

## Идентификация параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных уравнений

А. С. Овсиенко

*Самарский государственный технический университет, Россия*

e-mail: sanabella@yandex.ru

Рассматривается метод параметрической идентификации процесса аномальной диффузии, использующий результаты измерений мгновенных значений импульсной характеристики данного процесса. Предложена итерационная процедура, позволяющая свести задачу к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Проведены численные исследования, результаты которых позволяют сделать вывод об эффективности и высокой точности разработанного алгоритма оценивания.

*Ключевые слова:* аномальная диффузия, параметрическая идентификация, линейно-параметрическая дискретная модель, разностное уравнение.

### Введение

Проблема параметрической идентификации динамических систем занимает важное место в современном математическом моделировании [1]. Особый интерес представляет решение задачи параметрической идентификации процессов, описываемых не обыкновенными дифференциальными уравнениями, а при помощи дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка. За последние годы исследование подобных явлений привлекает всё большее внимание, что связано с необходимостью решения значительного числа практических задач. В связи с этим задача параметрической идентификации таких систем становится в ряд весьма перспективных и вызывает естественный интерес специалистов в области математического моделирования.

Развитие теории дробно-дифференциального направления подразумевает обязательную привязку к содержательным приложениям. Одним из наиболее интересных приложений в этой области являются процессы аномальной диффузии [2], под которыми подразумевается всё многообразие процессов переноса с диффузионными закономерностями, в том числе перенос массы, энергии, электрического заряда и т. д.

При определении параметров линейной динамической системы достаточно широко используются методы идентификации на основе результатов измерений мгновенных значений  $\tilde{y}_k$  реакции системы на некоторое типовое тестовое воздействие, например, путём применения моделей авторегрессии или скользящего среднего [3]. Обычно эти модели не учитывают случайный характер возмущений  $\varepsilon_k$  в результатах наблюдений  $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$  и построенные на их основе численные алгоритмы не используют статистические методы обработки результатов эксперимента и обладают низкой помехозащищённостью. Устранить указанный недостаток позволяет применение линейно-параметрических дискретных моделей (ЛПДМ) [4, 5]. Особенностью данных моделей

является наличие функциональной зависимости между коэффициентами линейно-параметрической дискретной модели и параметрами динамического процесса.

В настоящей работе предложен метод определения параметров процесса аномальной диффузии, описываемого в терминах дробного дифференциального исчисления. Разработанная процедура идентификации основана на построении разностных уравнений исследуемого процесса и среднеквадратичном оценивании коэффициентов дискретной модели. Особенность метода — применение новой итерационной процедуры вычисления оценок коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Исследована сходимость предложенной итерационной процедуры и приведены результаты её применения при решении задачи определения параметров процесса аномальной диффузии.

## 1. Постановка задачи

Математическая модель процесса аномальной диффузии может быть выражена при помощи дробно-дифференциального уравнения с дробными производными по пространству и времени:

$$\frac{\partial^\gamma c(x, t)}{\partial t^\gamma} = d \frac{\partial^\alpha c(x, t)}{\partial x^\alpha}, \quad (1)$$

здесь  $t > 0$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $c(x, t)$  — объёмная концентрация диффундирующих частиц,  $d(x)$  — коэффициент диффузии. Дробная производная произвольного порядка  $\beta$  имеет вид

$$(D^\beta f)(x) = \frac{d^{[\beta]}}{dx^{[\beta]}} (D^{\beta-[\beta]} f)(x) = \frac{1}{\Gamma([\beta] + 1 - \beta)} \frac{d^{[\beta]+1}}{dx^{[\beta]+1}} \int_0^x \frac{f(\Theta) d\Theta}{(x - \Theta)^{\beta-[\beta]}},$$

где  $[\beta]$  — целая часть числа  $\beta$ . Начальные условия для уравнения (1) будут следующими:

$$c(x, 0) = c_0(x). \quad (2)$$

Краевые условия по пространственной координате за пределами исследуемого интервала принимаются равными нулю.

Численное решение уравнения аномальной диффузии было получено [6, 7] при помощи формулы Грюнвальда — Летникова. Явная схема численного решения дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии имеет вид

$$\frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{l=0}^{k+1} g_{\gamma,l} c_i^{k-l+1} = \frac{d_i}{h^\alpha} \sum_{n=0}^{i+1} g_{\alpha,n} c_{i-n+1}^k, \quad (3)$$

где коэффициенты  $g_{\gamma,l}$  и  $g_{\alpha,n}$  определяются как

$$g_{\beta,s} = \frac{\Gamma(s - \beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(s + 1)}. \quad (4)$$

Порядок аппроксимации точного решения составляет  $O(h + \tau)$ . Схема (3) условно устойчива при  $\frac{\tau^\gamma d_{\max}}{h^\alpha} \leq \frac{\gamma}{\alpha}$ . Шаблон численной схемы представлен на рис. 1. Схема (3) будет использована при построении стохастических разностных уравнений процесса аномальной диффузии.

