Геометрические приближения для уравнений вращающейся мелкой воды*

С. Б. Медведев
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
Московский государственный университет, Москва
e-mail: `medvedev@ict.nsc.ru`

Рассмотрены различные геометрические приближения для уравнений вращающейся мелкой воды. Первый класс приближений состоит в переходе от уравнений на эллипсоиде к уравнениям на сфере, второй — в переходе от уравнений на сфере к уравнениям на касательной поверхности. Получены приближённые уравнения для всех геометрических аппроксимаций. Главное требование к построенным приближениям — сохранение гамильтоновой структуры, что было достигнуто двумя способами. Метрический тензор поверхности определяет гамильтонову структуру уравнений на ней, поэтому первый способ заключается в выборе в качестве приближённых уравнений той части полной системы системы, которая связана с соответствующим разложением метрического тензора. Было найдено, что скобка Пуассона для ковариантных компонент скорости почти не зависит от коэффициентов Ламе, в силу чего основная зависимость от коэффициентов Ламе переносится в гамильтониан системы и все приближения строятся разложением гамильтониана, что составляет основу второго способа.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, параметр Кориолиса, скобка Пуассона, гамильтониан, приближённые уравнения, метрика, поверхность вращения, криволинейные координаты, сферическая и эллипсоидальная поверхности.

Введение

Нас будут интересовать три двумерные поверхности: сплющенный эллипсоид вращения, сфера и плоскость.

Известно, что поверхность Земли с достаточной точностью можно считать сплющенным эллипсоидом, который вращается вокруг малой оси с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ и описывается уравнением [1]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

где длина малой полуоси b меньше длины большой полуоси a. Отношение этих длин обычно выражают через эксцентриситет e или сжатие α

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \alpha = \frac{a - b}{a}.$$

*Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-12075-офи-м и грантами Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова” по договору № 11.G34.31.0054 и под руководством приглашенных исследователей по соглашению № 12.740.11.1430.

Поскольку эксцентриситет для Земли достаточно мал ($e^2 \approx 1/150$), при практических вычислениях достаточно считать Землю шаром радиуса a.

Дальнейшее упрощение приводит к уравнениям на касательной плоскости в окрестности некоторой точки на земной поверхности. Таким образом, получаются уравнения вращающейся мелкой воды на плоскости.

Одной из простейших моделей в геофизической гидродинамике являются уравнения мелкой воды [2, 3]. Эти уравнения рассматривают на всех трёх поверхностях. Однако исследование уравнений мелкой воды на эллипсоиде и на сфере — достаточно сложная задача. Кроме того, если масштаб исследуемых явлений меньше радиуса Земли, то достаточно рассмотреть уравнения мелкой воды на касательной плоскости или поверхности. Таким образом, получается иерархия приближённых моделей. Последовательному выводу этой иерархии посвящена настоящая работа. Принципиальный вопрос при получении приближений — сохранение гамильтоновой структуры, поэтому все построения проводятся в рамках гамильтонова формализма для неканонических систем.

Гамильтонов формализм для канонических систем является общепринятым методом их исследования. Основу метода составляют канонические преобразования, что позволяет описывать системы с помощью гамильтониана: функции для конечномерных систем [4] и функционала для полевых систем [5]. Все преобразования и упрощения приводят к изменению только вида гамильтониана. Если гамильтониан не зависит от времени, то он сохраняется при эволюции системы. Такой гамильтониан обычно связан с энергией системы, поэтому его сохранение для приближённых моделей является гарантией того, что приближённая система не сильно отходит от уровня постоянной энергии исходной (точной) системы.

Для неканонических гамильтоновых систем возмущению кроме гамильтониана подвергается также скобка Пуассона, которая зависит от динамических переменных. Гамильтонова система с вырожденной скобкой Пуассона обладает дополнительными сохраняющимися функционалами, которые аннулируют скобку для любого гамильтониана. В силу этого для построения приближённых уравнений, решения которых расположены на поверхностях, близких к уровням сохраняющихся функционалов исходной системы, необходимо, чтобы приближённые уравнения имели близкие сохраняющие функционалы. Кроме того, выполнение тождества Якоби задаёт соотношение между сохраняющимися величинами так, чтобы эти соотношения сохранялись для приближённых уравнений, поэтому необходимо следить за выполнением тождества Якоби для приближённой скобки.

Для невырожденных скобок Пуассона можно применить асимптотический вариант теоремы Дарбу для приведения к каноническому виду [6]. Если скобка Пуассона вырождена, то следует либо ограничиться первым приближением, которое всегда удовлетворяет тождеству Якоби [6], либо искать дополнительные малые члены, добавление которых сохраняет пуассонову структуру [7]. Функционалы, аннулирующие вырожденную скобку Пуассона (функционалы Казимира), задают стационарную часть системы, в силу чего для больших времен важно её точное сохранение при построении приближений.

В настоящей работе теория возмущений основана на использовании дополнительной геометрической структуры, а именно, метрического тензора пространственных независимых переменных. Вырожденная скобка Пуассона исходной системы приводится к скобке Пуассона системы с более простым метрическим тензором, поэтому вся информация о метрическом тензоре исходной системы переходит в описание гамильтониана системы, для которого можно делать приближения с сохранением гамильтоновой структуры получившихся уравнений.

