t = t_0$, и с учётом (3) имеем

$$H_n = -\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(H_{kx}u_{n-k-1} + H_n u_{(n-k-1)x}\right),$$

$$u_{nxx} + \frac{3H_{0x}}{H_0} u_{nx} - \frac{3}{H_0^2}\left(1 + h_x^2 - h_x H_{0x} - \frac{H_0}{2} h_{xx}\right) u_n = G_n(x), \qquad (15)$$

где $G_n(x)$ — функция, вычисляемая с помощью начальных условий (3) и уже найденных $\mathbf{F}_l,\ 0 \le l < n$. Её вид не приводится ввиду громоздкости.

Замечание. Все коэффициенты ряда (13) $u_n(x)$ являются решениями линейных неоднородных уравнений. Причем однородные уравнения для всех коэффициентов одинаковые, не зависят от $u_0(x)$ и имеют вид

$$U'' + \frac{3H_{0x}}{H_0} U' - \frac{3}{H_0^2}\left(1 + h_x^2 - h_x H_{0x} - \frac{H_0}{2} h_{xx}\right) U = 0.$$

Начальные условия для дифференциальных уравнений систем (14), (15) получаются, если функции $u^0(t)$, $u^1(t)$ из условий (4) разложить в ряд по степеням $t - t_0$.

Таким образом, в виде ряда (13) для задачи (2)–(4) построено единственное аналитическое решение.

2. Построение точных решений начально-краевой задачи с различными граничными условиями

Рассмотрим несколько частных случаев решения задачи (2)–(4).

Пример 1.

Предположим, что дно горизонтально: $-h(x) = h_{00}$. В этом случае система уравнений (2) имеет вид

$$H_t + H_x u + H u_x = 0,$$

$$u_{txx} + \frac{3H_x}{H} u_{tx} - \frac{3}{H^2} u_t = -u u_{xxx} + \left(u_x - \frac{3H_x}{H} u\right) u_{xx} + \frac{3}{H^2} u u_x + \frac{3H_x}{H^2}(H u_x^2 + g). \qquad (16)$$

Предположим, что в начальный момент времени жидкость покоится и поверхность воды горизонтальна:

$$u(t_0, x) = u_0(x) = 0, \quad H(t_0, x) = H_0(x) = H_{00} = h_{00}. \qquad (17)$$

Однородное уравнение для всех u_n будет иметь вид

$$U_{nxx} - \frac{3}{H_{00}^2} U_n = 0.$$

Интегрируя его, получим

$$U_n = C_{1n} e^{\frac{\sqrt{3}}{H_{00}} x} + C_{2n} e^{\frac{-\sqrt{3}}{H_{00}} x}.$$

Если ввести обозначения $m = \dfrac{\sqrt{3}}{H_{00}}$, то

$$U_n = C_{1n} e^{mx} + C_{2n} e^{-mx}.$$

Для коэффициентов ряда (13) получим следующие уравнения:

$$H_n = -\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (H_{kx} u_{n-k-1} + H_k u_{(n-k-1)x}), \quad u_{nxx} - m^2 u_n = G_n(x). \qquad (18)$$

Интегрируя второе уравнение системы (18), будем иметь

$$u_n = C_{1n}e^{mx} + C_{2n}e^{-mx} + \frac{1}{2m}\left[e^{mx}\int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi)e^{-m\xi}d\xi - e^{-mx}\int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi)e^{m\xi}d\xi\right]. \qquad (19)$$

С помощью этих коэффициентов строится весь бесконечный ряд.

Используя условия (17) и учитывая $H_1 = 0$, $H_2 = -H_0u_{1x}$, вычислим правые части дифференциальных уравнений (18):

$$G_1(x) = 0, \quad G_2(x) = 0,$$
$$G_3(x) = -2u_1u_{1xxx} + 2u_{1x}u_{1xx} + \frac{3}{H_{00}}H_{2x}u_{1x} + \frac{3g}{H_{00}^2}H_{2x}.$$

Далее для задачи (16), (17) рассмотрим три вида граничных условий.

1. Построим решение задачи (16), (17) с граничными условиями

$$u(t, x_{00}) = b(t - t_0), \quad u_x(t, x_{00}) = 0. \qquad (20)$$

Физический смысл этих условий следующий: возмущение течения жидкости происходит в точке $x = x_{00}$ за счёт постоянного увеличения или уменьшения скорости жидкости. При $b > 0$ движение потока жидкости ускоряется, при $b < 0$ — тормозится.

