Численное моделирование динамики теплообмена модифицированным квадратичным полиномом Вольтерры*

С. В. Солодуша
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru

Доказана теорема существования решения некоторого парного двумерного интегрального уравнения Вольтерры I рода. Рассмотрен вопрос численного решения полиномиального уравнения Вольтерры I рода второй степени. Приводятся иллюстративные расчёты на примере эталонной динамической системы, описывающей процессы теплообмена.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерры I рода, моделирование, нелинейная динамическая система, автоматическое управление, теплообмен.

Введение

В теории математического моделирования нелинейных динамических систем хорошо известен универсальный аппарат функциональных рядов Вольтерры [1]. Полином Вольтерры N-й степени, дающий представление отклика $y(t)$ системы типа вход-выход на внешнее возмущение $x(t)$, имеет вид

$$y\left(t\right)=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\nu\leq p}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t K_{i_1,\ldots,i_\nu}\left(t,s_1,\ldots,s_\nu\right)x_{i_1}(s_1)\ldots x_{i_\nu}(s_\nu)ds_1,\ldots,ds_\nu,$$
$$t\in\left[0,T\right], \tag{1}$$

где $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_p(t))$ — вектор-функция времени, $y(t)$ — скалярная функция времени, причём $y(0)=0$, $y(t)\in C^{(1)}_{[0,T]}$. В (1) ядра Вольтерры $K_{i_1,\ldots,i_\nu}$ симметричны по тем переменным, которые соответствуют совпадающим индексам $i_1,\ldots,i_\nu$. Построить математическую модель в виде (1) — значит идентифицировать ядра Вольтерры по информации об откликах системы на те или иные тестовые входные сигналы.

Если система стационарна в том смысле, что её динамические характеристики остаются неизменными за время T переходного процесса, то вместо (1) используется модель

$$y\left(t\right)=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_\nu\leq p}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t \hat{K}_{i_1,\ldots,i_\nu}(s_1,\ldots,s_\nu)x_{i_1}(t-s_1)\ldots x_{i_\nu}(t-s_\nu)ds_1,\ldots,ds_\nu,$$
$$t\in[0,T]. \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00722а).

Проблема применения аппарата рядов Вольтерры для моделирования технических (в частности, электротехнических и теплотехнических) систем рассмотрена в работах [2 – 5]. Из зарубежных источников отметим монографии [6 – 8] имеющие обширные списки библиографии.

Работы Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ИСЭМ) СО РАН в области идентификации ядер Вольтерры начались в 90-х годах прошлого века. В [9, 10] была предложена оригинальная методика идентификации ядер Вольтерры, базирующаяся на задании специальных многопараметрических семейств кусочно-постоянных тестовых входных сигналов. При этом задача идентификации сводится к решению линейных многомерных уравнений Вольтерры I рода с переменными верхними и нижними пределами (что отличает их от классических уравнений типа уравнений Вольтерры). Специфика таких уравнений позволяет находить решения в явном виде, а их сеточные аналоги допускают построение высокоэффективных вычислительных процедур, обладающих саморегуляризующим свойством. Важный для приложений случай (2) при $N = 2$ исследовался в [11, 12]. В работах [13 – 15] изложено применение данного подхода для моделирования процессов теплообмена на установке ВТК (высокотемпературный контур) ИСЭМ СО РАН.

Статья продолжает исследования, начатые в [12 – 15]. В первом разделе рассмотрена проблема идентификации несимметричных ядер Вольтерры, во втором дано краткое описание соответствующего программного обеспечения и приводятся иллюстративные расчёты на примере моделирования процессов теплообмена, третий раздел посвящён численному решению полиномиальных уравнений Вольтерры I рода, связанных с задачей об определении входного сигнала $x(t)$, которому соответствует заданный выход $y(t)$.

1. Об одном способе идентификации несимметричных ядер Вольтерры

В работе [16] предложен алгоритм повышения точности моделирования нелинейной динамической системы полиномами Вольтерры в скалярном случае. В его основе — комбинация линейной нестационарной и билинейной стационарной составляющих. В случае $N = 2$ комбинация (1), (2) дает уравнение

$$y(t) = \sum_{\mu=1}^{p} \int_0^t K_\mu(t,s) x_\mu(s) ds + \sum_{\mu=1}^{p} \int_0^t \int_0^t \hat{K}_{\mu\mu}(s_1,s_2) x_\mu(t-s_1) x_\mu(t-s_2) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{p} \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \int_0^t \int_0^t \hat{K}_{\nu\mu}(s_1,s_2) x_\nu(t-s_1) x_\mu(t-s_2) ds_1 ds_2, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Наша задача — получить необходимые условия существования $\hat{K}_{\nu\mu}(s_1, s_2)$ в классе непрерывных на $\Omega_2 = \{s_1, s_2 / 0 \le s_1, s_2 \le T\}$ несимметричных функций.

