

Совместное движение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости под действием термоконцентрационных сил*

М. В. ЕФИМОВА

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

e-mail: efmavi@icm.krasn.ru

Исследовано однонаправленное движение двухслойной системы жидкостей с общей поверхностью раздела в слое, ограниченном твёрдыми стенками. Источником движения являются термоконцентрационные эффекты на поверхности раздела. Найдено решение начально-краевой задачи для определения скорости, температуры и концентрации в слоях. Показано, что в стационарном случае в системе реализуется течение типа течения Куэтта. С ростом времени возмущения скорости и температуры выходят на стационарный режим. Для концентрации это справедливо только в случае, если её продольный градиент равен нулю.

Ключевые слова: начально-краевая задача, преобразование Лапласа, бинарная смесь, термоконцентрационный эффект.

Введение

Конвекция, приводящая к переносу массы, тепла и других физических величин, представляет собой явление, важное как в фундаментальной науке, так и в плане практического применения. При изучении этого явления отдельное внимание уделяется исследованиям термоконцентрационных эффектов, вызывающих конвективные течения. Так, в [1] приведена постановка начально-краевой задачи, описывающей движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей с общей поверхностью раздела. В основном данная монография посвящена исследованию устойчивости соответствующих течений. В работе [2] анализировалось движение двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием перепада давления. Однонаправленное движение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе под действием градиента давления рассмотрено в [3]. В приложениях часто возникают ситуации совместного движения трёх жидкостей, контактирующих по некоторым поверхностям; одна из таких задач изучалась в [4].

В настоящей работе исследуется сопряжённая начально-краевая задача, возникающая при однонаправленном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости с общей поверхностью раздела под действием термоконцентрационных сил.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00283) и проектов № 38, № 116 фундаментальных исследований СО РАН.

1. Постановка задачи

Рассмотрим совместное движение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости с общей поверхностью раздела. Обозначим через Ω_1 область, занятую бинарной смесью, Ω_2 — область с вязкой теплопроводной жидкостью, Γ — поверхность раздела.

Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела зависит от температуры θ и концентрации c , причём для многих жидких сред он хорошо аппроксимируется линейной зависимостью [1]

$$\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \varkappa_1(\theta - \theta_0) - \varkappa_2(c - c_0),$$

где $\sigma_0 = \sigma(\theta_0, c_0)$, $\varkappa_1 > 0$ — температурный коэффициент, \varkappa_2 — концентрационный коэффициент (обычно $\varkappa_2 < 0$, поскольку поверхностное натяжение увеличивается с ростом концентрации).

Будем считать, что в начальный момент времени смесь заполняет слой Ω_1 : $-l_1 < y < 0$, а вязкая жидкость — слой Ω_2 : $0 < y < l_2$. Система находится в покое, и при $t = 0$ во всем пространстве мгновенно создаются поля температур $\theta_j = A_j x$ и концентрации $c_1 = Bx$, где A_j, B — постоянные, $j = 1, 2$. Термоконцентрационный эффект вызывает однонаправленное движение системы, в которой поверхностью раздела останется плоскость $y = 0$. В такой интерпретации решение задачи будем искать в виде

$$u_j = u_j(y, t), \quad \theta_j = A_j x + T_j(y, t), \quad c_1 = Bx + K_1(y, t).$$

Функции u_j, T_j, K_1 можно назвать возмущениями состояния покоя смеси и жидкости.

В данном предположении система уравнений термодиффузионного движения имеет следующий вид:

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}, \tag{1}$$

$$T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - A u_j, \tag{2}$$

$$K_{1t} = d_1 K_{1yy} + \alpha_1 d_1 T_{1yy} - B u_1 \tag{3}$$

при $-l_1 < y < 0$ ($j = 1$), $0 < y < l_2$ ($j = 2$). Здесь ν_j — коэффициент кинематической вязкости, χ_j — коэффициент теплопроводности, d_1 — коэффициент диффузии, α_1 — параметр термодиффузии, индекс y означает дифференцирование по поперечной координате y .

