

Численное моделирование течений вязкого теплопроводного газа в канале*

В. В. ШАЙДУРОВ^{1,2}, Г. И. ЩЕПАНОВСКАЯ¹, М. В. ЯКУБОВИЧ¹

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

²Университет Бейхан, Пекин, Китай

e-mail: shaidurov04@gmail.com, gi@icm.krasn.ru

Предложен алгоритм численного решения уравнений Навье—Стокса для двумерного движения вязкого теплопроводного газа. Дискретизация уравнений проводится комбинацией метода траекторий для субстанциональной производной и метода конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями для остальных слагаемых. Представлены результаты численного исследования структуры сверхзвукового течения в плоском канале в зоне его расширения уступом для широкого диапазона чисел Маха и Рейнольдса. Исследованы поля скоростей и давления, изучена вихревая структура циркуляционного течения в области за уступом.

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, вязкий теплопроводный газ, численное моделирование, метод траекторий, метод конечных элементов.

Введение

Течение жидкости в каналах со скачкообразным расширением сечения встречается во многих технических устройствах и сооружениях. Резкое расширение сечения способно вызвать отрыв потока и существенно изменить его кинематическую структуру. Течение в плоском канале со скачкообразным расширением относится к наиболее простому классу отрывных течений с фиксированной точкой отрыва. Первые расчёты стационарных двумерных ламинарных отрывных течений несжимаемой жидкости в каналах аналитически были получены еще в 1910 г. Блазиусом в виде рядов. В дальнейшем эти расчёты использовались многими исследователями для изучения механизмов отрывных течений и тестирования разностных схем решения уравнений Навье—Стокса. В силу большой практической значимости такие течения изучались теоретически и экспериментально как для ламинарных, так и для турбулентных режимов движения несжимаемой и сжимаемой жидкости. Во многих работах данного направления рассматриваются течения в каналах с “обратным уступом” [1, 2] или с “внезапным расширением” [3–6]. Экспериментальные данные для этих случаев в плоском канале получены в [1, 3–5], где отмечается образование циркуляционной зоны за уступом. Рядом исследователей для расчётов течений с внезапным расширением были применены уравнения движения в приближении пограничного слоя.

В настоящее время ясно, что при постановке задач расчёта отрывных течений с вихревыми образованиями необходимо использовать не приближённые уравнения пограничного слоя, а полные уравнения Навье—Стокса. Однако применение более сложных

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224а) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект № 18.2).

математических моделей приводит к росту вычислительных затрат. Таким примером являются задачи аэродинамики, которые на начальных этапах исследовались с помощью системы уравнений Эйлера и других приближений, а затем с развитием вычислительной техники — с использованием полной системы уравнений Навье—Стокса. Численное решение уравнений Навье—Стокса и сегодня представляет большие трудности, что обусловлено нелинейностью исходных уравнений, наличием областей больших градиентов и другими особенностями, возникающими при определённых параметрах и режимах газодинамических течений. Как следствие, возникает необходимость создания специальных численных методов решения этих уравнений. Несмотря на то что к настоящему времени разработано много численных алгоритмов и специальных комплексов программ (см. публикации [7–13] и обширную цитируемую в них литературу), проблема создания и применения эффективных численных методов и алгоритмов остаётся актуальной.

Следует отметить, что система двумерных уравнений Навье—Стокса для вязкого теплопроводного газа включает четыре дифференциальных уравнения в частных производных, вытекающих из законов сохранения массы, количества движения и внутренней энергии газа. Предложенная в настоящей работе замена искомым функциям в уравнениях неразрывности и внутренней энергии переводит закон сохранения массы и полной энергии из терминов пространства L_1 в термины гильбертова пространства L_2 . Впоследствии это значительно упрощает обоснование устойчивости и сходимости [14].

В работе для аппроксимации полной (субстанциональной, или лагранжевой) производной по времени в каждом уравнении системы используется метод траекторий, который заключается в аппроксимации этой производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. Под названием метода характеристик, или полулагранжевого метода, он впервые был применён в [15] для уравнения переноса массы. Далее под названием модифицированного метода характеристик он неоднократно использовался для решения уравнений параболического типа (см. работу [16] и цитированную в ней литературу). Поскольку в газовой динамике под характеристиками имеются в виду совсем другие объекты, то мы применяем более подходящее название — метод траекторий. Дискретизация по пространству остальных слагаемых уравнений Навье—Стокса на каждом временном слое проводится методом конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями и применением простых квадратурных формул. Для решения систем алгебраических уравнений используется метод Якоби с улучшенным начальным приближением внутри внешних итераций по нелинейности.

Как следует из тестовых расчётов [10], модификация уравнений Навье—Стокса обеспечивает повышение точности приближённого решения по сравнению с погрешностью для немодифицированных уравнений. Вместе с тем применение комбинации методов траекторий и конечных элементов позволяет построить алгоритм, довольно эффективный с вычислительной точки зрения.