1. Уравнения мелкой воды на произвольной двумерной поверхности

Рассмотрим уравнения вращающейся мелкой воды на произвольной двумерной поверхности. Ограничимся ортогональной системой координат. Тогда для криволинейных ортогональных координат q^1, q^2 уравнения движения и неразрывности можно получить с помощью методов дифференциальной геометрии [8, 9]. Пусть элемент длины ds задаётся через ковариантный метрический тензор g_{ij}. Для ортогональной системы координат все недиагональные элементы равны нулю, поэтому

$$ds^2 = \left(H_1 dq^1\right)^2 + \left(H_2 dq^2\right)^2,$$

где коэффициенты Ламе $H_1 = \sqrt{g_{11}}$ и $H_2 = \sqrt{g_{22}}$. Физические компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ имеют вид

$$u_1 = H_1 \frac{dq^1}{dt} = H_1 \dot{q}^1, \quad u_2 = H_2 \frac{dq^2}{dt} = H_2 \dot{q}^2,$$

где полная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{u_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q^2}.$$

Уравнения для физических компонент вектора скорости u_1, u_2 и высоты свободной поверхности (или глубины мелкой воды) h принимают следующий вид [10]:

$$\frac{du_1}{dt} - \left[f + \frac{1}{H_1 H_2}\left(u_2 \frac{\partial H_2}{\partial q^1} - u_1 \frac{\partial H_1}{\partial q^2}\right)\right] u_2 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial (gh)}{\partial q^1} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{du_2}{dt} + \left[f + \frac{1}{H_1 H_2}\left(u_2 \frac{\partial H_2}{\partial q^1} - u_1 \frac{\partial H_1}{\partial q^2}\right)\right] u_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial (gh)}{\partial q^2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (hD)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^1}\left(hD\frac{u_1}{H_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(hD\frac{u_2}{H_2}\right) = 0, \tag{3}$$

где g — ускорение свободного падения, $D = \det(g_{ij}) = H_1 H_2$, $f = f(q^1, q^2)$ — функция Кориолиса, которая служит аналогом параметра Кориолиса и задает силу Кориолиса.

Физические компоненты скорости u_1, u_2 связаны с контрвариантными v^1, v^2 и ковариантными U_1, U_2 компонентами вектора скорости соотношениями [9]

$$u_1 = H_1 v^1 = U_1/H_1, \quad u_2 = H_2 v^2 = U_2/H_2.$$

Уравнения для ковариантных компонент скорости принимают вид

$$\frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial q^1}\frac{1}{H_1^2} + \frac{U_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial q^1}\frac{1}{H_2^2} - fD\frac{U_2}{H_2^2} + \frac{\partial (gh)}{\partial q^1} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dU_2}{dt}+\frac{U_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial q^2}\frac{1}{H_1^2}+\frac{U_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial q^2}\frac{1}{H_2^2}+fD\frac{U_1}{H_1^2}+\frac{\partial(gh)}{\partial q^2}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(hD)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q^1}\left(hD\frac{U_1}{H_1^2}\right)+\frac{\partial}{\partial q^2}\left(hD\frac{U_2}{H_2^2}\right)=0. \tag{6}$$

Другие записи уравнений мелкой воды в произвольных криволинейных координатах приведены в [11].

Гамильтонова структура

Система (1)–(3) имеет гамильтонову структуру

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}+\hat{J}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{w}}=0$$

со скобкой Пуассона, задаваемой оператором

$$\hat{J}(q^1,q^2;u_1,u_2,h)=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{fD+\omega}{hD^2} & \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial}{\partial q^1}\dfrac{1}{D} \\ \dfrac{fD+\omega}{hD^2} & 0 & \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial}{\partial q^2}\dfrac{1}{D} \\ \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial q^1}\dfrac{1}{H_1} & \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial q^2}\dfrac{1}{H_2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где вертикальная завихренность имеет вид

$$\omega=\frac{\partial}{\partial q^1}(H_2u_2)-\frac{\partial}{\partial q^2}(H_1u_1),$$

и гамильтонианом

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int\left[u_1^2+u_2^2+gh\right]\,hD\,dq^1dq^2. \tag{8}$$

Если ввести новые переменные

$$U_1=H_1u_1,\quad U_2=H_2u_2,\quad H=hD,$$

то гамильтониан (8) принимает вид

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{U_1^2}{H_1^2}+\frac{U_2^2}{H_2^2}+\frac{gH}{D}\right]\,H\,dq^1dq^2 \tag{9}$$

и оператор скобки (7) преобразуется в

$$\hat{J}(q^1,q^2;U_1,U_2,H)=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{fD+\omega}{H} & \dfrac{\partial}{\partial q^1} \\ \dfrac{fD+\omega}{H} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial q^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где завихренность определяется равенством

$$\omega = \frac{\partial U_2}{\partial q^1} - \frac{\partial U_1}{\partial q^2}.$$

Оператор скобки (10) совпадает с оператором скобки для уравнений мелкой воды на плоскости, когда метрические коэффициенты равны единице $H_1 = H_2 = 1$, а параметр Кориолиса равен f.

Чтобы исключить из оператора (10) параметр Кориолиса f, можно сделать следующее преобразование:

$$U_1 = V_1 + \frac{\partial \xi}{\partial q^1}, \quad U_2 = V_2 + \frac{\partial \xi}{\partial q^2} - F(q^1, q^2), \quad F(q^1, q^2) = \int f(q^1, q^2) D \, dq^1,$$

где $\xi = \xi(q_1, q_2)$ — произвольная функция. В результате получим

$$\hat{J}(q^1, q^2; V_1, V_2, H) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\Omega}{H} & \dfrac{\partial}{\partial q^1} \\ \dfrac{\Omega}{H} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial q^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\left(V_1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial q^1} \right)^2}{H_1^2} + \frac{\left(V_2 + \dfrac{\partial \xi}{\partial q^2} - F \right)^2}{H_2^2} + \frac{gH}{D} \right] H \, dq^1 dq^2, \tag{11}$$

где “полный”, или “абсолютный”, вихрь имеет вид

$$\Omega = \frac{\partial V_2}{\partial q^1} - \frac{\partial V_1}{\partial q^2} = fD + \frac{\partial U_2}{\partial q^1} - \frac{\partial U_1}{\partial q^2}.$$

Последнее преобразование является формальным, поскольку интеграл энергии для состояния покоя может принимать бесконечное значение. В конкретной ситуации необходимо следить за конечностью гамильтониана. Для устойчивых систем обычно это достигается переходом к переменным, которые являются отклонениями от некоторого стационарного состояния.