На поверхности раздела выполнены условие равенство скоростей и динамическое условие

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \rho_2 \nu_2 u_{2y}(0, t) - \rho_1 \nu_1 u_{1y}(0, t) = -\varkappa_1 A - \varkappa_2 B \equiv H, \tag{4}$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности в слое Ω_1, Ω_2 соответственно. Условие непрерывности температур и равенства потоков тепла имеет вид

$$k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t), \quad T_1(0, t) = T_2(0, t), \tag{5}$$

здесь k_1, k_2 — коэффициенты теплопроводности в слое Ω_1, Ω_2 соответственно. Ещё одно условие — отсутствие потока вещества через границу раздела

$$K_{1y}(0, t) + \alpha_1 T_{1y}(0, t) = 0. \tag{6}$$

В равенстве (2) $A \equiv A_1 = A_2$ (следствие равенства температур при $y = 0$).

К условиям (4)–(6) необходимо добавить условия на твёрдых стенках $y = -l_1$, $y = l_2$:

$$u_1(-l_1, t) = 0, \quad u_2(l_2, t) = 0 \quad (7)$$

условия прилипания,

$$T_1(-l_1, t) = 0, \quad T_2(l_2, t) = 0 \quad (8)$$

задание нулевых возмущений температуры,

$$(K_{1y} + \alpha_1 T_{1y}) \Big|_{y=-l_1} = 0 \quad (9)$$

отсутствие потока смеси сквозь твердую стенку. Для полной постановки задачи примем начальные условия

$$u_j(y, 0) = 0, \quad T_j(y, 0) = 0, \quad K_1(y, 0) = 0. \quad (10)$$

Все физические характеристики среды предполагаются постоянными и соответствуют средним значениям температуры и концентрации.

Уравнения (1)–(3) с граничными условиями (4)–(10) образуют три последовательно решаемые задачи для функций (u_1, u_2) , (T_1, T_2) , K_1 .

2. Стационарное течение

Предположим, что все параметры, характеризующие течение в слоях, не зависят от времени, тогда начальные условия (10) не учитываются. В этом случае краевая задача (1)–(9) значительно упрощается. Её решение показывает, что в системе реализуется течение типа течения Куэтта и распределение температуры в слоях описывается полиномами третьего порядка

$$u_1^0 = a \left(1 + \frac{y}{l_1} \right), \quad u_2^0 = a \left(1 - \frac{y}{l_2} \right), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T_1^0(y) &= \frac{aA}{\chi_1} \left(\frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} \right) + a_1 y + a_2, \\ T_2^0(y) &= \frac{aA}{\chi_2} \left(-\frac{y^3}{6l_2} + \frac{y^2}{2} \right) + k a_1 y + a_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -\frac{Hl_1}{\mu_2(\mu + l)}, \quad H = -(\alpha_1 A + \alpha_2 B_1), \\ a_1 &= \frac{aAl_2(l^2 - \chi)}{3\chi_1(k + l)}, \quad a_2 = -\frac{aAl_1l_2(kl + \chi)}{3\chi_1(k + l)} \end{aligned}$$

постоянные, найденные из граничных условий. Здесь введены обозначения $l = l_1/l_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$, $k = k_1/k_2$, $\mu = \mu_1/\mu_2$.

Интегрирование уравнения для определения концентрации даёт зависимость

$$K_1^0(y) = \left(\frac{B}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) a \left(\frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} \right) + b_1 y + b_2.$$