1. Постановка задачи и исходные уравнения

Рассмотрим двумерное ламинарное течение газа в плоском канале с расширением в виде уступа на нижней стенке канала при сверхзвуковой скорости потока на входе. Конфигурация расчётной области представлена на рис. 1. Начало введённой системы координат находится в левом нижнем углу в точке A . Ширина канала в левом входном сечении

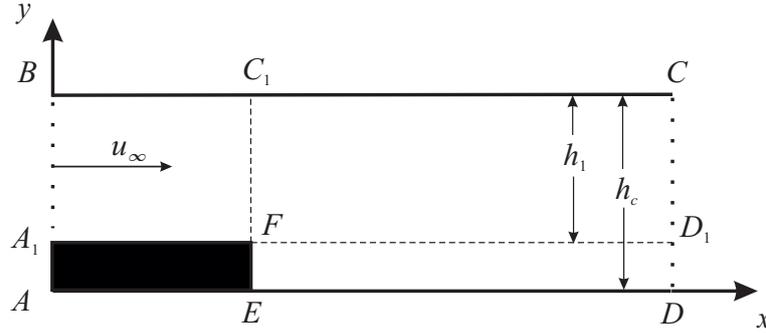


Рис. 1. Канал с уступом

имеет размер h_1 , в правом выходном — размер h_c . Высота уступа FE — $b = h_c - h_1$, длина уступа составляет c . Левая и правая границы расчётной области A_1B и CD считаются достаточно удалёнными от сечения C_1FE , поэтому на них можно принять условия, отвечающие невозмущённому и установившемуся течению соответственно.

Для описания движения газа используем нестационарные уравнения Навье — Стокса без упрощающих предположений. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала CD , за масштаб плотности — плотность в набегающем потоке ρ_∞ , за масштаб скорости — скорость потока на входе в канал u_∞ , за масштаб времени — величина h_c/u_∞ , за масштабы давления, температуры и внутренней энергии принимаются величины из условия совершенного газа.

Выпишем дифференциальные уравнения двумерного вязкого теплопроводного газа в виде безразмерных уравнений неразрывности, количества движения и внутренней энергии

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi. \quad (4)$$

Здесь $d(\cdot)/dt$ — субстанциональная, или полная, производная, т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (5)$$

ρ — плотность; u и v — проекции вектора скорости на оси x и y ; $P = (\gamma - 1)\rho e$ — давление; $\mu = (\gamma(\gamma - 1)M^2 e)^\omega$ — динамический коэффициент вязкости; e — внутренняя энергия. Компоненты тензора напряжений τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} , проекции теплового потока q_x , q_y и диссипативная функция Φ выражаются следующим образом:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3\text{Re}} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3\text{Re}} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$q_x = -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial y},$$

$$\Phi = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где Re — число Рейнольдса, Pr — число Прандтля, $\gamma = 1.4$.

Для завершения постановки задачи зададим начальные и краевые условия. Пусть газ начинает движение слева направо из состояния покоя внутри области, так что $\rho(0, x, y) = 1$, $u(0, x, y) = 0$, $v(0, x, y) = 0$. Внутренняя энергия для совершенного газа равна $e(0, x, y) = (\gamma(\gamma - 1)M^2)^{-1}$. На входной границе A_1B на временном интервале $t \in (0, t_{\text{fin}})$ задаются следующие параметры потока: $\rho|_{A_1B} = 1$, $e|_{A_1B} = (\gamma(\gamma - 1)M^2)^{-1}$, $v|_{A_1B} = 0$. Пусть $b_1 = b/h_c$ — безразмерная высота уступа, тогда профиль скорости $u(t, 0, y)$ на границе A_1B задается в виде

$$u(t, 0, y) = \begin{cases} (b_1 + 2a - y)(y - b_1)/a^2, & y \in (b_1, b_1 + a], \\ 1, & y \in (b_1 + a, 1 - a), \\ (1 - 2a - y)(y - 1)/a^2, & y \in [1 - a, 1), \end{cases} \quad (7)$$

где a — свободный параметр, который в последующих расчётах принимался равным 0.1. Выбранный профиль предназначен для обеспечения непрерывности функции $u(t, x, y)$ в точках A_1 и B . В противном случае не только отсутствует сходимость, но и проявляются паразитические осцилляции за счёт разностного дифференцирования по пространству в окрестностях этих точек. Что касается скачка между нулевыми начальными условиями и значениями в (7) при $t > 0$, то используемая монотонная аппроксимация производной по времени приводит к быстрому сглаживанию разрыва со временем.

На неподвижных твёрдых стенках выполняется условие прилипания $u|_{\Gamma_s} = 0$, $v|_{\Gamma_s} = 0$, а также условие тепловой изоляции, т. е. равенство нулю производной от внутренней энергии по нормали к твёрдой стенке $\partial e / \partial n|_{\Gamma_s}$, где $\Gamma_s = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$ — твёрдая граница. На выходе из канала в сечении CD для функций u, v, e принимаются нулевые условия Неймана, для ρ нет необходимости ставить здесь дополнительные условия.