Таким образом, полученный гамильтонов вид уравнений содержит все параметры задачи f, H_1, H_2 в гамильтониане, в то время как скобка Пуассона их не содержит. Это позволяет строить приближения, как и в случае канонических гамильтоновых систем, используя разложение только для гамильтониана.

2. Примеры поверхностей

Рассмотрим уравнения вращающейся мелкой воды на поверхностях, которые возникают в геофизической гидродинамике. Основополагающим является сплюснутый эллипсоид вращения, поскольку поверхность Земли хорошо описывается такой фигурой.

Для большинства геофизических задач эллипсоидальностью можно пренебречь, поэтому в основном в моделях Земля считается шаром. Наконец, мелкомасштабные движения атмосферы и океана можно рассматривать в декартовых координатах на касательной плоскости.

2.1. Уравнения на плоскости

Сначала рассмотрим наиболее простой случай бесконечной плоскости. В этом случае имеются декартовы координаты $x = q^1$, $y = q^2$ с единичными метрическими коэффициентами $H_1 = H_2 = 1$. Вводя для компонент скорости стандартные обозначения $u = u_1$, $v = u_2$ и подставляя эти переменные в общую систему (1)–(3), получим классические уравнения мелкой воды [2, 3]

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{\partial(gh)}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{\partial(gh)}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hu)}{\partial y} = 0, \tag{14}$$

где $f = f(x, y)$ — функция Кориолиса, которая обычно аппроксимируется либо константой $f = f_0$ (аппроксимация f-плоскости), либо линейной функцией $f = f_0 + \beta y$ (аппроксимация бета-плоскости).

Функционал Казимира

Скобка Пуассона для уравнений мелкой воды (12)–(14) имеет следующий вид:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\mathcal{F}}{\delta u} & \dfrac{\delta\mathcal{F}}{\delta v} & \dfrac{\delta\mathcal{F}}{\delta h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ q & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\mathcal{G}}{\delta u} \\ \dfrac{\delta\mathcal{G}}{\delta v} \\ \dfrac{\delta\mathcal{G}}{\delta h} \end{pmatrix} dxdy, \tag{15}$$

где $q = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + f\right)$ — потенциальный вихрь. Скобка (15) вырождена и имеет функционал Казимира $\mathcal{C} = \int hC(q)dx\,dy$, где $C(q)$ — произвольная гладкая функция. Для любого функционала $\mathcal{F}$ скобка (15) с функционалом $\mathcal{C}$ зануляется $\{\mathcal{F}, \mathcal{C}\} = 0$. Используя скобку (15), уравнения (12)–(14) можно записать в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -q & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ q & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} \\ \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta v} \\ \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta h} \end{pmatrix} = 0, \tag{16}$$

где гамильтониан системы (16)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int h\left(u^2 + v^2 + gh\right) dx\, dy. \tag{17}$$

Заметим, что гамильтонова система (16) имеет два закона сохранения для любого вида гамильтониана $\mathcal{H}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v}\right) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\,(Ch)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v}\right) = 0. \tag{19}$$

Комбинируя уравнения (18), (19), получим уравнение для потенциального вихря

$$h\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v}\frac{\partial C}{\partial y} = 0. \tag{20}$$

Подставляя значения для вариационных производных от гамильтониана (17) в (20), получим обычное уравнение переноса вихря

$$h\left(\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y}\right) = 0. \tag{21}$$

Сохранение уравнения (21) является важным для прогноза погоды, поскольку с переносом вихря связаны основные движения этого масштаба.

2.2. Общие поверхности вращения

Поскольку сфера и эллипсоид являются поверхностями вращения, то отметим общие свойства таких поверхностей. Обычно для поверхности вращения можно ввести аналоги долготы $q^1 = \lambda$ и широты $q^2 = \varphi$ [1, 12]. Метрические коэффициенты для этих координат обладают следующими свойствами: во-первых, элемент длины не зависит от долготы λ, во-вторых, всегда можно найти такие координаты, чтобы $H_2 = 1$. Таким образом, достаточно задать одну функцию $H_1(q^2)$ и элемент длины принимает вид

$$ds^2 = \left(H_1(q^2)dq^1\right)^2 + (dq^2)^2.$$

Отметим ещё две системы координат: изотермические

$$ds^2 = n^2(q^2)\left((dq^1)^2 + (dq^2)^2\right),$$

которые отличаются от декартовых множителем $n(q_2)$, и сохраняющие объём

$$ds^2 = (H_1(q_2)dq_1)^2 + (H_2(q_2)dq_2)^2, \quad H_1H_2 = 1.$$

Для сферы радиуса a элемент длины имеет нормальный вид для географических координат долготы λ и широты φ

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi\, d\lambda^2 + a^2\, d\varphi^2. \tag{22}$$

Изотермические координаты λ и $\theta = \operatorname{arctanh}\mu$ имеют элемент длины

$$ds^2 = a^2(1 - \tanh^2\theta)\left(d\lambda^2 + d\theta^2\right),$$

координаты λ и $\mu = \sin\varphi$, сохраняющие объём —

$$ds^2 = a^2(1-\mu^2)\,d\lambda^2 + \frac{a^2}{1-\mu^2}d\mu^2. \tag{23}$$

Если поверхность вращения движется с постоянной угловой скоростью Ω_0, то уравнения движения можно записать в форме Лагранжа [13, 14]

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q^k} + \frac{\partial(gh)}{\partial q^k} = 0, \quad k = 1, 2,$$

где T — функция Лагранжа, составленная из живой силы единицы массы жидкости,

$$T = \frac{1}{2}\left(\left(H_1\dot{q}^1\right)^2 + 2H_1^2\Omega_0\dot{q}^1 + \left(H_2\dot{q}^2\right)^2\right).$$

Данную функцию Лагранжа можно получить, если перейти к системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω_0 вокруг оси симметрии, и, чтобы поверхность вращения была эквипотенциальной, не учитывать центробежную силу. Данная процедура описана в [14] для сферы и может быть проведена для произвольной поверхности вращения. Однако в настоящей работе вывод уравнений мелкой воды не рассматривается. Исследование этого вопроса дано в работе [15].