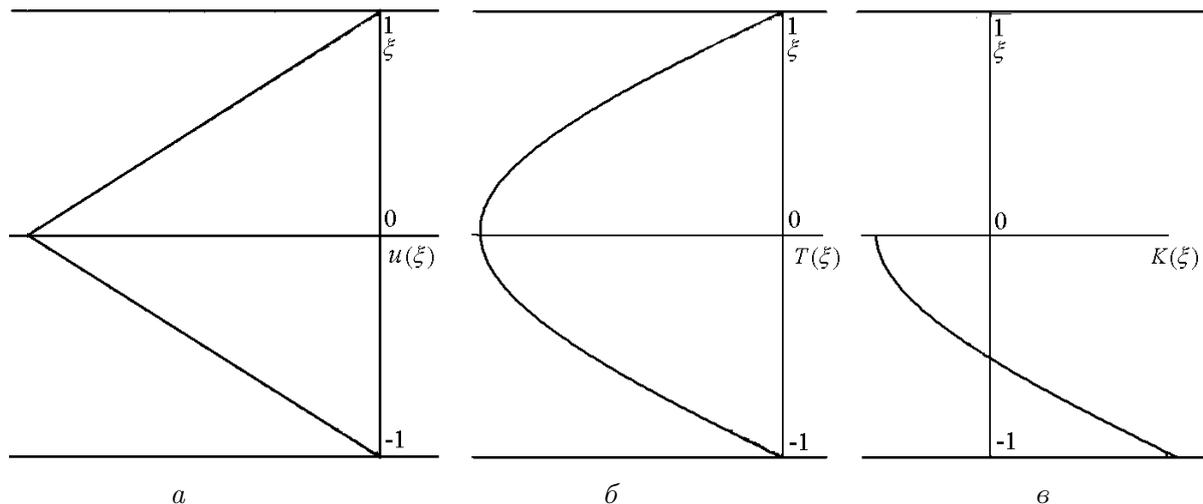


Рис. 1. Стационарные профили скоростей (а), температур (б) и концентрации (в)

Из граничного условия на поверхности раздела определим, что $b_1 = -\alpha_1 a_1$. Граничное условие на твёрдой стенке выполняется только при $B = 0$. Значит, стационарное распределение концентрации в слое имеет место только при отсутствии её градиента в начальный момент времени в направлении движения. При $B \neq 0$ распределение концентрации может быть только нестационарным. Постоянную b_2 определим, если зададим среднюю концентрацию в сечении $x = 0$

$$\int_{-l_1}^0 K_1^0(y) dy = 0.$$

Таким образом, стационарное распределение концентрации ($B = 0$) в слое описывается многочленом третьего порядка

$$K_1^0 = -\frac{\alpha_1 A}{\chi_1} a \left(\frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} \right) - \alpha_1 a_1 y + \frac{\alpha_1 a A l_1^2}{\chi_1} \left(\frac{1}{8} - \frac{l^2 - \chi}{6l(k+l)} \right). \quad (13)$$

Для построения стационарных профилей скоростей, температур и концентрации перейдём к безразмерным переменным, определяемым формулами

$$\xi = \frac{y}{l_j}, \quad \hat{u}_j = -\frac{u_j^0}{a}, \quad \hat{T}_j = \frac{\chi_1}{a A l_1^2} T_j^0, \quad \hat{K}_1 = -\frac{\chi_1}{\alpha_1 A a l_1^2} K_1^0. \quad (14)$$

Стационарное распределение скоростей, температур и концентрации представлено на рис. 1. Для расчётов была выбрана система этанол—вода и бензол с физическими свойствами $\chi = 1.104$, $l = 1$, $\nu = 2.965$, $\rho = 1.104$, $\alpha_1 = 0.26$, $k = 3.082$.

3. Решение нестационарной задачи

Для исследования нестационарных процессов при решении линейных начально-краевых задач в математике, механике и технике хорошо зарекомендовали себя операционные

методы на основе интегрального преобразования Лапласа, которое определяется формулой

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (15)$$

где $\tilde{f}(p)$ — изображение функции $f(t)$, $f(t)$ — оригинал для $\tilde{f}(p)$. Как правило, перевод в область изображений производится по переменной времени.

Основное свойство преобразования Лапласа, используемое далее, заключается в следующем предельном соотношении.

Теорема. Если $f(t)$ является оригиналом и $\tilde{f}(p)$ — изображение $f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{f}(p) = f(0),$$

где $p \rightarrow \infty$ внутри угла $|\arg p| < \pi/2 - \delta$ и $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$; если, кроме того, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{f}(p) = f(\infty),$$

где $p \rightarrow 0$ внутри того же угла.

Доказательство утверждения и условие применимости формулы (15) описано в [5].