Отметим, что процедуру разделения отклика моделируемой системы на составляющие $y^{\alpha_{r,\mu}}$, $r = 1, 2$, обусловленные индивидуальным влиянием μ-й компоненты вектора $x(t)$, реализуют тестовые сигналы

$$x_\mu^{\alpha_{r,\mu}}(t) = \alpha_{r,\mu}(I(t) - I(t-\omega)), \quad x_\lambda(t) = 0, \quad 0 \le \omega \le t \le T, \tag{4}$$

где $I(t)$ — функция Хевисайда, $\lambda = \overline{1,p}$, $\lambda \neq \mu$. Вещественные числа $\alpha_{r,\mu} \neq 0$, $r = 1, 2$, $\alpha_{1,\mu} \neq \alpha_{2,\mu}$, $\mu = \overline{1,p}$, характеризуют высоту возмущающих воздействий по входу x_μ. Подстановка (4) в (3) приводит к системе двух линейных относительно K_μ и $\hat{K}_{\mu\mu}$ интегральных уравнений Вольтерры I рода с переменными верхними и нижними пределами интегрирования, при этом справедливы формулы обращения [16]

$$K_\mu(t,\omega) = \frac{\partial f_\mu(t,\omega)}{\partial\omega}, \quad 0 \le \omega \le t \le T,$$

$$\hat{K}_{\mu\mu}(t,t-\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_{\mu\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega} + \frac{\partial^2 f_{\mu\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right), \quad 0 \le \omega \le t \le T,$$

где

$$f_\mu(t,\omega) = \frac{\alpha_{2,\mu}^2 y^{\alpha_{1,\mu}}(t,\omega) - \alpha_{1,\mu}^2 y^{\alpha_{2,\mu}}(t,\omega)}{\alpha_{1,\mu}\alpha_{2,\mu}(\alpha_{2,\mu} - \alpha_{1,\mu})}, \quad f_{\mu\mu}(t,\omega) = \frac{\alpha_{1,\mu} y^{\alpha_{2,\mu}}(t,\omega) - \alpha_{2,\mu} y^{\alpha_{1,\mu}}(t,\omega)}{\alpha_{1,\mu}\alpha_{2,\mu}(\alpha_{2,\mu} - \alpha_{1,\mu})},$$

причём из необходимого условия существования $\hat{K}_{\mu\mu}(s_1,s_2)$ в классе непрерывных на Ω_2 симметричных функций [11]

$$f_{\mu\mu}(t,\omega) = f_{\mu\mu}(t-\omega,-\omega)$$

следует равенство

$$\alpha_{1,\mu} + \alpha_{2,\mu} = 0.$$

Постановка и решение экстремальной задачи выбора $\alpha_\mu^* = \pm\alpha_{r,\mu}$ в (4) для идентификации ядер K_μ, $\hat{K}_{\mu\mu}$ в (3) приведены в [17].

Остановимся на проблеме восстановления на квадрате Ω_2 ядра $\hat{K}_{\nu\mu}(s_1,s_2)$. По аналогии с [12] рассмотрим две группы тестовых сигналов

$$x_\nu^{\beta_\nu} = \beta_\nu(I(t) - I(t-\omega)), \quad x_\mu^{\beta_\mu} = \beta_\mu I(t-\omega), \quad x_\lambda(t) = 0, \quad 0 \le \omega \le t \le T, \tag{5}$$

$$x_\nu^{\beta_\nu} = \beta_\nu I(t-\omega), \quad x_\mu^{\beta_\mu} = \beta_\mu(I(t) - I(t-\omega)), \quad x_\lambda(t) = 0, \quad 0 \le \omega \le t \le T, \tag{6}$$

где $\beta_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$ — амплитуды сигналов по входам x_ν, x_μ, $\mu = \overline{2,p}$, $\nu = \overline{1,\mu-1}$, $\lambda = \overline{1,p}$, $\nu \neq \mu \neq \lambda$. Подстановка (5), (6) в (3) приводит к парному двумерному интегральному уравнению Вольтерры I рода относительно несимметричного на Ω_2 ядра $\hat{K}_{\nu\mu}$

$$\int\limits_{t-\omega}^{t} ds_1 \int\limits_0^{t-\omega} \hat{K}_{\nu\mu}(s_1,s_2)ds_2 = g_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega), \quad 0 \le \omega \le t \le T, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^{t-\omega} ds_1 \int\limits_{t-\omega}^{t} \hat{K}_{\nu\mu}(s_1,s_2)ds_2 = g_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega), \quad 0 \le \omega \le t \le T, \tag{8}$$