С помощью условий (20) определим начальные условия для дифференциальных уравнений из (18):

$$u_1(x_{00}) = b, \quad u_{1x}(x_{00}) = 0, \quad u_n(x_{00}) = u_{nx}(x_{00}) = 0, \quad n > 1.$$

В этом случае для определения C_{11}, C_{21} получим систему

$$\begin{cases} C_{11}e^{mx_{00}} + C_{21}e^{-mx_{00}} = b, \\ C_{11}e^{mx_{00}} - C_{21}e^{-mx_{00}} = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$C_{11} = \frac{b}{2}e^{-mx_{00}}, \quad C_{21} = \frac{b}{2}e^{mx_{00}}.$$

В результате имеем первые коэффициенты ряда (13)

$$H_1 = 0, \quad u_1 = \frac{b}{2}\left(e^{m(x-x_{00})} + e^{-m(x-x_{00})}\right).$$

Для вторых и третьих коэффициентов ряда (13) получаются следующие формулы:

$$u_2 = 0, \quad H_2 = -\frac{H_{00}bm}{2}\left(e^{m(x-x_{00})} - e^{-m(x-x_{00})}\right), \quad H_3 = 0,$$
$$u_3 = -\frac{b^2}{4}\left[e^{2m(x-x_{00})} - e^{-2m(x-x_{00})} - 2\left(e^{m(x-x_{00})} - e^{-m(x-x_{00})}\right)\right] +$$
$$+\frac{3bg}{4H_{00}}[1 - m(x - x_{00})]\left(e^{m(x-x_{00})} - e^{-m(x-x_{00})}\right).$$

Аналогично определяются коэффициенты ряда (13) $u_n,\ n>3$:

$$u_n = \frac{1}{2m}\left(e^{mx}\int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi)e^{-m\xi}d\xi - e^{-mx}\int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi)e^{m\xi}d\xi\right). \qquad (21)$$

2. Построим решение задачи (16), (17) с граничными условиями

$$u(t,x_{00}) = 0, \quad u_x(t,x_{00}) = b(t-t_0). \qquad (22)$$

Физический смысл этих условий следующий: значение скорости в точке $x = x_{00}$ во все моменты времени удерживается равным нулю, однако происходит изменение скорости вдоль оси Ox. При $b>0$ скорость увеличивается вниз по потоку жидкости, при $b<0$ — вверх по потоку.

Для первых коэффициентов ряда (13) имеем

$$H_1 = 0, \quad H_2 = -H_{00}u_{1x}, \quad u_1 = U_1, \quad u_2 = U_2.$$

С помощью условий (22) определим начальные условия для дифференциальных уравнений из (18):

$$u_1(x_{00}) = 0, \quad u_{1x}(x_{00}) = b, \quad u_n(x_{00}) = u_{nx}(x_{00}) = 0, \quad n>1.$$

Определим $C_{11}, \quad C_{21}$:

$$\begin{cases} C_{11}e^{mx_{00}} + C_{21}e^{-mx_{00}} = 0, \\ C_{11}e^{mx_{00}} - C_{21}e^{-mx_{00}} = \dfrac{b}{m}. \end{cases}$$

В результате имеем

$$C_{11} = \frac{b}{2m}e^{-mx_{00}}, \quad C_{21} = -\frac{b}{2m}e^{mx_{00}},$$

$$u_1 = \frac{b}{2m}(e^{m(x-x_{00})} - e^{-m(x-x_{00})}),$$

$$H_2 = -\frac{H_{00}b}{2}(e^{m(x-x_{00})} + e^{-m(x-x_{00})}).$$

Вычисляя вторые коэффициенты ряда (13), получим

$$u_2 = 0, \qquad H_3 = 0.$$

Третьи коэффициенты ряда (13) имеют вид

$$u_3 = -\frac{b^2}{4m}\left[e^{2m(x-x_{00})} - e^{-2m(x-x_{00})} - 2(e^{m(x-x_{00})} - e^{-m(x-x_{00})})\right] +$$

$$+\frac{3bg}{4mH_{00}}[1-m(x-x_{00})]\left(e^{m(x-x_{00})} - e^{-m(x-x_{00})}\right).$$

Коэффициенты ряда (13) u_n находятся из (21). Следовательно, и в данном случае все коэффициенты ряда можно определить в явном виде.

3. Построим решение задачи (16), (17) с граничными условиями

$$u(t, x_{00}) = \sin(t - t_0), \quad u_x(t, x_{00}) = 0. \tag{23}$$

Физический смысл этих условий следующий: возмущение течения жидкости происходит в точке $x = x_{00}$ за счёт периодического увеличения или уменьшения скорости жидкости. На начальном отрезке времени поток ускоряется, на следующем — тормозится и т. д.

В данном случае первые и вторые коэффициенты ряда (13) совпадают с соответствующими коэффициентами из пункта 1.