3.1. Определение нестационарного поля скоростей

В результате применения преобразования Лапласа к равенствам (1), (4), (7) приходим к краевой задаче для изображений скорости $\tilde{u}_j(y, p)$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1'' - \frac{p}{\nu_1} \tilde{u}_1 &= 0, \quad -l_1 < y < 0, \quad \tilde{u}_1(-l_1, p) = 0, \\ \tilde{u}_2'' - \frac{p}{\nu_2} \tilde{u}_2 &= 0, \quad 0 < y < l_2; \quad \tilde{u}_2(l_2, p) = 0, \\ \tilde{u}_1(0, p) &= \tilde{u}_2(0, p), \quad \mu_2 \tilde{u}_2'(0, p) - \mu_1 \tilde{u}_1'(0, p) = \frac{H}{p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по y . Решение задачи (16) находится в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(y, p) &= -\frac{\sqrt{\nu_2} H}{\mu_2 \sqrt{p^3} W_1(p) \operatorname{ch} \sqrt{p\nu_1^{-1}} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (l_1 + y), \quad -l_1 < y < 0, \\ \tilde{u}_2(y, p) &= -\frac{\sqrt{\nu_2} H \operatorname{th} \sqrt{p\nu_1^{-1}} l_1}{\mu_2 \sqrt{p^3} W_1(p) \operatorname{sh} \sqrt{p\nu_2^{-1}} l_2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - y), \quad 0 < y < l_2, \end{aligned}$$

где

$$W_1(p) = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2.$$

С учётом асимптотических представлений $\operatorname{sh} x \sim x + x^3/6$, $\operatorname{ch} x \sim 1 + x^2/2$ при $x \rightarrow 0$ и равенства $\rho\nu = \mu$ получим

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{u}_1(y, p) = -\frac{Hl_1}{\mu_2(\rho\nu + l)} \left[1 + \frac{y}{l_1} \right] \equiv u_1^0(y), \quad (17)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_2(y, p) = -\frac{Hl_1}{\mu_2(\rho\nu + l)} \left[1 - \frac{y}{l_2} \right] \equiv u_2^0(y). \quad (18)$$

Таким образом, согласно теореме 1, с ростом времени решение задачи (16) выходит на стационарный режим $u_1^0(y)$, $u_2^0(y)$, определяемый равенством (11).

3.2. Определение температурных возмущений

Применение преобразования Лапласа к формулам (2), (5), (8) приводит к краевой задаче для изображений возмущений температур

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1'' - \frac{p}{\chi_1} \tilde{T}_1 &= \frac{A\tilde{u}_1(y, p)}{\chi_1}, \quad -l_1 < y < 0, \\ \tilde{T}_2'' - \frac{p}{\chi_2} \tilde{T}_2 &= \frac{A\tilde{u}_2(y, p)}{\chi_2}, \quad 0 < y < l_2, \\ \tilde{T}_1(0, p) &= \tilde{T}_2(0, p), \quad k\tilde{T}_1'(0, p) = \tilde{T}_2'(0, p), \\ \tilde{T}_1(-l_1, p) &= 0, \quad \tilde{T}_2(l_2, p) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение задачи (19) определяется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(y, p) &= L_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y + L_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y + \\ &+ \frac{A}{\chi_1 \sqrt{p\chi_1^{-1}}} \int_{-l_1}^y \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y - z) \right] dz, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(y, p) &= L_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} y + L_4 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} y + \\ &+ \frac{A}{\chi_2 \sqrt{p\chi_2^{-1}}} \int_0^y \tilde{u}_2(z, p) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (y - z) \right] dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты $L_i = L_i(p)$, $i = \overline{1, 4}$, находятся из граничных условий и задаются формулами

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{G_1(p) - G_2(p)}{W_2(p)}, \quad L_2 = L_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, \quad L_3 = \frac{k}{\sqrt{\chi}} L_1 - G_1, \\ L_4 &= L_2 - \frac{A}{\chi_1 \sqrt{p\chi_1^{-1}}} \int_{-l_1}^0 \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} z dz. \end{aligned} \quad (22)$$

В формулах (22) введены обозначения

$$\begin{aligned} G_1(p) &= -\frac{kA}{\chi_1} \sqrt{\frac{\chi_2}{p}} \int_{-l_1}^0 \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} z dz, \\ G_2(p) &= -\frac{A \operatorname{cth} \sqrt{p\chi_2^{-1}} l_2}{\chi_1 \sqrt{p\chi_1^{-1}}} \int_{-l_1}^0 \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} z dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A}{\chi_2 \sqrt{p\chi_2^{-1}} \operatorname{sh} \sqrt{p\chi_2^{-1}} l_2} \int_0^{l_2} \tilde{u}_2(z, p) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - z) \right] dz, \\
W_2(p) & = \frac{k}{\sqrt{\chi}} + \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Покажем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} T_j(y, t) = T_j^0(y)$. Для этого достаточно вычислить пределы $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{T}_j(y, p)$. В качестве примера приведём расчёты для $j = 1$. С этой целью, используя (22), несколько преобразуем выражение (20):