где

$$g_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega) = \frac{y_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\beta_\nu\beta_\mu} - \frac{1}{\beta_\mu}\int\limits_0^{\omega} K_\nu(t,s)ds - \frac{1}{\beta_\nu}\int\limits_\omega^{t} K_\mu(t,s)ds -$$

$$-\frac{\beta_\nu}{\beta_\mu}\int\limits_{t-\omega}^{t}\int\limits_{t-\omega}^{t}\hat{K}_{\nu\nu}(s_1,s_2)ds_1ds_2-\frac{\beta_\mu}{\beta_\nu}\int\limits_{0}^{t-\omega}\int\limits_{0}^{t-\omega}\hat{K}_{\mu\mu}(s_1,s_2)ds_1ds_2, \tag{9}$$

$$g_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)=\frac{y_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\beta_\nu\beta_\mu}-\frac{1}{\beta_\mu}\int\limits_{\omega}^{t}K_\nu(t,s)ds-\frac{1}{\beta_\nu}\int\limits_{0}^{\omega}K_\mu(t,s)ds-$$

$$-\frac{\beta_\nu}{\beta_\mu}\int\limits_{0}^{t-\omega}\int\limits_{0}^{t-\omega}\hat{K}_{\nu\nu}(s_1,s_2)ds_1ds_2-\frac{\beta_\mu}{\beta_\nu}\int\limits_{t-\omega}^{t}\int\limits_{t-\omega}^{t}\hat{K}_{\mu\mu}(s_1,s_2)ds_1ds_2. \tag{10}$$

Здесь $y_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)$, $y_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)$ — отклики системы на сигналы вида (5) и (6) соответственно.

Теорема. *Условия*

$$\left(\frac{\partial^2 y_i^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y_i^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)\in C_\Delta,\quad i=1,2,\quad \Delta=\{t,\omega|0\le\omega\le t\le T\}, \tag{11}$$

$$y_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,0)=y_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,t)=\frac{\beta_\nu(\alpha_{2,\nu}-\beta_\nu)}{\alpha_{1,\nu}(\alpha_{2,\nu}-\alpha_{1,\nu})}\,y^{\alpha_{1,\nu}}(t,t)+\frac{\beta_\nu(\beta_\nu-\alpha_{1,\nu})}{\alpha_{2,\nu}(\alpha_{2,\nu}-\alpha_{1,\nu})}\,y^{\alpha_{2,\nu}}(t,t), \tag{12}$$

$$y_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,0)=y_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,t)=\frac{\beta_\mu(\alpha_{2,\mu}-\beta_\mu)}{\alpha_{1,\mu}(\alpha_{2,\mu}-\alpha_{1,\mu})}\,y^{\alpha_{1,\mu}}(t,t)+\frac{\beta_\mu(\beta_\mu-\alpha_{1,\mu})}{\alpha_{2,\mu}(\alpha_{2,\mu}-\alpha_{1,\mu})}\,y^{\alpha_{2,\mu}}(t,t), \tag{13}$$

$$\frac{\beta_\nu(2\alpha_{2,\nu}-\beta_\nu)}{\alpha_{1,\nu}(\alpha_{2,\nu}-\alpha_{1,\nu})}\left(\frac{\partial^2 y^{\alpha_{1,\nu}}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y^{\alpha_{1,\nu}}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}-\left(\frac{\partial^2 y_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}+$$

$$+\frac{\beta_\nu(\beta_\nu-2\alpha_{1,\nu})}{\alpha_{2,\nu}(\alpha_{2,\nu}-\alpha_{1,\nu})}\left(\frac{\partial^2 y^{\alpha_{2,\nu}}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y^{\alpha_{2,\nu}}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}=$$

$$=\frac{\beta_\mu(2\alpha_{2,\mu}-\beta_\mu)}{\alpha_{1,\mu}(\alpha_{2,\mu}-\alpha_{1,\mu})}\left(\frac{\partial^2 y^{\alpha_{1,\mu}}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y^{\alpha_{1,\mu}}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}-\left(\frac{\partial^2 y_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}+$$

$$+\frac{\beta_\mu(\beta_\mu-2\alpha_{1,\mu})}{\alpha_{2,\mu}(\alpha_{2,\mu}-\alpha_{1,\mu})}\left(\frac{\partial^2 y^{\alpha_{2,\mu}}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 y^{\alpha_{2,\mu}}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0} \tag{14}$$

необходимы и достаточны для существования решения парного уравнения (7), (8) в классе C_{Ω_2}. Пара

$$\hat{K}_{\nu\mu}(t,t-\omega)=-\left(\frac{\partial^2 g_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 g_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right),\quad 0\le\omega\le t\le T, \tag{15}$$

$$\hat{K}_{\nu\mu}(t-\omega,t)=-\left(\frac{\partial^2 g_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 g_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right),\quad 0\le\omega\le t\le T, \tag{16}$$

определяет решение во всей области Ω_2.