2. Редукция исходных уравнений

Преобразуем уравнения (1) и (4) к новому виду. Для этого, учитывая неотрицательность плотности и внутренней энергии, введём функции

$$\rho = \sigma^2, \quad (8)$$

$$e = \varepsilon^2. \quad (9)$$

Произведём замену (8) в уравнении неразрывности (1) и после сокращения на 2σ получим

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (10)$$

Аналогично поступим в отношении уравнения внутренней энергии (4): произведём замену (9) в (4) и после сокращения на 2ε получим

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\frac{P}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \Phi. \quad (11)$$

Используем (9) также в выражениях для теплового потока q_x , q_y из (6) и возьмём производные по x и y ; в итоге получим

$$q_x = -\frac{2\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{2\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\frac{2\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\mu \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = -\frac{2\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\mu \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right). \quad (14)$$

С учетом (13), (14) и выражения для диссипативной функции Φ из (6) уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \\ & = -\frac{P}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Замечание. В рассматриваемой задаче внутренняя энергия положительна и больше единицы по отношению к её невозмущённой величине. Поэтому множитель $1/\varepsilon$ не может вызвать сингулярность ε “вблизи нуля” и “гасит” возможный рост давления как ε^2 . Для совершенного газа, как следует из формулы Сазерленда, динамический коэффициент вязкости является степенной функцией от внутренней энергии, в силу чего аналогичные рассуждения справедливы для μ/ε .

Итак, далее будем решать систему уравнений, преобразованную к следующему виду:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \\ & = -\frac{P}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Эту систему замыкают алгебраические соотношения для давления и динамического коэффициента вязкости совершенного газа $P = P(\sigma, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\sigma, \varepsilon)$.

3. Метод траекторий

В качестве области определения задачи рассмотрим многоугольник Ω , ограниченный замкнутой ломаной $BCDEFA_1B$ с границей Γ , состоящей из шести сегментов:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(x, y) : x \in (0.0, 10.0], y = 1.0\}; \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) : x = 10.0, y \in (0.0, 1.0)\}; \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) : x \in [1.0, 10.0], y = 0.0\}; \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) : x = 1.0, y \in (0.0, 0.25)\}; \\ \Gamma_5 &= \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 0.25\}; \\ \Gamma_6 &= \{(x, y) : x = 0.0, y \in [0.25, 1.0]\}.\end{aligned}$$

В целях упрощения изложения примем равномерную квадратную сетку по пространству с координатами $x_i = ih$, $y_j = jh$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n_1$, и шагом $h = 1/n_1$, целиком укладывающимся по горизонтали и вертикали многоугольника Ω . Введённая сетка разбивает расчётную область $\bar{\Omega}$ на квадратные ячейки $\omega_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$. Обозначим множество узлов этой сетки в прямоугольнике $BCDA$ через $S_h = \{s_{i,j} = (x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n_1\}$, и введём сеточную область $\bar{\Omega}_h = S_h \cap \bar{\Omega}$. Обозначим через $\Omega_h = S_h \cap (\Omega \cup \Gamma_2)$ множество “расчётных узлов”, а через $\Gamma_h^D = \bar{\Omega}_h \cap (\Gamma \setminus \Gamma_2)$ — множество граничных узлов “известных значений” для компонент скорости. Обозначим также два участка сеточной границы как $\Gamma_h^{\text{out}} = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_2$ и $\Gamma_h^{\text{in}} = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_6$.

Для аппроксимации субстанциональной производной по времени в каждом уравнении системы (16)–(19) используем метод траекторий, который заключается в аппроксимации данной производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории, обусловленной уравнением (1) [13]. Для этого введём равномерную сетку по времени с шагом $\tau = t_{\text{fin}}/m$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, k = 0, \dots, m\}.$$

Для произвольной функции $\varphi(t, x, y)$ будем использовать обозначения $\varphi^k(x, y) = \varphi(t_k, x, y)$ и $\varphi_{i,j}^k = \varphi(t_k, x_i, y_j)$.

Итак, субстанциональную производную в уравнении (16) заменим разностной производной с первым порядком аппроксимации [15]:

$$\left. \frac{d\sigma_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \frac{\sigma_{i,j}^{k+1} - \sigma^k(X_i^k, Y_j^k)}{\tau}, \quad (20)$$

где $X_i^k = x(t_k)$, $Y_j^k = y(t_k)$ — координаты траектории в момент времени $t = t_k$, которая при $t = t_{k+1}$ проходит через узел (x_i, y_j) . В принципе для определения (X_i^k, Y_j^k) необходимо решить обратную по времени следующую задачу об этой траектории на отрезке $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = v(t, x(t), y(t)), \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_{k+1}) = x_i, \\ y(t_{k+1}) = y_j. \end{cases}$$

Вместо этого реализуем один шаг по времени явной схемы Эйлера (тоже первого порядка аппроксимации). В итоге получим приближённые значения

$$X_i^k \approx \bar{X}_i^k = x_i - \tau u_{i,j}^{k+1}, \quad Y_j^k \approx \bar{Y}_j^k = y_j - \tau v_{i,j}^{k+1}.$$