С помощью условий (23) определяются произвольные постоянные

$$\begin{aligned} C_{1n} = C_{2n} = 0, \qquad\qquad & \text{если} \quad n = 2k, \\ C_{1n} = (-1)^k e^{-mx_{00}}, \quad C_{2n} = (-1)^{k+1} e^{mx_{00}}, \quad & \text{если} \quad n = 2k+1. \end{aligned}$$

Тогда для коэффициентов u_n ряда (13) получаются формулы

$$u_{2k} = \frac{1}{2m}\left[e^{mx} \int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi) e^{-m\xi} d\xi - e^{-mx} \int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi) e^{m\xi} d\xi \right],$$

$$u_{2k+1} = (-1)^{k+1} e^{m(x-x_{00})} + (-1)^{k+1} e^{-m(x-x_{00})} +$$

$$+ \frac{1}{2m} e^{mx} \int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi) e^{-m\xi} d\xi - \frac{1}{2m} e^{-mx} \int\limits_{x_{00}}^{x} G_n(\xi) e^{m\xi} d\xi.$$

Анализ структуры коэффициентов ряда (13) показал, что во всех трёх рассмотренных случаях справедлива следующая лемма.

Лемма. *Коэффициенты ряда (13) имеют вид $P_n\ (x, e^{mx}, e^{-mx})$, где P_n являются многочленами от указанных аргументов, степени которых не превышают $A \cdot n$,* $A = \mathrm{const}$.

Доказательство леммы аналогично соответствующему доказательству из [7] и проводится индукцией по n. Сначала доказывается, что $G_n(x)$ обладают нужной структурой, а затем непосредственным интегрированием выясняется, что $\mathbf{F}_n\ (x)$ обладают указанной структурой.

Пример 2.

Предположим, что дно — прямой откос: $-h(x) = d + ax$. В этом случае система уравнений (2) имеет вид

$$H_t + H_x u + H u_x = 0,$$

$$u_{txx} + \frac{3H_x}{H} u_{tx} - \frac{3}{H^2}(1 + a^2 + aH_x) u_t = -u_{xxx} u + \left(u_x + \frac{3H_x}{H} u \right) u_{xx} +$$

$$+ \frac{3}{H^2} u u_x + \frac{3}{H^2}(a + H_x)(a u u_x + H u_x^2 + g). \tag{24}$$

Предположим, что в начальный момент времени жидкость покоилась и поверхность воды горизонтальна:

$$u(t_0, x) = u_0(x) = 0, \quad H(t_0, x) = H_0(x) = d + ax. \tag{25}$$

Однородное уравнение для всех u_n будет иметь вид

$$(d+ax)^2U_n'' + 3a(d+ax)U_n' - 3(1+2a^2)U_n = 0. \tag{26}$$

Если ввести новую независимую переменную $y = d + ax$, то получим уравнение Бесселя

$$y^2\frac{d^2U_n}{dy^2} + 3y\frac{dU_n}{dy} + \lambda U_n = 0,$$

где $\lambda = -3(1+2a^2)/a^2$. Решение его имеет вид [9]

$$U_n = C_{1n}y^{-1+\frac{\mu}{2}} + C_{2n}y^{-1-\frac{\mu}{2}},$$

где $\mu = 2\sqrt{1-\lambda} = 2\sqrt{7a^2+3}/a \neq 0$.

Для коэффициентов ряда (13) в этом частном случае получим следующие уравнения:

$$H_n = -\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (H_{kx}u_{n-k-1} + H_k u_{(n-k-1)x}),$$

$$u_n'' + \frac{3a}{(d+ax)}u_n' - \frac{3(1+2a^2)}{(d+ax)^2}u_n = G_n(x). \tag{27}$$

Общее решение второго уравнения системы (27) имеет вид [9]

$$u_n = C_{1n}(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}} + C_{2n}(d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left[(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2-\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi \; -(d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2+\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi\right]. \tag{28}$$

С помощью условий (25) вычислим правые части дифференциальных уравнений (27):

$$G_1(x) = \frac{6ag}{H_0^2}, \quad G_2(x) = 0,$$

$$G_3(x) = -2u_1u_{1xxx} + 2\left(u_{1x} + \frac{3a}{H_0}u_1\right)u_{1xx} - \frac{3a}{H_0^2}H_2u_{1x} + \frac{3a}{H_0^2}H_{2x}u_1 + \frac{3}{H_0}H_{2x}u_{1x} -$$
$$-\frac{12ag}{H_0^3}H_2 + \frac{3g}{H_0^2}H_{2x} + H_0u_{1x}^2 + \frac{6}{H_0^3}H_2u_1.$$

Начальные коэффициенты ряда (13) следующие:

$$H_0 = d + ax, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = -au_{1x},$$

$$u_1 = C_{11}(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}} + C_{21}(d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}} +$$

$$+\frac{12g}{\mu}\left(\frac{1}{2-\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}}\right] - \frac{1}{2+\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}}\right]\right).$$