Доказательство. Воспользуемся результатами [11], согласно которым формулы обращения (15), (16) справедливы тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{\partial^2 g_i^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 g_i^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)\in C_\Delta,\quad i=1,2,\quad \Delta=\{t,\omega|0\le\omega\le t\le T\}, \tag{17}$$

$$g_i^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,0)=0, \quad g_i^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,t)=0, \quad i=1,2, \quad t\in[0,T], \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial^2 g_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 g_1^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}=\left(\frac{\partial^2 g_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial t\partial\omega}+\frac{\partial^2 g_2^{\beta_\nu\beta_\mu}(t,\omega)}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=0}. \tag{19}$$

С учётом (9), (10) из (17)–(19) следуют (11)–(14). □

2. Программное обеспечение для моделирования нелинейной динамики

Для построения и тестирования интегральных моделей нелинейной динамики теплообмена был создан программно-вычислительный комплекс [18], использующий эталонную модель. Эталоном служило описание процесса теплообмена в элементе теплообменного аппарата (теплообменника) с независимым подводом тепла, представленное в [19]. Согласно [19], отклонение энтальпии на выходе $\Delta i(t)$ (кДж/кг) при произвольных законах возмущений расхода вещества $\Delta\mathcal{D}(t)$ (кг/с) и тепловой нагрузки $\Delta\mathcal{Q}(t)$ (кВт) описывается зависимостью

$$\Delta i_{et}(t)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\int\limits_0^t\left(\Delta\mathcal{Q}(\eta)-\frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{D}_0}\Delta\mathcal{D}(\eta)\right)\left(e^{-\lambda_1\int\limits_\eta^t\mathcal{D}(s)ds}-e^{-\lambda_2\int\limits_\eta^t\mathcal{D}(s)ds}\right)d\eta, \quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

Здесь t — время, λ_1 и λ_2 — некоторые константы, индексами “0” обозначены параметры начального стационарного режима, $\mathcal{D}_0=0.16$ (кг/с), $\mathcal{Q}_0=100$ (кВт), Δ — приращение, например $\mathcal{D}(t)=\mathcal{D}_0+\Delta\mathcal{D}(t)$. Числовые характеристики, входящие в (20), принимались соответствующими реальной установке ВТК.

Вычислительный комплекс создан в объектно-ориентированной среде программирования C++ Builder и основан на функционально-модульном принципе. Он включает в себя блоки настройки входных параметров, идентификации и моделирования. Соотношение (20) используется в блоке идентификации для получения необходимого набора откликов на тестовые сигналы, а в блоке моделирования — в качестве эталона для оценки точности интегральных моделей. Процедуры идентификации базируются на разностных аналогах формул обращения, что обеспечивает быстродействие в режиме “on-line”. Процедуры вычисления откликов интегральных моделей основаны на использовании методов средних прямоугольников и интегрирования произведения. Расчёт выходных значений эталонной модели (20) проводится с помощью метода трапеций. Реализованы функции ввода и оцифровки входных воздействий, отображения результатов вычислительного эксперимента в графической форме. Вся выходная информация хранится в соответствующих файлах на диске и может быть использована для подробного ознакомления и анализа.

Проведём тестирование квадратичной модели (3), где $x(t)=(\Delta\mathcal{D}(t),\Delta\mathcal{Q}(t))$. В ходе вычислительного эксперимента будем учитывать результаты расчётов, полученные с помощью (2), где $N=2$. С учётом специфики (20) вместо (2) и (3) для $p=2$ используем соответственно уравнения

$$\Delta i_{1_{\text{mod}}}(t)=\int\limits_0^t\hat{K}_1(s)\Delta\mathcal{D}(t-s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^t\hat{K}_{11}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{D}(t-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int\limits_0^t \hat{K}_2(s)\Delta\mathcal{Q}(t-s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{12}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{Q}(t-s_2)ds_1ds_2,\quad t\in[0,T],\quad (21)$$

и

$$\Delta i_{2_{\mathrm{mod}}}(t)=\int\limits_0^t K_1(t,s)\Delta\mathcal{D}(s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{11}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{D}(t-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int\limits_0^t K_2(t,s)\Delta\mathcal{Q}(s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{12}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{Q}(t-s_2)ds_1ds_2,\quad t\in[0,T].\quad (22)$$