Учитывая отсутствие зависимости метрических коэффициентов H_1 и H_2 от q_1 и вид параметра Кориолиса

$$f = -2\Omega_0\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2}, \tag{24}$$

уравнения движения (1)–(3) упрощаются и принимают вид

$$\frac{du_1}{dt} + \left[2\Omega_0 + \frac{u_1}{H_1}\right]\frac{u_2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial(gh)}{\partial q^1} = 0,$$

$$\frac{du_2}{dt} - \left[2\Omega_0 + \frac{u_1}{H_1}\right]\frac{u_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial(gh)}{\partial q^2} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q^1}(hu_1) + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial q^2}(H_1hu_2) = 0.$$

Таким образом, на произвольной поверхности вращения уравнения могут быть записаны так, что они будут зависить только от угловой скорости Ω_0 и одного коэффициента Ламе $H_1(q^2)$ только с одной переменной q^2.

Отметим также, что скобка (10) зависит от единственной функции

$$fD = -\Omega_0\frac{dH_1^2}{dq^2}. \tag{25}$$

2.3. Уравнения на сфере

Для приложений важной является система уравнений на сфере. Хотя система координатных линий на сфере задается параллелями и меридианами, существует возможность по-разному нумеровать параллели, что приводит к разным системам координат.

2.3.1. Географическая система координат

Для описания глобальных атмосферных процессов обычно используют уравнения мелкой воды на сфере. Самой известной системой координат является геодезическая, или сферическая, которая задаёт положение точки на сфере с помощью долготы $\lambda = q^1$ и широты $\varphi = q^2$. Из других систем координат для сферы укажем картографические проекции [16]. Элементом расстояния для сферической системы координат является выражение (22). Уравнения движения и неразрывности принимают стандартный вид [3]

$$\frac{du}{dt} - \left[f + \frac{\sin\varphi}{a\cos\varphi}u\right]v + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial(gh)}{\partial\lambda} = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} + \left[f + \frac{\sin\varphi}{a\cos\varphi}u\right]u + \frac{1}{a}\frac{\partial(gh)}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(hu) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(hv\cos\varphi)\right] = 0,$$

где полная производная имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

и функция Кориолиса $f = 2\Omega_0\sin\varphi$. Заметим, что широта экватора не обязательно должна равняться нулю. Сферическая система координат допускает сдвиги долготы и широты на произвольные углы. В этом случае уравнения сохраняют прежний вид, однако функция Кориолиса меняет своё выражение [17].

Гамильтонова структура данных уравнений определяется скобкой Пуассона

$$\hat{J}(\lambda,\varphi;u,v,h) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f+\omega}{h\,a^2\cos\varphi} & \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{a^2\cos\varphi} \\ \frac{f+\omega}{h\,a^2\cos\varphi} & 0 & \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{a^2\cos\varphi} \\ \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{a\cos\varphi} & \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

с завихренностью

$$\omega = \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(av) - \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\,a\cos\varphi)\,,$$

и гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int\left[u^2 + v^2 + gh\right]h\,a^2 cos\varphi\,d\lambda d\varphi.$$

2.3.2. Координаты λ и μ

Для переменных λ и $\mu = \sin\varphi$ элемент длины есть (23) и уравнения содержат лишь рациональные выражения

$$\frac{du}{dt} - \left[f + \frac{\mu}{a\sqrt{1-\mu^2}}u\right] v + \frac{1}{a\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial(gh)}{\partial\lambda} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{dv}{dt} + \left[f + \frac{\mu}{a\sqrt{1-\mu^2}}u\right] u + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{a}\frac{\partial(gh)}{\partial\mu} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\lambda}(hu) + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{1-\mu^2}hv\right) = 0, \tag{29}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\sqrt{1-\mu^2}v}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}.$$

Важной особенностью данной системы координат, кроме сохранения объёма, является линейный вид функции Кориолиса $f = 2\Omega_0\mu$, что дает линейное выражение для комбинации (25), в силу чего скобка Пуассона имеет вид

$$\hat{J}(\lambda,\mu;u,v,h) = \frac{1}{a^3}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2\Omega_0\mu+\omega}{h}a & \dfrac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\dfrac{\partial}{\partial\lambda} \\ \dfrac{2\Omega_0\mu+\omega}{h}a & 0 & \sqrt{1-\mu^2}\dfrac{\partial}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\dfrac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} & \dfrac{\partial}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\omega = \frac{1}{a\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{1-\mu^2}u\right).$$

Гамильтониан принимает наиболее простое выражение

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \left[u^2 + v^2 + gh\right] h\, a^2 d\lambda d\mu.$$

2.3.3. Изотермические координаты λ и θ

Для полноты изложения приведём уравнения для изотермических координат

$$\frac{du}{dt} - \left[f + \frac{u\tanh\theta}{a\sqrt{1-\tanh^2\theta}}\right] v + \frac{1}{a\sqrt{1-\tanh^2\theta}}\frac{\partial(gh)}{\partial\lambda} = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} + \left[f + \frac{u\tanh\theta}{a\sqrt{1-\tanh^2\theta}}\right] u + \frac{1}{a\sqrt{1-\tanh^2\theta}}\frac{\partial(gh)}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a\sqrt{1-\tanh^2\theta}}\frac{\partial}{\partial\lambda}(hu) + \frac{1}{a\left(1-\tanh^2\theta\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(hv\sqrt{1-\tanh^2\theta}\right) = 0,$$

где $f = 2\Omega_0 \tanh\theta$. Отметим особенность изотермических переменных для уравнений мелкой воды на произвольной поверхности вращения. Линеаризованные уравнения относительно состояния покоя в изотермических переменных q_1 и q_2 и без учета вращения принимают простой вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial (g\eta)}{\partial q^1} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial (g\eta)}{\partial q^2} = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial q^1}(h_0 H_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial q^2}(h_0 H_1 u_2)\right) = 0, \tag{32}$$

где $\eta = h - h_0$ — отклонение высоты свободной поверхности от постоянной высоты h_0 покоящейся жидкости. Исключение переменных u_1 и u_2 из уравнений (30)–(32) дает волновое уравнение с “плоским” лапласианом

$$\frac{\partial^2 (H_1^2 \eta)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (g h_0\, \eta)}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 (g h_0\, \eta)}{\partial q_2^2}.$$

В присутствии вращения сведение к одному линейному уравнению можно провести по аналогии с работой [18].