Ясно, что в общем случае координаты \bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k не попадут в узел сетки. Поэтому значение $\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ определим путём линейной интерполяции:

$$\begin{aligned}\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k) &= \sigma_{i,j}^k + \frac{\sigma^k(\bar{x}, y_j) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{x} - x_i}(\bar{X}_i^k - x_i) + \frac{\sigma^k(x_i, \bar{y}) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{y} - y_j}(\bar{Y}_j^k - y_j) = \\ &= \sigma_{i,j}^k - \tau u_{i,j}^k \frac{\sigma^k(\bar{x}, y_j) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{x} - x_i} - \tau v_{i,j}^k \frac{\sigma^k(x_i, \bar{y}) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{y} - y_j}.\end{aligned}\quad (21)$$

Координаты \bar{x} и \bar{y} выбираются из соображений монотонности разностной аппроксимации:

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{i-1}, & \text{если } u_{i,j}^k \geq 0, \\ x_{i+1} & \text{иначе,} \end{cases} \quad \bar{y} = \begin{cases} y_{j-1}, & \text{если } v_{i,j}^k \geq 0, \\ y_{j+1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В итоге монотонность (неположительность внедиагональных элементов) выполняется при условии

$$\tau \leq h / (|u_{i,j}^k| + |v_{i,j}^k|) \quad \text{для всех узлов } \bar{\Omega}_h = S_h \cap \bar{\Omega}.\quad (22)$$

Итак, субстанциональные производные в уравнениях (16)–(19) аппроксимируются следующим образом:

$$\left. \frac{d\sigma_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \frac{\sigma_{i,j}^{k+1} - \sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau},\quad (23)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{du_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \rho_{i,j}^{k+1} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau},\quad (24)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{dv_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \rho_{i,j}^{k+1} \frac{v_{i,j}^{k+1} - v^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau},\quad (25)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{d\varepsilon_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \rho_{i,j}^{k+1} \frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1} - \varepsilon^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}.\quad (26)$$

Значения $u^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$, $v^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ и $\varepsilon^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ вычисляются путём линейной интерполяции аналогично формуле (21) для $\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$.

4. Метод конечных элементов

После аппроксимации субстанциональной производной на каждом временном шаге $t = t_{k+1}$, $k = 0, \dots, m-1$, в $\Omega \cup \Gamma_2$ получаются уравнения

$$\frac{\sigma}{\tau} + \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f_1,\quad (27)$$

$$\frac{\rho u}{\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_2,\quad (28)$$

$$\frac{\rho v}{\tau} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_3,\quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho\varepsilon}{\tau} - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \right) \right) = f_4 - \\ & - \frac{P}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (30)$$

с правыми частями f_1, f_2, f_3, f_4 , куда вынесены слагаемые, известные с предыдущего временного слоя.

В предыдущем разделе в явной форме были построены аппроксимации только для узловых точек, а не для всей области $\Omega \cup \Gamma_2$. На самом деле, в методе конечных элементов после использования квадратурных формул аппроксимации в других точках не потребуется.

Для каждого узла $s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h$ введём базисную функцию

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} (1 - |x_i - x|/h)(1 - |y_j - y|/h), & (x, y) \in ([x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]) \cap \bar{\Omega}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (31)$$

которая равна единице в $s_{i,j}$ и нулю во всех остальных узлах $\bar{\Omega}_h$. Будем искать приближённое решение в виде

$$\begin{aligned} \sigma^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} \sigma_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), & u^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} u_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), \\ v^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} v_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), & \varepsilon^h(t, x, y) &= \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} \varepsilon_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y). \end{aligned}$$

Для σ^h, u^h и v^h известны значения на Γ_h^D , а для ε^h известны лишь значения на Γ_h^{in} . Это следует из того, что (естественные) краевые условия Неймана в отличие от (главных) условий Дирихле не ликвидируют степени свободы в соответствующих узлах границы [17].

После стандартного использования метода конечных элементов (Бубнова — Галеркина) с тестовыми функциями вида (31) применим квадратурную формулу трапеций для вычисления интегралов на отрезках, а её декартово произведение — для вычисления интегралов на ячейках $\omega_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$. В результате во внутренних узлах расчётной области $S_h \cap \Omega$ получим следующий сеточный аналог уравнения неразрывности (далее в этом и в следующем разделе у всех функций опущен верхний индекс $k+1$, характеризующий зависимость от времени):

$$\frac{\sigma_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{4h} \sigma_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{4h} \sigma_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) = f_1 \quad \forall s_{i,j} \in S_h \cap \Omega. \quad (32)$$

В приграничных или граничных узлах это и последующие сеточные уравнения для u^h, v^h, ε^h упрощаются за счёт краевых условий или меньшего носителя тестовых функций, например, на границе Γ_h^{out} . В итоге получим большое разнообразие уравнений, из которого ограничимся уравнениями во внутренних узлах, дающими достаточное представление о виде получаемых сеточных уравнений.