Введём сетку узлов t_i, $i=\overline{1,n}$, $nh=T$. Пусть $h=1$ (с) (такой выбор шага связан с реальными данными, полученными в ходе эксперимента на ВТК ИСЭМ СО РАН). С помощью вычислительного комплекса [18] выполняем построение квадратичных моделей (21), (22). В данном программном обеспечении используются алгоритмы численного решения уравнений Вольтерры I рода, основанного на саморегуляризующем свойстве [20, 21] процедуры дискретизации. Отметим, что в работе [22] проведено подробное исследование применимости простейших кубатурных формул (правых и средних прямоугольников) и методов типа метода Рунге—Кутты для устойчивого решения соответствующих многомерных интегральных уравнений Вольтерры I рода. Следуя [22], в качестве “базовой” используем формулу средних прямоугольников. Такой выбор обусловлен относительной простотой реализации и получением приближенного решения с погрешностью порядка $\mathcal{O}(h^2)$ в случае отсутствия возмущений исходных данных. Считаем далее в качестве допустимого множество $X(B,T)$ входных сигналов вида

$$\Delta\mathcal{D}^{\beta}_{\omega}(t)=\beta\mathcal{D}_0(I(t)-2I(t-\omega)-I(t-T)),\quad \Delta\mathcal{Q}(t)=0,\quad (23)$$

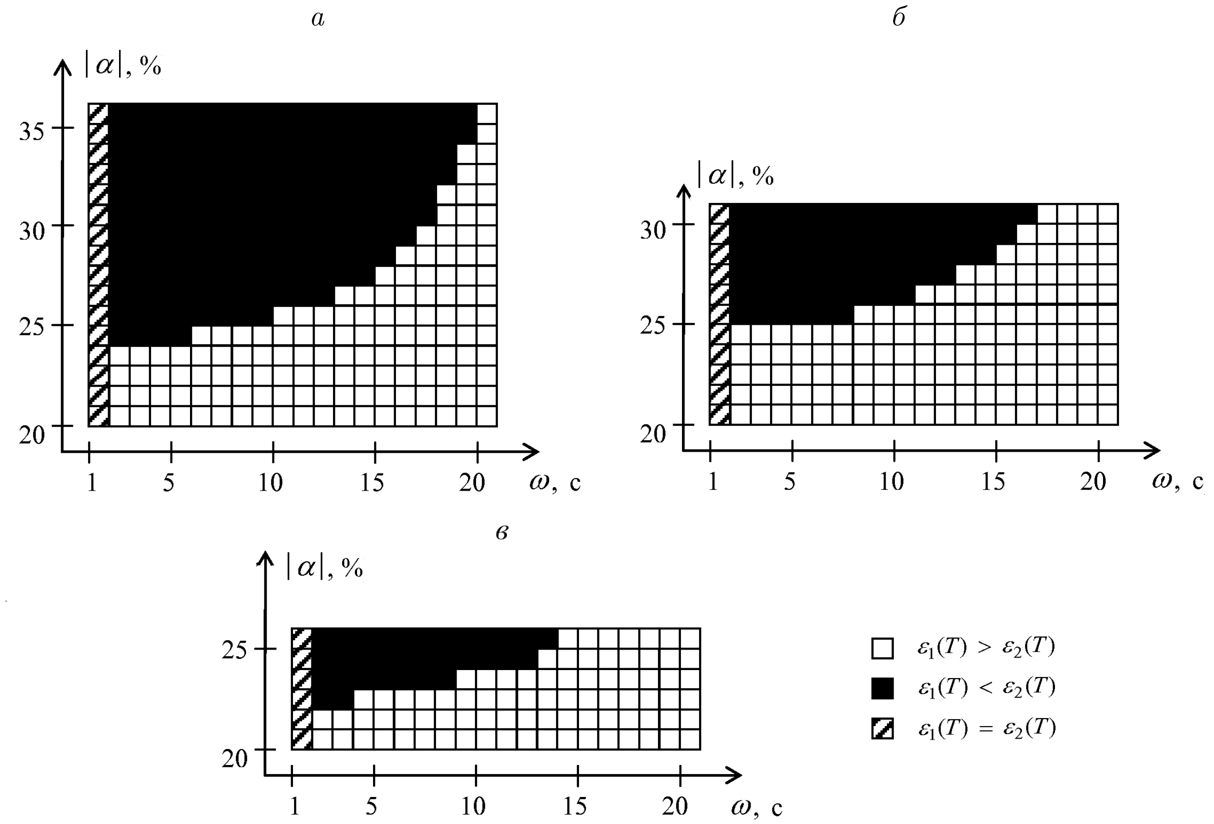
где $\beta\in[0,B]$, $0\le\omega<t\le T$, $B=35,\ 30,\ 25$.

Во многих физических приложениях важно значение выходного сигнала динамического объекта в конце переходного процесса, поэтому в качестве критерия точности моделирования выбираем значения невязок между $\Delta i^h_{et}(t_i)$ и $\Delta i^h_{1_{\mathrm{mod}}}(t_i)$ $(\Delta i^h_{2_{\mathrm{mod}}}(t_i))$ при $t_i=T$

$$\Big[\varepsilon_j(t)\Big]_{t=T}\triangleq\frac{1}{B}\sum_{\beta=1}^{B}\frac{|\Delta i^h_{et}(T)-\Delta i^h_{j_{\mathrm{mod}}}(T)|}{\Delta i^h_{et}(T)}100\,\%,\quad j=1,2.\quad (24)$$

Для сравнения эффективности применения моделей вида (21), (22) были найдены значения $\varepsilon_1(T)$, $\varepsilon_2(T)$ по (24) с точностью $\delta=10^{-4}$ для $1\le\omega\le 20$, $T=30$. Рисунок иллюстрирует результаты расчётов. Следует заметить, что области предпочтительности использования того или иного алгоритма не являются универсальными, так как выявлены на основе анализа результатов вычислительных экспериментов, проведённых с использованием одной эталонной модели (20).