2.4. Уравнения на эллипсоиде

На эллипсоиде можно ввести систему координат, близкую к сферической. Отметим, что в этом случае система координатных линий, как и для сферы, состоит из меридианов и параллелей. Однако нумерация параллелей возможна различными способами. Если рассмотреть точку на эллипсоиде, то её широту можно задавать *геоцентрической* широтой Φ — углом между экваториальной плоскостью и прямой, проходящей через выбранную точку и центр эллипсоида; *геодезической* (или *географической*) широтой φ — углом между экваториальной плоскостью и нормалью, выходящей из выбранной точки; *приведённой* широтой ψ — углом между экваториальной плоскостью и прямой, проходящей через выбранную точку и пересекающей малую ось на расстоянии a. Для перехода от уравнений на эллипсоиде к уравнениям на сфере удобнее в качестве координат использовать долготу $q^1 = \lambda$ и приведённую широту $q^2 = \psi$ [1]. Элемент длины для этих переменных

$$ds^2 = a^2 \cos^2\psi\, d\lambda^2 + a^2(1 - e^2\cos^2\psi)\, d\psi^2. \tag{33}$$

В данных координатах коэффициент Ламе H_1 имеет одинаковый с географическими координатами для сферы вид, что приводит к аналогичным уравнениям движения и неразрывности

$$\frac{du}{dt} - \left[f + \frac{\sin\psi}{a\cos\psi\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}} u\right] v + \frac{1}{a\cos\psi}\frac{\partial (gh)}{\partial \lambda} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{dv}{dt} + \left[f + \frac{\sin\psi}{a\cos\psi\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}} u\right] u + \frac{1}{a\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}}\frac{\partial (gh)}{\partial \psi} = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{a\cos\psi\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(hu\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}(hv\cos\psi)\right]=0, \qquad (36)$$

где полная производная

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v}{a\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}}\frac{\partial}{\partial\psi}$$

и функция Кориолиса равна проекции вектора угловой скорости на нормаль к поверхности $f=2\Omega_0\sin\varphi$, φ — географическая широта точки. Функция f через приведённую широту ψ имеет выражение

$$f=2\Omega_0\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}}.$$

Далее будет показано, что эти уравнения отличаются от уравнений на сфере с точностью до членов малого порядка.

3. Приближённые уравнения на касательной поверхности

Приближения на касательной плоскости для уравнений мелкой можно охарактеризовать как приближения в окрестности фиксированной точки, для которых геометрия становится декартовой (т. е. нет явной зависимости от пространственных координат) и параметр Кориолиса выражается простейшими степенными приближениями: в нулевом порядке — это приближение f-плоскости, когда параметр Кориолиса f аппроксимируется константой, в первом порядке — приближение бета-плоскости, когда параметр Кориолиса аппроксимируется линейной функцией.

3.1. Приближение f-плоскости

Самое простое приближение получается, если аппроксимировать параметр Кориолиса f его постоянным значением f_0 в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0=(0,\varphi_0)$ на сфере с координатами $\lambda=0$ и $\varphi=\varphi_0$. Для определённости будем считать $\varphi_0>0$, т. е. рассматриваем Северное полушарие.

Чтобы получить приближённые уравнения, введём локальные координаты

$$\tilde{x}=a\cos\varphi_0\lambda, \quad \tilde{y}=a(\varphi-\varphi_0).$$

С помощью этих переменных получим следующее выражение для элемента длины и параметра Кориолиса:

$$ds^2=\frac{\cos^2((\tilde{y}/a)+\varphi_0)}{\cos^2\varphi_0}d\tilde{x}^2+d\tilde{y}^2, \quad f=2\Omega_0\sin((\tilde{y}/a)+\varphi_0).$$

Подставив параметр $F=\tilde{x}f(\tilde{y})=-2\tilde{x}\Omega_0\sin((\tilde{y}/a)+\varphi_0)$ и метрические коэффициенты $H_1=\dfrac{\cos((\tilde{y}/a)+\varphi_0)}{\cos\varphi_0}$, $H_2=1$ в (11), получим

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int\left[\left(V_1+\frac{\partial\xi}{\partial\tilde{x}}\right)^2\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2((\tilde{y}/a)+\varphi_0)}+\left(V_2+\frac{\partial\xi}{\partial\tilde{y}}-\tilde{x}f(\tilde{y})\right)^2+\frac{gH\cos\varphi_0}{\cos((\tilde{y}/a)+\varphi_0)}\right]Hd\tilde{x}d\tilde{y}.$$

Считая, что $\tilde{y}/a$ — малая величина, в нулевом приближении получим

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\int \left[\left(V_1 + \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(V_2 + \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{y}} - \tilde{x} f_0 \right)^2 + gH \right] H \, d\tilde{x} d\tilde{y},$$

где $f_0 = f|_{\tilde{y}=0} = 2\Omega_0 \sin\varphi_0$. Сделав обратное преобразование, получим систему для уравнений мелкой воды с постоянным параметром Кориолиса.