Аналогично для u приведём сеточный аналог уравнения количества движения (28) тоже лишь во внутренних узлах $S_h \cap \Omega$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{i,j} u_{i,j}}{\tau} + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} ((u_{i,j} - u_{i-1,j})(\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i,j})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})) + \\
& + \frac{1}{6h^2 \text{Re}} ((v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1})\mu_{i+1,j} - (v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1})\mu_{i-1,j}) + \\
& + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} ((u_{i,j} - u_{i,j-1})(\mu_{i,j-1} + \mu_{i,j}) - (u_{i,j+1} - u_{i,j})(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})) + \\
& + \frac{1}{4h^2 \text{Re}} ((v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1})\mu_{i,j-1} - (v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1})\mu_{i,j+1}) = \\
& = f_2 - \frac{1}{2h} (P_{i+1,j} - P_{i-1,j}) \quad \forall s_{i,j} \in S_h \cap \Omega. \tag{33}
\end{aligned}$$

В узлах сеточной границы Γ_h^{out} в силу условия Неймана данные уравнения несколько упрощаются, а сеточные краевые условия на Γ_h^D вытекают из краевых условий исходной дифференциальной задачи.

Сеточный аналог уравнения (29) для компоненты скорости v во внутренних узлах $S_h \cap \Omega$ получается так же:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{i,j} v_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{4h^2 \text{Re}} ((u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})\mu_{i-1,j} - (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})\mu_{i+1,j}) + \\
& + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} ((v_{i,j} - v_{i-1,j})(\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j}) - (v_{i+1,j} - v_{i,j})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})) + \\
& + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} ((v_{i,j} - v_{i,j-1})(\mu_{i,j-1} + \mu_{i,j}) - (v_{i,j+1} - v_{i,j})(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})) + \\
& + \frac{1}{6h^2 \text{Re}} ((u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1})\mu_{i,j+1} - (u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1})\mu_{i,j-1}) = \\
& = f_3 - \frac{1}{2h} (P_{i,j+1} - P_{i,j-1}) \quad \forall s_{i,j} \in S_h \cap \Omega. \tag{34}
\end{aligned}$$

В узлах сеточной границы Γ_h^{out} в силу условия Неймана эти уравнения выглядят проще, а значения v на Γ_h^D являются нулевыми на основании краевых условий исходной дифференциальной задачи.

Сеточный аналог уравнения энергии (30) во внутренних узлах $S_h \cap \Omega$ получается в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{i,j} \varepsilon_{i,j}}{\tau} - \frac{\gamma}{2h^2 \text{Pr Re}} \frac{\mu_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} ((\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i,j})^2 + (\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i-1,j})^2) - \\
& - \frac{\gamma}{2h^2 \text{Pr Re}} \frac{\mu_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} ((\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j})^2 + (\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i,j-1})^2) + \\
& + \frac{\gamma}{2h^2 \text{Pr Re}} ((\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i-1,j})(\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j}) - (\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i,j})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})) + \\
& + \frac{\gamma}{2h^2 \text{Pr Re}} ((\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i,j-1})(\mu_{i,j-1} + \mu_{i,j}) - (\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j})(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})) = \\
& = f_4 - \frac{1}{4h} \frac{P_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \\
& + \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} ((u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2) + \\
& + \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} ((v_{i,j+1} - v_{i,j})^2 + (v_{i,j} - v_{i,j-1})^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8h^2 \operatorname{Re} \varepsilon_{i,j}} \left[(v_{i+1,j} - v_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j} - v_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j})^2 + \right. \\
& \quad \left. + (v_{i+1,j} - v_{i,j} + u_{i,j} - u_{i,j-1})^2 + (v_{i,j} - v_{i-1,j} + u_{i,j} - u_{i,j-1})^2 \right] + \\
& + \frac{1}{12h^2 \operatorname{Re} \varepsilon_{i,j}} \left[(u_{i+1,j} - u_{i,j} - v_{i,j+1} + v_{i,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j} - v_{i,j+1} + v_{i,j})^2 + \right. \\
& \quad \left. + (u_{i+1,j} - u_{i,j} - v_{i,j} + v_{i,j-1})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j} - v_{i,j} + v_{i,j-1})^2 \right] \quad \forall s_{i,j} \in S_h \cap \Omega. \quad (35)
\end{aligned}$$

Понятно, что в узлах $\overline{\Omega}_h \cap (\Gamma_s \cup \Gamma_2)$ в силу нулевого условия Неймана сеточное уравнение упрощается.

Эти уравнения дополняются краевыми условиями на Γ_h^{in} из условия невозмущённого потока на входе.

5. Системы алгебраических уравнений

Для решения систем алгебраических уравнений используется многосеточный метод с внешними итерациями по нелинейности. После аппроксимации субстанциональной производной и применения метода конечных элементов с квадратурными формулами на каждом временном слое $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, получим системы нелинейных алгебраических уравнений.