Для граничных условий (20) постоянные C_{11}, C_{21} определяются как решение системы

$$\begin{cases} C_{11}(d+ax_{00})^{\frac{\mu}{2}} + C_{21}(d+ax_{00})^{-\frac{\mu}{2}} = b(d+ax_{00}), \\ C_{11}\left(-1+\dfrac{\mu}{2}\right)(d+ax_{00})^{\frac{\mu}{2}} + C_{21}\left(-1-\dfrac{\mu}{2}\right)(d+ax_{00})^{-\frac{\mu}{2}} = 0. \end{cases}$$

Напомним, что в настоящей работе не рассматривается случай выхода волны на берег, и поэтому $H_0(x_{00}) = d + ax_{00} \neq 0$. Тогда главный определитель этой алгебраической системы имеет значение $-\mu \neq 0$. В результате получим значения постоянных C_{11}, C_{21} и C_{1n}, C_{2n}:

$$C_{11} = b\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2}\right)(d+ax_{00})^{1-\frac{\mu}{2}},$$
$$C_{21} = b\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2}\right)(d+ax_{00})^{1+\frac{\mu}{2}},$$
$$C_{1n} = C_{2n} = 0, \quad n > 1.$$

Окончательно коэффициенты ряда (13) в случае граничных условий (20) имеют вид

$$u_1 = b\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}} + b\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}} +$$
$$+\frac{12g}{\mu}\left(\frac{1}{2-\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}}\right] - \frac{1}{2+\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}}\right]\right),$$
$$u_2 = 0,$$
$$u_n = \frac{1}{\mu}\left[(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2-\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi - \right.$$
$$\left. -(d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2+\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi\right], \quad n > 2.$$

Для граничных условий (22) получаются следующие значения постоянных:

$$C_{11} = \frac{b}{\mu}(d+ax_{00})^{2-\frac{\mu}{2}},$$
$$C_{21} = -\frac{b}{\mu}(d+ax_{00})^{2+\frac{\mu}{2}},$$
$$C_{1n} = C_{2n} = 0, \quad n > 1.$$

Коэффициенты ряда (13) в случае граничных условий (22) имеют вид

$$u_1 = \frac{b}{\mu}(d + ax_{00})\left[\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}} - \left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}}\right] +$$

$$+\frac{12g}{\mu}\left(\frac{1}{2-\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}}\right] - \frac{1}{2+\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}}\right]\right), \quad u_2 = 0,$$

$$u_n = \frac{1}{\mu}\left[(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2-\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. -(d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2+\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi\right], \quad n > 2.$$

Для граничных условий (23) имеем:
при $n = 2k-1$

$$C_{1n} = (-1)^{k+1}\frac{(2+\mu)}{2\mu}(d+ax_{00})^{1-\frac{\mu}{2}},$$
$$C_{2n} = (-1)^{k}\frac{(2-\mu)}{2\mu}(d+ax_{00})^{1+\frac{\mu}{2}},$$

при $n = 2k$

$$C_{1n} = C_{2n} = 0.$$

Коэффициенты ряда (13) в случае граничных условий (23) следующие:

$$u_1 = \left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}} + \left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}} +$$

$$+\frac{12g}{\mu}\left(\frac{1}{2-\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}}\right] - \frac{1}{2+\mu}\left[1-\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}}\right]\right), \quad u_2 = 0,$$

$$u_{2k} = \frac{1}{\mu}\left[(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2-\frac{\mu}{2}}G_{2k}(\xi)d\xi - (d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(H_{00}+a\xi)^{2+\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi\right],$$

$$u_{2k+1} = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1+\frac{\mu}{2}} + (-1)^{k}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d+ax}{d+ax_{00}}\right)^{-1-\frac{\mu}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left[(d+ax)^{-1+\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2-\frac{\mu}{2}}G_{2k}(\xi)d\xi - (d+ax)^{-1-\frac{\mu}{2}}\int\limits_{x_{00}}^{x}(d+a\xi)^{2+\frac{\mu}{2}}G_n(\xi)d\xi\right].$$

Выводы

1. В работе доказаны теоремы существования и единственности решения различных начально-краевых задач, которые для системы Грина — Нагди являются аналогом характеристической задачи Коши.

2. В виде бесконечных сходящихся рядов построены точные решения начально-краевой задачи с различными граничными условиями. Начальные отрезки этих рядов могут быть использованы для тестирования численных методик при моделировании длинных волн.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.

[2] Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 394 с.

[3] Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.

[4] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

[5] Баутин С.П., Дерябин С.Л., Соммер А.Ф., Хакимзянов Г.С. Исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 6. С. 19–41.

[6] Bautin S.P., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N. Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline // Rus. J. of Numerical Analysis and Math. Modeling. 2011. Vol. 26, No. 4. P. 353–377.

[7] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.

[8] Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.

[9] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Поступила в редакцию 27 декабря 2012 г.,
с доработки — 8 апреля 2013 г.