3.1.1. Постоянный параметр Кориолиса для скобки

Из общего выражения для параметра Кориолиса (24) выпишем условие на коэффициенты Ламе

$$f = -2\Omega_0 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} = f_0, \tag{37}$$

при котором параметр Кориолиса постоянный. Как было видно из предыдущих примеров, параметр Кориолиса всегда переменный. Найдем такую замену переменных, чтобы данный параметр стал постоянным. Для этого определим выражение широты $\varphi(y)$ как функцию новой переменной y. Считаем $\varphi(0) = \varphi_0$. Тогда элемент длины (22) принимает вид

$$ds^2 = a^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + a^2 \left(\varphi'\right)^2 dy^2, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dy}.$$

В новых переменных получим выражение для параметра Кориолиса

$$f = 2\Omega_0 \sin\varphi(y).$$

Это выражение может быть константой, если $\varphi(y)$ также является константой, что предполагает вырожденность преобразования.

Другая возможность решения данной задачи состоит в том, чтобы сделать постоянным член fD, участвующий в определении скобки Пуассона. Запишем это условие как

$$fD = -\Omega_0 \frac{d\left[a^2 \cos^2 \varphi(y)\right]}{dy} = f_0 D_0 \neq 0, \tag{38}$$

где f_0 и D_0 — соответствующие значения функций f и D в точке $\mathbf{x}_0$. Интегрирование уравнения (38) дает

$$\cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi_0 - c_0 y, \quad c_0 = \frac{f_0 D_0}{a^2 \Omega_0}.$$

Получим далее явное выражение для $\varphi(y)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos\left(c_0 y - \cos 2\varphi_0\right)$$

и выражение для элемента длины

$$ds^2 = a^2 \left(\cos^2 \varphi_0 - c_0 y\right) d\lambda^2 + \frac{a^2 c_0^2}{4(\cos^2 \varphi_0 - c_0 y)(\sin^2 \varphi_0 + c_0 y)} dy^2.$$

Приведённые формулы действительны только в области, в которой существует обратная функция $\varphi(y)$. Для этого достаточно, чтобы производная $\varphi' = -\dfrac{1}{\sin(2\varphi)}$ не равнялась нулю. Для полушарий данное условие выполняется, поскольку в правой части возникает деление на ноль только для $\varphi = 0, \pm\pi/2$. Чтобы определить значение c_0, заметим, что при $y = 0$

$$f|_{y=0} = 2\Omega_0 \sin\varphi_0 = f_0, \quad D^2|_{y=0} = \frac{a^4 c_0^2}{4\sin^2\varphi_0} = D_0^2.$$

При сравнении этого выражения с определением для c_0 видно, что c_0 может принимать любое положительное значение и означает дополнительное растяжение переменной y. Без потери общности положим $c_0 = 1$. Теперь можно выписать гамильтоново уравнение для ковариантных компонент скорости

$$U = ua\sqrt{\cos^2\varphi_0 - y}, \quad V = v\frac{a}{2\sqrt{(\cos^2\varphi_0 - y)(\sin^2\varphi_0 + y)}}, \quad H = h\frac{a^2}{2\sqrt{\sin^2\varphi_0 + y}}.$$

Скобка Пуассона будет задаваться оператором

$$\hat{J}(\lambda, y; U, V, H) = \begin{pmatrix} 0 & -q & \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \\ q & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix},$$

где потенциальный вихрь

$$q = \frac{1}{H}\left(\Omega_0 a^2 + \frac{\partial V}{\partial\lambda} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

не зависит от y. Таким образом, эта скобка совпадает с соответствующей скобкой для уравнений на плоскости с постоянным параметром Кориолиса. Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{U^2}{\cos^2\varphi_0 - y} + 4V^2(\cos^2\varphi_0 - y)(\sin^2\varphi_0 + y) + \right.$$
$$\left. + 2gH\sqrt{\sin^2\varphi_0 + y}\right] H\,d\lambda dy. \tag{39}$$

Разложение гамильтониана (39) по малым y дает

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{U^2}{\cos^2\varphi_0} + 4V^2\cos^2\varphi_0\sin^2\varphi_0 + 2gH\,\sin\varphi_0\right] H\,d\lambda dy,$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2a^2}\int y\left[\frac{U^2}{\cos^4\varphi_0} + 4V^2(\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0) + \frac{gH}{\sin\varphi_0}\right] H\,d\lambda dy.$$

Для приведения уравнений в нулевом порядке к классическому виду (12)–(14) необходимо произвести масштабные преобразования зависимых и независимых переменных.

3.2. Приближение бета-плоскости

Для получения приближения бета-плоскости, при котором параметр Кориолиса считается линейной функцией, удобно использовать переменные λ и μ, поскольку параметр Кориолиса $f = 2\Omega_0\mu$ уже имеет линейный вид. Кроме того функция $fD = 2\Omega_0\mu a^2$ также линейна по μ, что позволяет не разлагать скобку Пуассона для малых отклонений.

3.2.1. Разложение коэффициентов Ламе

Если в разложении элемента длины сохранять его квадратичный вид, то уравнения с приближёнными коэффициентами Ламе будут по-прежнему иметь гамильтонову структуру. Однако в уравнениях, соответствующих приближённому элементу длины, могут появляться члены меньшего порядка, чем удержанные для разложения коэффициентов Ламе. Тем не менее учет избыточных членов гарантирует сохранение гамильтониана и геометрических свойств скобки Пуассона, что является необходимым условием при построении приближений для гамильтоновых систем.

Введём безразмерные переменные $l = (a/L)\lambda$ и $m = (a/L)\mu$, где L — характерная длина движений, для которых строятся приближённые уравнения [17]. Предполагаем, что масштаб движений L много меньше радиуса Земли a, поэтому основным малым параметром является их отношение L/a. Тогда элемент длины (23)

$$ds^2 = L^2\left(1 - \frac{L^2m^2}{a^2}\right)dl^2 + L^2\left(1 - \frac{L^2m^2}{a^2}\right)^{-1}dm^2.$$

Чтобы можно было разлагать коэффициенты Ламе H_1 и H_2 в любом порядке с сохранением гамильтоновой структуры, которая определяется этими коэффициентами, введём дополнительные малые величины ε и δ из условий

$$H_1^2 = (1-\varepsilon)^2 = 1 - \frac{L^2m^2}{a^2}, \quad H_2^2 = (1+\delta)^2 = \left(1 - \frac{L^2m^2}{a^2}\right)^{-1}. \tag{40}$$

Разложения зависимостей (40) дают в первых порядках следующие члены:

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \frac{L^2m^2}{a^2}} \approx \frac{L^2m^2}{2a^2} + \frac{L^4m^4}{8a^4}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L^2m^2}{a^2}}} - 1 \approx \frac{L^2m^2}{2a^2} + \frac{3L^4m^4}{8a^4},$$

которые можно использовать для получения приближённых уравнений.