Вычисление откликов $\Delta i^h_{1_{\mathrm{mod}}}(t_i)$, $\Delta i^h_{2_{\mathrm{mod}}}(t_i)$ на заданное входное возмущение (23) при $0.0016\le\beta\mathcal{D}_0\le 0.0016B$ проведено по разностным аналогам (21), (22), ядра Вольтерры в которых настроены на тестовые сигналы с амплитудами $0.032\le|\alpha|\mathcal{D}_0\le 0.0016B$, от выбора которых существенно зависит точность моделирования исследуемого нелинейного процесса. Естественно, что для обеспечения $\varepsilon_1(T)\equiv\varepsilon_2(T)\equiv 0\,\%$ требуется согласование амплитуд пробных сигналов с величиной действующих возмущений. Приведём



Результаты вычислительных экспериментов для $B = 35$ (*а*), 30 (*б*), 25 (*в*)

значения невязок для наиболее "неприятных" входных сигналов из множества допустимых. Было получено, что для $B = 25$ $\varepsilon_1(T) \leq 5.62\,\%$, $\varepsilon_2(T) \leq 5.18\,\%$, для $B = 30$ $\varepsilon_1(T) \leq 6.89\,\%$, $\varepsilon_2(T) \leq 6.38\,\%$, для $B = 35$ $\varepsilon_1(T) \leq 8.41\,\%$, $\varepsilon_2(T) \leq 7.93\,\%$.

3. Полиномиальные уравнения Вольтерры в задаче автоматического управления

До сих пор центральной проблемой в работе было восстановление ядер Вольтерры в (3), (22). Допустим, что с помощью того или иного подхода эта проблема решена. В качестве следующего этапа математического моделирования можно рассмотреть типичную задачу автоматического управления динамическим объектом при отсутствии обратной связи — нахождение входного сигнала $x(t)$, которому соответствует заданный отклик $y(t)$. Продолжая исследование, начатое в [23], выберем в качестве управляющего воздействия сигнал $x_1(t) = \Delta\mathcal{D}(t)$. Для определённости входное возмущение $x_2(t) = \Delta\mathcal{Q}(t)$, $t \in [0, T]$, считаем заданным и перепишем (22) в следующем виде:

$$\int\limits_0^t K_1(t,s)\Delta\mathcal{D}(s)ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{11}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{D}(t-s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{12}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{Q}(t-s_2)ds_1ds_2 =$$

$$= \Delta i_{2_{\text{mod}}}(t) - \int\limits_0^t K_2(t,s)\Delta\mathcal{Q}(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

При известных K_1, K_2, $\hat{K}_{11}$, $\hat{K}_{12}$ и $y(t) = \Delta i_{2_{\text{mod}}}(t)$ (25) является полиномиальным интегральным уравнением относительно $\Delta\mathcal{D}(t)$. При малом t численное решение (25) заведомо существует [24]. Найдем его кубатурным методом средних прямоугольников. Обоснование сходимости численного решения полиномиального уравнения Вольтерры I рода второй степени, основанного на методе средних прямоугольников, дано в [25].

Введём сетку узлов $t_i = ih$, $t_{i-\frac{1}{2}} = \left(i - \frac{1}{2}\right)h$, $i = \overline{1,n}$, $nh = T$. Аппроксимируем интегралы в (25) суммами. Для вычисления $\Delta\mathcal{D}(t)$ в $\left(i - \frac{1}{2}\right)$-м узле получим квадратное уравнение относительно $\Delta\mathcal{D}^h_{i-\frac{1}{2}}$

$$h^2\hat{K}_{11_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}\left(\Delta\mathcal{D}^h_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 + \Bigg(hK_{1_{i-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}}} + 2h^2\sum_{j=2}^{i}\hat{K}_{11_{j-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}\Delta\mathcal{D}^h_{i-j+\frac{1}{2}} +$$

$$+h^2\sum_{l=1}^{i}\hat{K}_{12_{\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}\Delta\mathcal{Q}^h_{i-l+\frac{1}{2}}\Bigg)\Delta\mathcal{D}^h_{i-\frac{1}{2}} = \Delta i^h_{2_{mod_i}} - h\sum_{j=1}^{i}K_{2_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}\Delta\mathcal{Q}^h_{j-\frac{1}{2}} - z_i, \tag{26}$$