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1(y, p) & = \frac{G_1(p) - G_2(p)}{W_2(p) \operatorname{ch} \sqrt{p\chi_1^{-1}} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y + l_1) + \\
& + \frac{A}{\chi_1 \sqrt{\chi_1^{-1}} p} \int_{-l_1}^y \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y - z) \right] dz.
\end{aligned} \tag{24}$$

Далее, учитывая равенства (17), (18), (23) при $p \rightarrow 0$ ($\operatorname{sh} x \sim x$, $\operatorname{ch} x \sim 1$, $x \rightarrow 0$), получим

$$\begin{aligned}
W_2(p) & \sim \frac{k+l}{\sqrt{\chi}}, \quad pG_1(p) \sim -\frac{kA}{\chi_1 \sqrt{\chi_2^{-1}} p} \int_{-l_1}^0 u_1^0(z) dz, \\
pG_2(p) & \sim \frac{A}{\chi_1 l_2 \sqrt{p\chi_2^{-1}}} \left[-\int_{-l_1}^0 u_1^0(z) z dz + \chi \int_0^{l_2} u_2^0(z) (l_2 - z) dz \right].
\end{aligned}$$

Подстановка эквивалентных выражений в (24) даёт

$$\lim_{p \rightarrow 0} \tilde{T}_1(y, p) = \frac{A H l_1 l_2 (3kl + l_1 l + 2\chi)(y + l_1)}{6\mu_2 \chi_1 (\mu + l)(k + l)} - \frac{A H l_1}{\mu_2 \chi_1 (\mu + l)} \left\{ \frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y l_1}{2} + \frac{l_1}{6} \right\},$$

что совпадает с $T_1^0(y)$ из формулы (12).

Аналогично показывается, что $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{T}_2(y, p) = T_2^0(y)$. Таким образом, температурные возмущения с ростом времени выходят на стационарный режим, определяемый формулами (12).

3.3. Определение возмущения концентрации

При анализе задачи для определения возмущения концентрации (3), (6), (9) удобно ввести замену $F = K_1 + \alpha_1 T_1$. Тогда начально-краевая задача преобразуется к виду

$$F_t = d_1 F_{yy} + \alpha_1 T_{yy} - B u_1,$$

$$F_y(0, t) = 0, \quad F_y(-l_1, t) = 0,$$

$$F(y, 0) = 0.$$

Решение задачи в изображениях по Лапласу будет следующим:

$$\tilde{F}(y, p) = D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{d_1}} y + D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_1}} y + \sqrt{\frac{d_1}{p}} \int_{-l_1}^y h(z, p) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{d_1}} (y - z) \right] dz, \quad (25)$$

где

$$h = -\frac{\alpha_1}{d_1} p \tilde{T}_1 + \frac{B}{d_1} \tilde{u}_1, \quad D_j = D_j(p), \quad j = 1, 2.$$

После подстановки (25) в граничные условия находим

$$D_1(p) = -\sqrt{\frac{d_1}{p}} \int_{-l_1}^0 h(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_1}} z dz,$$

$$D_2(p) = -\sqrt{\frac{d_1}{p}} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{d_1}} l_1 \int_{-l_1}^0 h(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_1}} z dz.$$

Далее для исследования функции $F(y, p)$ рассмотрим $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{F}_1(y, p)$. Для этого перепишем (25) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}(y, p) = & -\sqrt{\frac{d_1}{p}} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{d_1}{p}} (y + l_1)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{d_1}{p}} l_1} \int_{-l_1}^0 h(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_1}} z dz + \\ & + \sqrt{\frac{d_1}{p}} \int_{-l_1}^y h(z, p) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{d_1}} (y - z) \right] dz. \end{aligned}$$

Учитывая $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_1(y, p) = u_1^0(y)$, $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{T}_1(y, p) = T_1^0(y)$ и асимптотические разложения $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ при $x \rightarrow 0$, получим (см. теорему)

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{F}_1(y, p) = \begin{cases} \frac{\alpha_1 a A l_1^2}{8 \chi_1} - \frac{\alpha_1 a_1 l_1}{2} + \alpha_1 a_2, & \text{если } B = 0, \\ \infty, & \text{если } B \neq 0. \end{cases}$$

Постоянные a, a_1, a_2 определены выше.