При введённых переменных уравнения (27)–(29) принимают вид

$$L\frac{du}{dt} - \left[2\Omega_0\frac{L}{a}Lm + (1+\delta)\frac{L^2}{a^2}m\,u\right]v + (1+\delta)\frac{\partial(gh)}{\partial l} = 0, \tag{41}$$

$$L\frac{dv}{dt} + \left[2\Omega_0\frac{L}{a}Lm + (1+\delta)\frac{L^2}{a^2}m\,u\right]u + (1-\varepsilon)\frac{\partial(gh)}{\partial m} = 0, \tag{42}$$

$$L\frac{\partial h}{\partial t} + (1+\delta)\frac{\partial}{\partial l}(hu) + \frac{\partial}{\partial m}((1-\varepsilon)hv) = 0, \tag{43}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{L}\left(L\frac{\partial}{\partial t} + (1+\delta)u\frac{\partial}{\partial l} + (1-\varepsilon)v\frac{\partial}{\partial m}\right), \tag{44}$$

и гамильтониан преобразуется как

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \left[u^2 + v^2 + gh\right] h\,(1-\varepsilon)(1+\delta)L^2 dldm. \tag{45}$$

Заметим, что коэффициент L^2 может быть исключен из гамильтониана (45) при подходящем преобразовании времени.

Прежде чем рассматривать приближения отметим, что точное сохранение вида гамильтониана выполняется только при согласованном разложении H_1 и H_2, для которого сохраняется условие $H_1H_2 = (1-\varepsilon)(1+\delta) = 1$. Однако согласованное разложение H_1 и H_2 в произвольном порядке не будет степенным по малому параметру L/a за исключением разложения нулевого порядка.

Разлагая H_1 и H_2 по L/a и оставляя в уравнениях (41)–(43) члены первого порядка по L/a, что соответствует $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$, получим хорошо известное приближение бета-плоскости

$$L\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial l} + v\frac{\partial u}{\partial m} - 2\Omega_0\frac{L}{a}Lmv + \frac{\partial(gh)}{\partial l} = 0, \tag{46}$$

$$L\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial l} + v\frac{\partial v}{\partial m} + 2\Omega_0\frac{L}{a}Lmu + \frac{\partial(gh)}{\partial m} = 0, \tag{47}$$

$$L\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(hu) + \frac{\partial}{\partial m}(hv) = 0. \tag{48}$$

Если использовать разложение H_1 и H_2 с точностью до второго порядка по L/a, что соответствует $\varepsilon = \delta = \dfrac{L^2m^2}{2a^2}$, то для точного сохранения энергии

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \left[u^2 + v^2 + gh\right] h\,\left(1 - \frac{L^2m^2}{2a^2}\right)\left(1 + \frac{L^2m^2}{2a^2}\right) L^2 dldm$$

потребуется в уравнениях движения (41)–(43) использовать члены четвертого порядка $\delta L^2/a^2$. Это является следствием того, что разложения скобки Пуассона и гамильтониана содержат члены второго порядка, в силу чего их произведение составляет четвертый порядок малости.

3.2.2. Приближение в гамильтоновом виде

Если ввести новые переменные

$$U = uL(1-\varepsilon), \quad V = vL(1+\delta),$$

то систему (41)–(43) можно записать в гамильтоновом виде

$$L\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} U \\ V \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -q & \dfrac{\partial}{\partial l} \\ q & 0 & \dfrac{\partial}{\partial m} \\ \dfrac{\partial}{\partial l} & \dfrac{\partial}{\partial m} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta U} \\ \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta V} \\ \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta h} \end{pmatrix} = 0$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \left[U^2 \left(1 - \frac{L^2m^2}{a^2}\right)^{-1} + V^2 \left(1 - \frac{L^2m^2}{a^2}\right) + ghL^2\right] h\, dldm \tag{49}$$

и потенциальным вихрем

$$q = \frac{1}{h}\left(2\Omega_0 \frac{L}{a} Lm + \frac{\partial V}{\partial l} - \frac{\partial U}{\partial m}\right).$$

Приближённые уравнения получаются, если разлагать не скобку Пуассона, а только гамильтониан (49) по малому параметру L/a, что дает в нулевом и первом порядке сумму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1,$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\int \left[U^2 + V^2 + ghL^2\right] h\, dldm, \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\int \frac{L^2m^2}{a^2}\left[U^2 - V^2\right] h\, dldm.$$

В результате для нулевого порядка получаем классические уравнения на бета-плоскости (46)–(48). Для следующего порядка сохраняем гамильтониан $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ и получаем систему, содержащую члены третьего порядка при параметре Кориолиса, который является результатом перемножения членов первого порядка из скобки Пуассона и второго порядка из разложения гамильтониана. Несмотря на то что $\mathcal{H}_1$ содержит разность квадратов $U^2 - V^2$, приближённый гамильтониан $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ по-прежнему остается положительно определённым, поскольку разложение коэффициента при U^2 положительно в любом порядке малости.

4. Приближение по малому эксцентриситету

Очевидно, что при $e = 0$ уравнения на эллипсоиде переходят в уравнения на сфере. Для Земли эксцентриситет e является малым параметром, поэтому в аналитических исследованиях и численных расчётах по геофизической гидродинамике используют уравнения на сфере. Тем не менее возникает вопрос о влиянии этого параметра на вид уравнений.