где

$$z_i = h\sum_{j=1}^{i-1}K_{1_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}\Delta\mathcal{D}^h_{j-\frac{1}{2}} + h^2\sum_{j=2}^{i}\sum_{l=2}^{i}\hat{K}_{11_{j-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}\Delta\mathcal{D}^h_{i-j+\frac{1}{2}}\Delta\mathcal{D}^h_{i-l+\frac{1}{2}} +$$

$$+h^2\sum_{j=2}^{i}\sum_{l=1}^{i}\hat{K}_{12_{j-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}\Delta\mathcal{D}^h_{i-j+\frac{1}{2}}\Delta\mathcal{Q}^h_{i-l+\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Выбор нужного корня уравнения (26) определяется условием

$$\Delta\mathcal{D}^h_{\frac{1}{2}} \to \Delta\mathcal{D}(0) = \frac{\Delta i'_{2_{\text{mod}}}(0)}{K_1(0,0)} \quad \text{при } h \to 0. \tag{27}$$

Интересующее нас численное решение уравнения (26) обозначим через $\Delta\mathcal{D}^h_2\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)$.

Рассуждая по аналогии, рассмотрим вместо (21) уравнение

$$\int\limits_0^t \hat{K}_1(s)\Delta\mathcal{D}(t-s)ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{11}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{D}(t-s_2)ds_1ds_2 +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^t \hat{K}_{12}(s_1,s_2)\Delta\mathcal{D}(t-s_1)\Delta\mathcal{Q}(t-s_2)ds_1ds_2 =$$

$$= \Delta i_{1_{\text{mod}}}(t) - \int\limits_0^t \hat{K}_2(s)\Delta\mathcal{Q}(t-s)ds, \quad t \in [0,T], \tag{28}$$

Т а б л и ц а 1. Значения $\gamma_{1_{\max}}$, при которых существует решение $\Delta\mathcal{D}_1^h(t_i),\ 0 \le t_i \le T-h$

	$\lvert\alpha\rvert$, %				
T, с	40	45	50	55	60
30	54.98	55.56	56.68	58.43	61.00
35	53.86	54.55	55.82	57.77	60.63
40	53.12	53.89	55.27	57.37	60.45
45	52.59	53.43	54.90	57.10	60.32
50	52.22	53.11	54.63	56.93	60.26

Т а б л и ц а 2. Значения $\gamma_{2_{\max}}$, при которых существует решение $\Delta\mathcal{D}_2^h(t_i),\ 0 \le t_i \le T-h$

	$\lvert\alpha\rvert$, %				
T, с	40	45	50	55	60
30	55.59	56.12	57.17	58.83	61.28
35	54.25	54.98	56.12	58.00	60.76
40	53.38	54.13	55.47	57.51	60.50
45	52.78	53.60	55.03	57.20	60.36
50	52.35	53.23	54.73	56.99	60.28

где $\hat{K}_1,\ \hat{K}_2,\ \hat{K}_{11},\ \hat{K}_{12},\ x_2(t) = \Delta\mathcal{Q}(t)$ и $y(t) = \Delta i_{1_{\mathrm{mod}}}(t)$ известны. Аппроксимируем (28) методом средних прямоугольников и, используя условие типа (27), выполним построение $\Delta\mathcal{D}_1^h\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)$ (расчётная схема приведена в [23]).

Предположим, что допустимые входные возмущения $\Delta\mathcal{Q}(t) = \gamma\mathcal{Q}_0 I(t),\ \gamma \le 0.75$, $t \in [0,T]$. Вычисление управляющих сигналов $\Delta\mathcal{D}_1^h\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)$, $\Delta\mathcal{D}_2^h\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)$, обеспечивающих отклики системы $\Delta i^h_{1_{mod_i}} = 0$, $\Delta i^h_{2_{mod_i}} = 0$ соответственно, проводилось с помощью уравнений (28), (25), ядра Вольтерры в которых были настроены на тестовые сигналы с амплитудами $|\alpha|\mathcal{D}_0 \le 0.096$ (кг/с) и $|\alpha|\mathcal{Q}_0 \le 60$ (кВт). В табл. 1, 2 приведены некоторые результаты вычислительных экспериментов для $i_0 = 434$ (кДж/кг), $h = 1$ (с), $T = 30 \div 50$ (с).