Так как $K_1 = F - \alpha_1 T_1$, то получим, что с ростом времени возмущение концентрации выходит на стационарный режим при условии отсутствия её градиента в начальный момент времени, т. е. $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{K}_1(y, p) = K_1^0(y)$, где $K_1^0(y)$ определяется формулой (13).

4. Результаты численных расчётов

Полученные формулы в изображениях по Лапласу были использованы для численного нахождения полей скорости, температур и концентрации. Численные расчёты проводились в безразмерных переменных (14). При этом безразмерное время вводилось соотношением $\tau = \frac{\nu_1}{l_1^2} t$.

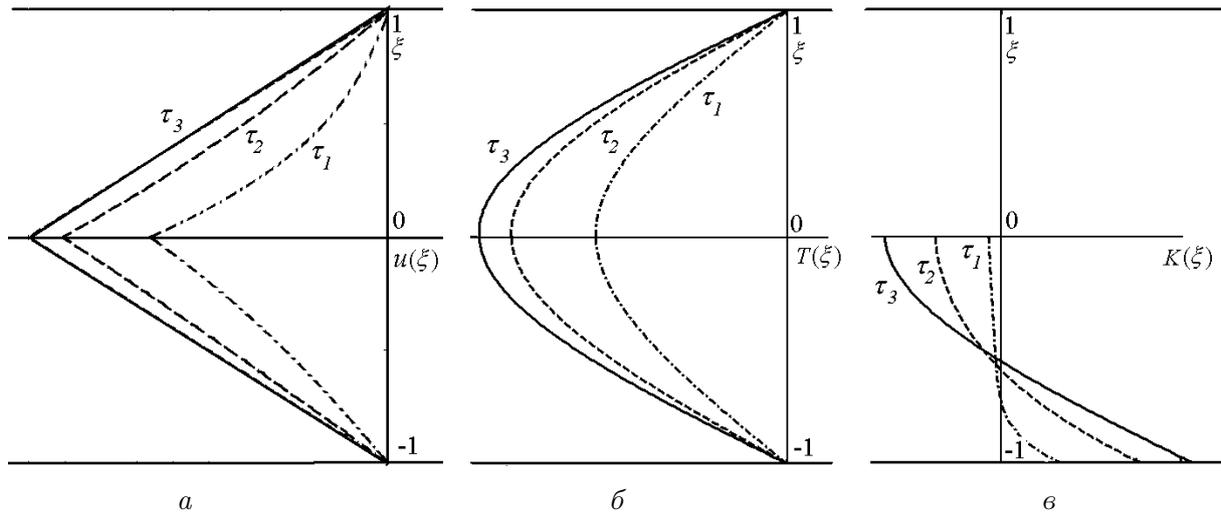


Рис. 2. Нестационарные профили скорости (а), температуры (б) и концентрации (в) в разные моменты времени

Результаты численного обращения преобразования Лапласа, приведённые на рис. 2, подтверждают выход решения рассматриваемой задачи на стационарный режим. При этом время выхода для скорости, температуры и концентрации различно. Для скорости оно составляет $\tau_3 = 8$, для температуры — $\tau_3 = 68$, для концентрации — $\tau_3 = 1000$.

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук, профессору В.К. Андрееву за помощь в постановке задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] АНДРЕЕВ В.К., ЗАХВАТАЕВ В.Е., РЯБИЦКИЙ Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 280 с.
- [2] АНДРЕЕВ В.К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного градиента давления // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
- [3] СОБАЧКИНА Н.Л. О совместном движении бинарной смеси и вязкой жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе // Вычисл. технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 120–133.
- [4] ЛЕМЕШКОВА Е.Н. Прямая и обратная задача о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Журн. СФУ. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 3. С. 363–370.
- [5] ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАВАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Поступила в редакцию 25 февраля 2013 г.,
с доработки — 22 апреля 2013 г.