4.1. Прямое разложение

Поскольку эксцентриситет e входит в уравнения в виде одной комбинации $(1 - e^2 \times \cos^2\psi)^{-1/2}$, удобно ввести малую функцию ε, для которой разложение по e^2 имеет вид

$$\varepsilon(e,\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}} - 1 = \frac{1}{2}e^2\cos^2\psi + O(e^4\cos^4\psi).$$

Тогда элемент длины (33) запишется как

$$ds^2 = a^2\cos^2\psi\, d\lambda^2 + \frac{a^2}{(1+\varepsilon)^2}d\psi^2.$$

В результате уравнения движения (34)–(36) можно представить в виде суммы уравнений, совпадающих с уравнениями на сфере, и добавки, пропорциональной ε:

$$\frac{du}{dt} - (1+\varepsilon)\left[2\Omega_0 + \frac{1}{a\cos\psi}u\right]v\sin\psi + \frac{1}{a\cos\psi}\frac{\partial(gh)}{\partial\lambda} = 0, \tag{50}$$

$$\frac{dv}{dt} + (1+\varepsilon)\left[2\Omega_0 + \frac{1}{a\cos\psi}u\right]u\sin\psi + (1+\varepsilon)\frac{1}{a}\frac{\partial(gh)}{\partial\psi} = 0, \tag{51}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(hu) + (1+\varepsilon)\frac{1}{a\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(hv\cos\psi) = 0, \tag{52}$$

где полная производная

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + (1+\varepsilon)\frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\psi}.$$

Так как коэффициент H_2 входит в уравнения только в виде множителя $H_2^{-1} = (1+\varepsilon)/a$, удобно все приближения по малому эксцентриситету e получать как разложения по малой функции ε. При этом в любом порядке разложения функция ε по малому параметру e сохраняет вид уравнений с линейной комбинацией по приближённой ε. Квадратичный вид элемента длины также сохраняется, однако содержит избыточные члены меньшего порядка. При любом приближении ε сохраняется гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int\left[u^2 + v^2 + gh\right]h\,\frac{a^2}{1+\varepsilon}\cos\psi\,d\lambda d\psi.$$

4.2. Разложение гамильтониана

Введение новых переменных

$$U = u\,a\cos\psi, \quad V = v\frac{a}{1+\varepsilon}, \quad H = h\frac{a^2}{1+\varepsilon}\cos\psi \tag{53}$$

приводит уравнения (50)–(52) к гамильтоновой системе со скобкой Пуассона

$$\hat{J}(\lambda,\psi;U,V,H) = \begin{pmatrix} 0 & -q & \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \\ q & 0 & \dfrac{\partial}{\partial\psi} \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} & 0 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

где потенциальный вихрь

$$q = \frac{1}{H}\left(\Omega_0\sin(2\psi) + \frac{\partial V}{\partial\lambda} - \frac{\partial U}{\partial\psi}\right)$$

не зависит от ε. Таким образом, скобка (54) совпадает с соответствующей скобкой (26) для уравнений на сфере и гамильтониан системы (50)–(52)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2a^2}\int\left[U^2\frac{1}{\cos^2\psi} + V^2(1+\varepsilon)^2 + gH\,\frac{1+\varepsilon}{\cos\psi}\right]H\,d\lambda d\psi \tag{55}$$

квадратично зависит от ε. Поэтому разложение гамильтониана (55) содержит только три слагаемых

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{U^2}{\cos^2\psi} + V^2 + \frac{gH}{\cos\psi}\right] H\, d\lambda d\psi +$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\varepsilon\left[2V^2 + \frac{gH}{\cos\psi}\right] H\, d\lambda d\psi + \frac{1}{2a^2}\int\varepsilon^2 V^2 H\, d\lambda d\psi.$$

Отличие данного гамильтонова приближения от приближения, полученного в предыдущем параграфе, состоит в полном сохранении скобки Пуассона (54) и степенной зависимости гамильтониана (55) от ε. Однако сами уравнения движения для зависимых переменных (53) содержат члены, квадратичные по ε, в то время как уравнения (50)–(52) содержали ε линейно.

Полученные приближённые уравнения требуют дальнейшего исследования. Поскольку уравнения на f-плоскости и бета-плоскости хорошо исследованы, то главный вопрос состоит в области применимости преобразований при переходе от сферической геометрии к плоской. Хотя уравнения получаются одинакового вида, переход к ним может иметь особенности и разные области обратимости. Вопрос об использовании высших приближений также нуждается в дальнейшем исследовании. Вместе с тем можно полагать, что изучение систем со степенной неоднородностью несколько легче в сравнении с системами с рациональной или тригонометрической неоднородностью.

Список литературы

[1] Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1969.

[2] Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.

[3] Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

[5] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. 2-е изд. М.: Наука, 1986.

[6] Медведев С.Б. Теорема Дарбу для полевых гамильтоновых систем // Весник НГУ. А. 2004. Т. 4, № 1. С. 37–55.

[7] Olver P.J. Hamiltonian perturbation theory and water waves // Contemparary Math. 1984. Vol. 28. P. 231–249.

[8] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

[9] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.

[10] Вильямсон Д. Разностные аппроксимации уравнений движения жидкости на сфере // Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

[11] Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоиздат, 1989.

[12] Норден А.П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.

[13] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: ФМЛ, 1963.

[14] Хинкельман К.Г. Полные уравнения // Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1969.

[15] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся сфере // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 3. С. 135–145.

[16] Haltiner G.J. Numerical Weather Prediction. New-York: Wiley, 1971.

[17] Verkley W.T.M. On the beta plane approximation // J. of Atmosph. Sci. 1990. Vol. 47, No. 20. P. 2453–2460.

[18] Müller D., O'Brien J.J. Shallow water waves on rotating sphere // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, No. 5. P. 4418–4431.

Поступила в редакцию 27 февраля 2011 г.,
с доработки — 29 октября 2012 г.