Основная специфика рассматриваемых полиномиальных уравнений Вольтерры I рода (25), (28), как и в скалярном случае, связана с локальностью области существования вещественных непрерывных решений. При вычислении сеточных аппроксимаций $\Delta\mathcal{D}_1(t)$, $\Delta\mathcal{D}_2(t)$, $0 \le t \le T$, получено, что специфика (28), (25) проявляется при возмущающих воздействиях $\Delta\mathcal{Q}(t)$ с $\gamma \ge \gamma_{1_{\max}}$ и $\gamma \ge \gamma_{2_{\max}}$ (см. табл. 1, 2), что означает возможную потерю управляемости изучаемого процесса теплообмена. Вычислительные эксперименты показали, что на $\gamma_{1_{\max}}$, $\gamma_{2_{\max}}$ влияет выбор α, используемых для восстановления ядер Вольтерры. Кроме того, из таблиц 1, 2 видно, что при фиксированных значениях T и α имеет место неравенство $\gamma_{1_{\max}} < \gamma_{2_{\max}}$.

Таким образом, в работе теоретически обоснованы необходимые условия существования $\hat{K}_{\nu\mu},\ \mu = \overline{2,p},\ \nu = \overline{1,\mu-1}$, в классе непрерывных на квадрате Ω_2 несимметричных функций. Данный результат получен в терминах амплитуд тестовых сигналов, что в сочетании с серией специальных экстремальных постановок [17] позволит в дальнейшем снять произвол в выборе амплитуд при построении интегральных моделей динамики теплообмена. Рассмотрен алгоритм численного решения полиномиального интегрального уравнения Вольтерры I рода второй степени, возникающего в задаче автоматического регулирования нелинейной динамической системы. Приведены результаты тестовых расчётов для эталонной модели теплообмена. Вычислительные эксперименты проводились с помощью авторского программного обеспечения [18, 26].

Список литературы

[1] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.

[2] Веников В.А., Суханов О.А. Кибернетические модели электрических систем. М.: Энергоиздат, 1982. 327 с.

[3] Данилов Л.В., Матханов Л.Н., Филиппов В.С. Теория нелинейных динамических цепей. М.: Энергоиздат, 1990. 252 с.

[4] Дейч А.М. Методы идентификации динамических систем. М.: Энергия, 1979. 240 с.

[5] Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.

[6] Doyle III F., Pearson R., Ogunnaike B. Identification and Control Using Volterra Models. Springer-Verlag, 2002.

[7] Rugh W.J. Nonlinear System Theory: The Volterra—Wiener Approach. Johns Hopkins Univ. Press, 1981.

[8] Ogunfunmi T. Adaptive Nonlinear System Identification. The Volterra and Wiener Approaches. Santa Clara Univ., Springer, 2007.

[9] Apartsyn A.S. Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series // EPRI-SEI Joint Seminar. Beijing, China, 1991. P. 117–132.

[10] Apartsyn A.S. On some identification method for nonlinear dynamic systems// ISEMA-92. Shenzhen, China, 1992. P. 288–292.

[11] Апарцин А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай). Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996 (Препр. № 8).

[12] Солодуша С.В. Построение интегральных моделей нелинейных динамических систем с помощью рядов Вольтерра. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск: Иркутский гос. ун-т, 1996.

[13] Апарцин А.С., Таиров Э.А., Солодуша С.В., Худяков Д.В. Применение интегростепенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников // Изв. РАН. Энергетика. 1994. № 3. С. 138–145.

[14] Апарцин А.С., Солодуша С.В., Таиров Э.А. Математические модели нелинейной динамики на базе рядов Вольтерра и их приложения // Изв. Академии естественных наук. Математика, матем. моделирование, информатика и управление. 1997. Т. 1, № 2. С. 115–125.

[15] Apartsyn A.S., Solodusha S.V. Mathematical simulation of nonlinear dynamic systems by Volterra series // Eng. Simulation. 2000. Vol. 17, No. 2. P. 143–153.

[16] Апарцин А.С. О повышении точности моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра // Электронное моделирование. 2001. Т. 23, № 6. С. 3–12.

[17] Апарцин А.С., Солодуша С.В. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 116–124.

[18] Солодуша С.В. Программно-вычислительный комплекс для моделирования нелинейной динамики теплообмена на базе квадратичных полиномов Вольтерра: Свид-во о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2012614246. 12. 05. 2012.

[19] Таиров Э.А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 150–156.

[20] Апарцин А.С., Бакушинский А.Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Иркутский гос. ун-т. 1972. Вып. I. С. 248–258.

[21] Апарцин А.С. Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений I рода // Методы численного анализа и оптимизации. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. 1987. С. 263–297.

[22] Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода в интегральных моделях динамических систем: Теория, численные методы, приложение. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Иркутск: Иркутский гос. ун-т, 2000.

[23] Солодуша С.В. Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 133–140.

[24] Апарцин А.С. Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 69–81.

[25] Апарцин А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2007. Т. 47, № 8. С. 1378–1386.

[26] Солодуша С.В. Программное обеспечение и алгоритмы для моделирования нелинейной динамики полиномами Вольтерра // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 137–141.

Поступила в редакцию 24 декабря 2012 г.,
с доработки — 6 февраля 2013 г.