Для сеточного аналога уравнения переноса массы система алгебраических уравнений относительно неизвестных σ^{k+1} имеет диагональный вид

$$\alpha_\rho^{i,j} \sigma_{i,j} = F_\rho^{i,j} \quad \forall s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h, \quad (36)$$

где $\alpha_\rho^{i,j}$ — коэффициенты перед неизвестными, возможно, зависящие от других сеточных функций, а $F_\rho^{i,j}$ — значения, известные с предыдущего временного слоя или из краевых условий. После исключения известных краевых значений уравнение (36) в матричном виде принимает вид

$$A_\rho^h \boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{F}_\rho^h, \quad (37)$$

где A_ρ^h — диагональная матрица, $\boldsymbol{\sigma}^h$ и \mathbf{F}_ρ^h — векторы неизвестных и правой части размерности множества Ω_h .

Сеточные аналоги уравнений количества движения в терминах неизвестных значений u^{k+1} и v^{k+1} в узлах сетки Ω_h могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \alpha_u^{i-1,j} u_{i-1,j} + \alpha_u^{i,j-1} u_{i,j-1} + \alpha_u^{i,j} u_{i,j} + \alpha_u^{i,j+1} u_{i,j+1} + \alpha_u^{i+1,j} u_{i+1,j} + \\
& + \beta_u^{i-1,j-1} v_{i-1,j-1} + \beta_u^{i-1,j+1} v_{i-1,j+1} + \beta_u^{i+1,j-1} v_{i+1,j-1} + \beta_u^{i+1,j+1} v_{i+1,j+1} = F_u^{i,j}, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_v^{i-1,j} v_{i-1,j} + \alpha_v^{i,j-1} v_{i,j-1} + \alpha_v^{i,j} v_{i,j} + \alpha_v^{i,j+1} v_{i,j+1} + \alpha_v^{i+1,j} v_{i+1,j} + \\
& + \beta_v^{i-1,j-1} u_{i-1,j-1} + \beta_v^{i-1,j+1} u_{i-1,j+1} + \beta_v^{i+1,j-1} u_{i+1,j-1} + \beta_v^{i+1,j+1} u_{i+1,j+1} = F_v^{i,j}, \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\forall s_{i,j} \in \Omega_h.$$

Здесь α и β с разными индексами — коэффициенты при неизвестных u и v , равные нулю вне сеточной области $\overline{\Omega}_h$ и зависящие нелинейным образом от других неизвестных систем (37), (41), (42) (см. ниже).

Сеточная система нелинейных алгебраических уравнений, соответствующая уравнению внутренней энергии, может быть представлена в виде

$$\alpha_e^{i-1,j} \varepsilon_{i-1,j} + \alpha_e^{i,j-1} \varepsilon_{i,j-1} + \alpha_e^{i,j} \varepsilon_{i,j} + \alpha_e^{i,j+1} \varepsilon_{i,j+1} + \alpha_e^{i+1,j} \varepsilon_{i+1,j} = F_e^{i,j} \quad \forall s_{i,j} \in \overline{\Omega}_h \setminus \Gamma_h^{\text{in}}, \quad (40)$$

где α с разными индексами — коэффициенты при неизвестных, равные нулю вне сеточной области $\overline{\Omega}_h$ и нелинейным образом зависящие от других неизвестных систем (37), (41), (42).

Исключим известные краевые значения и последовательно занумеруем узлы Ω_h в лексикографическом порядке. Соответственно пронумеруются уравнения и неизвестные. В итоге система (33)–(35) примет матричный вид:

$$A_u^h \mathbf{u}^h + B_u^h \mathbf{v}^h = \mathbf{F}_u^h, \quad B_v^h \mathbf{u}^h + A_v^h \mathbf{v}^h = \mathbf{F}_v^h, \quad (41)$$

$$A_e^h \boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{F}_e^h, \quad (42)$$

где A_u^h, A_v^h, A_e^h — пятидиагональные, B_u^h, B_v^h — четырехдиагональные матрицы; $\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h, \boldsymbol{\varepsilon}^h$ и $\mathbf{F}_u^h, \mathbf{F}_v^h, \mathbf{F}_e^h$ — векторы неизвестных и правых частей размерности множества Ω_h . Особенностью как системы (41)–(42), так и её промежуточных линеаризаций является необходимость одновременного использования трёх матричных уравнений во всех видах итераций (итераций Якоби для линеаризованных систем и итераций по нелинейности).

Таким образом, получена вариационно-разностная схема первого порядка аппроксимации по времени и по пространству. Для решения систем линейных алгебраических уравнений на каждом временном слое применялся точечный метод Якоби [18]. Сходимость этого метода и итераций по нелинейности значительно ускоряется при использовании в качестве начального приближения квадратичной экстраполяции значений по времени с двух временных слоев вместо простого переноса значений с предыдущего слоя. Ввиду существенного диагонального преобладания среднее количество итераций, необходимое для сходимости метода Якоби на сетке 1001×101 узлов, составляло не более 10.

6. Расчёт течения газа в канале с различными числами Маха и Рейнольдса

Приведённый алгоритм реализован для сформулированной выше задачи течения газа при сверхзвуковой скорости на входе. В качестве уравнений (5) в расчётах использованы уравнения состояния совершенного газа

$$P = (\gamma - 1)\rho e, \quad T = \gamma(\gamma - 1)M^2 e,$$

зависимость динамического коэффициента вязкости газа представляется формулой Сазерленда

$$\mu = T^\omega.$$

Различные модификации этих уравнений и условия их применения приведены в [13].

Расчёты выполнялись на сетке, содержащей 1001×101 узлов, шаг по пространству $h = 0.01$, шаг по времени $\tau = 0.001$. Газодинамическая постоянная γ , число Рейнольдса Re , число Прандтля Pr , число Маха M и ω имели следующие значения: $\gamma = 1.4$, $Re = 2 \cdot 10^3$ и 10^4 , $Pr = 0.72$, $M = 2$ и 4 , $\omega = 0.8$.

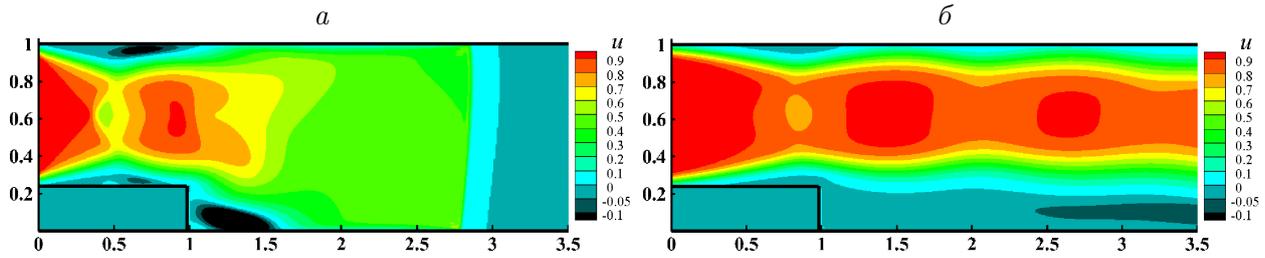


Рис. 2. Продольная составляющая скорости в моменты времени $t = 4$ (а) и $t = 50$ (б)

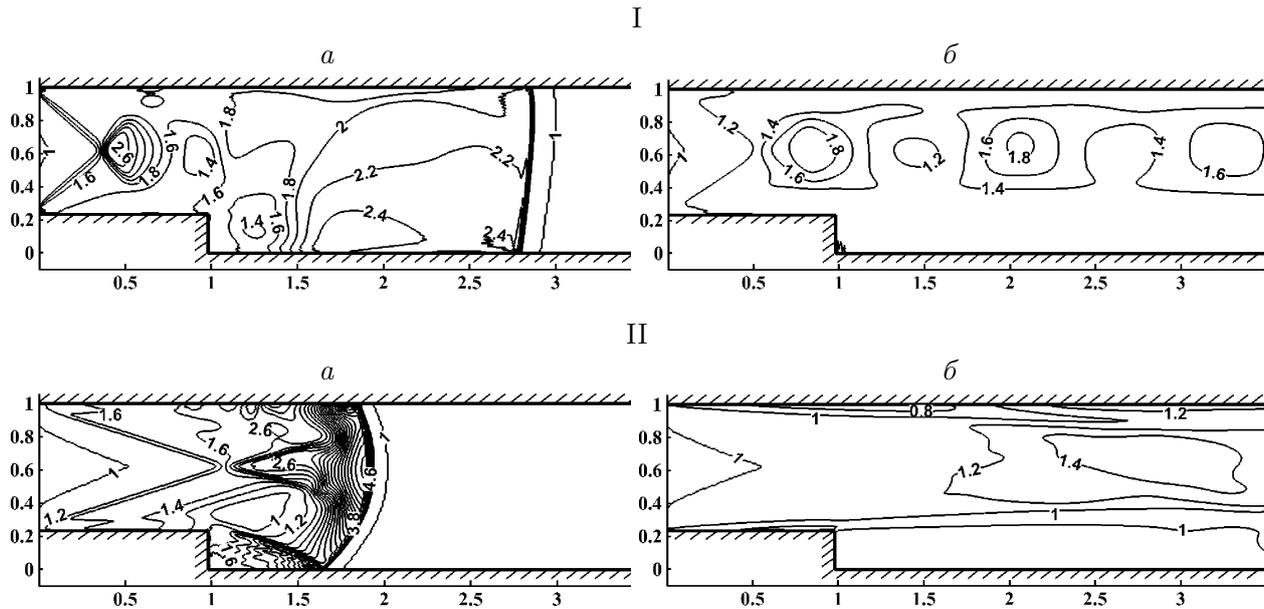


Рис. 3. Изолинии плотности для моментов времени $t = 4$ (а), $t = 50$ (б); I — $M = 2, Re = 2 \cdot 10^3$, II — $M = 4, Re = 10^4$

На рис. 2 показана картина течения в канале для $M = 2, Re = 2 \cdot 10^3$. На рис. 2, а представлена компонента скорости u в момент времени $t = 4$, на рис. 2, б — в момент времени $t = 50$. За уступом происходит формирование вихря с отрицательными значениями скорости. С течением времени вихревая зона увеличивается в направлении потока и за уступом формируется течение со скоростью, близкой к нулевым значениям. Следует отметить, что за характерный размер L принята ширина канала. В данном случае, чтобы точка “примыкания” основного потока к донному течению оставалась в пределах расчётной области [19], длина канала при расчётах равнялась $10L$.

На рис. 3 приведены соответствующие изолинии плотности для тех же моментов времени. Видно, что для $t = 4$ характерны формирование отрывной зоны в районе уступа и присутствие головного скачка. Со временем распределение плотности демонстрирует установление течения.

Таким образом, замена искоемых функций в уравнениях сохранения массы и внутренней энергии привела к меньшей абсолютной погрешности в нормах L_2 и L_∞ , что и раньше было отмечено в одномерном случае [10]. Применение комбинации метода траекторий и метода конечных элементов не требует согласования триангуляций на соседних временных слоях. Это значительно облегчает динамическое разрежение или сгущение

триангуляций по времени для оптимизации вычислительной работы или улучшения аппроксимации в пограничных слоях и ударных волнах. Для решения систем алгебраических уравнений ввиду значительного диагонального преобладания использовался метод Якоби в комбинации с внешними итерациями по нелинейности. Совместное использование методов траекторий и конечных элементов позволило построить вычислительно устойчивый и экономичный алгоритм.

Список литературы

- [1] ARMALY B.F., DURST F., PEREIRA J.C.F., SCHONUNG B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 127. P. 473–496.
- [2] ЕЛИЗАРОВА Т.Г., СОКОЛОВА М.Е., ШЕРЕТОВ Ю.В. Квазигазодинамические уравнения и численное моделирование течений вязкого газа // *Журнал вычисл. математики и матем. физики.* 2005. Т. 45, № 3. С. 545–556.
- [3] CHERDRON W., DURST F., WHITELOW J.H. Asymmetric flow and instabilities in symmetric ducts with sudden expansion // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 84. P. 13–31.
- [4] DURST F., MELLING A., WHITELOW J.H. Low reynolds number flow-over a plane symmetric sudden expansion // *Ibid.* 1974. Vol. 64. P. 111–118.
- [5] FEARN R.M., MULLIN T., CLIFFE K.A. Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion // *Ibid.* 1990. Vol. 211. P. 595–608.
- [6] HAWA T., RUSAK Z. The dynamics of a laminar flow in a symmetric channel with a sudden expansion // *Ibid.* 2001. Vol. 436. P. 283–320.
- [7] BOSNYAKOV S., KURSAKOV I., LYSENKOV A. ET AL. Computational tools for supporting the testing of civil aircraft configurations in wind tunnels // *Progress in Aerospace Sci.* 2008. Vol. 44. P. 67–120.
- [8] КОВЕНЯ В.М., СЛЮНЯЕВ А.Ю. Моделирование сверхзвуковых течений газа в канале // *Вычисл. технологии.* 2007. Т. 12. Спец. выпуск. 4. С. 32–41.
- [9] ОВЕРКАМПФ W.L., TRUCANO T.G. Verification and validation in computational fluid dynamics // *Progress in Aerospace Sci.* 2002. Vol. 38. P. 209–272.
- [10] ШАЙДУРОВ В.В., ЩЕПАНОВСКАЯ Г.И., ЯКУБОВИЧ М.В. Применение метода траекторий и метода конечных элементов в моделировании движения вязкого теплопроводного газа // *Вычисл. методы и программирование.* 2011. Т. 12. С. 275–281.
- [11] VOS J.B., RIZZI A., DARRACQ D., HIRSCHL E.H. Navier—Stokes solvers in European aircraft design // *Progress in Aerospace Sci.* 2002. Vol. 38. P. 601–697.
- [12] ADIGMA — A European Initiative on the Development of Adaptive Higher-Order Variational Methods for Aerospace Appl. Vol. 113. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer, 2010. P. 339–353.
- [13] THE Handbook of Fluid Dynamics / Ed. R.W. Johnson. CRC Press LLC & Springer, 1998.
- [14] УШАКОВА О.А., ШАЙДУРОВ В.В., ЩЕПАНОВСКАЯ Г.И. Метод конечных элементов для уравнений Навье—Стокса в сферической системе координат // *Вестник КрасГУ.* 2006. № 4. 151–156.
- [15] PIRONNEAU O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier—Stokes equations // *Numer. Math.* 1982. Vol. 38. P. 309–332.

- [16] CHEN H., LIN Q., SHAYDUROV V.V., ZHOU J. Error estimates for triangular and tetrahedral finite elements in combination with a trajectory approximation of the first derivatives for advection-diffusion equations // Numer. Analysis and Appl. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 345–362.
- [17] RANNACHER R. Methods for Numerical Flow Simulation. Institute of Appl. Math., Univ. of Heidelberg, Germany, 2007. 58 p.
- [18] ВОЕВОДИН В.В., КУЗНЕЦОВ Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- [19] БАШКИН В.А., ЕГОРОВ И.В., ИВАНОВ Д.В. Торможение сверхзвукового потока в плоских и осесимметричных каналах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 143–152.

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.