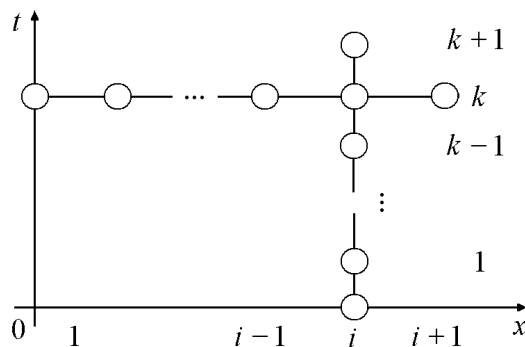


Рис. 1. Шаблон численной схемы (3)

## 2. Численный метод идентификации

Введём обозначения:  $N_t$  — объём выборки по времени,  $N_x$  — размерность пространственной выборки. При помощи элементарных преобразований выражение (3) можно представить в виде:

$$c_i^{k+1} = \frac{d_i \tau^\gamma}{h^\alpha} c_{i+1}^k + \frac{d_i \tau^\gamma}{h^\alpha} (-\alpha) c_i^k + \frac{d_i \tau^\gamma}{h^\alpha} (-\alpha) \sum_{j=0}^{i-1} M_j^\alpha c_{i-1-j}^k + \gamma c_i^k + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} M_j^\gamma c_i^{k-1-j}, \quad (5)$$

где

$$M_i^\nu = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{2-\nu}{3} \cdot \frac{3-\nu}{4} \cdot \dots \cdot \frac{i+1-\nu}{i+2}, \quad \nu = \gamma, \alpha; \quad i, k \geq 0.$$

В случае  $i = 0$  или  $k = 0$  соответствующие суммы в (5) принимают значения, равные нулю. Выражение (5) представляет собой рекуррентную зависимость значения концентрации в точке  $c(ih, (k+1)\tau)$  от её значений во всех “предыдущих” точках (см. рис. 1).

Рекуррентные соотношения (5) позволяют свести поставленную задачу идентификации процесса аномальной диффузии к построению линейно-параметрической дискретной модели и последующему оцениванию её коэффициентов, которые линейным образом связаны с подлежащими определению параметрами задачи типа задачи Коши (1), (2). Данный алгоритм среднеквадратичного оценивания позволяет учитывать в результатах измерений и стохастическую составляющую, что обеспечивает помехозащищённость метода.

На основе разностной схемы (5) может быть построена линейно-параметрическая дискретная модель, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P\varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

где  $b = (c_0^0, c_1^0, \dots, c_{N_x-1}^0, c_0^1, \dots, c_{N_x-1}^1, \dots, c_{N_x-1}^{N_t-1})^T$  —  $N_t N_x$ -мерный вектор правой части;  $F$  — матрица регрессоров  $(N_t N_x) \times (3N_x)$ ;  $\varepsilon$  —  $N_t N_x$ -мерный вектор случайной аддитивной помехи в результатах наблюдений;  $P$  — матрица размера  $N_t N_x \times N_t N_x$  в стохастическом уравнении эквивалентного возмущения;  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{N_t N_x})^T$  —  $N_t N_x$ -мерный вектор эквивалентного возмущения в стохастическом разностном уравнении. Вектор коэффициентов ЛПДМ (6)  $\lambda$  размера  $3N_x$  выражается через параметры решения дробно-диф-

ференциального уравнения (1) следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \gamma, & \lambda_{1+i} &= -\frac{\alpha\tau^\gamma d_{i-1}}{h^\alpha}, & i &= 1, 2, \dots, N_x, \\ \lambda_{1+N_x+i} &= \frac{\tau^\gamma d_{i-1}}{h^\alpha}, & i &= 1, 2, \dots, N_x - 1, \\ \lambda_{1+2N_x+i} &= c_0(ih), & i &= 0, 1, 2, \dots, N_x - 1.\end{aligned}\quad (7)$$

Матрица регрессоров  $F$  имеет вид

$$\begin{aligned}f_{N_x+i,1} &= c_{i-1}^0, & i &= 1, 2, \dots, N_x, \\ f_{2N_x+i,1} &= \frac{1-\gamma}{2}c_{i-1}^0 + c_{i-1}^1, & i &= 1, 2, \dots, N_x, \\ f_{(j-1)N_x+i,1} &= \sum_{k=0}^{j-4} \tilde{M}_{j-3-k}^\gamma c_{i-1}^k, & i &= 1, 2, \dots, N_x, \quad j = 4, 5, \dots, N_t, \\ f_{(j-1)N_x+1,2} &= c_0^{j-2}, & j &= 2, 3, \dots, N_t, \\ f_{(j-1)N_x+2,3} &= \frac{1-\alpha}{2}c_0^{j-2} + c_1^{j-2}, & j &= 2, 3, \dots, N_t, \\ f_{(j-1)N_x+i,1+i} &= \sum_{k=0}^{i-3} \tilde{M}_{i-2-k}^\alpha c_k^{j-2}, & i &= 3, 4, \dots, N_x, \quad j = 2, 3, \dots, N_t, \\ f_{(j-1)N_x+i,1+N_x+i} &= c_i^{j-2}, & i &= 1, 2, \dots, N_x, \quad j = 2, 3, \dots, N_t, \\ f_{i,2N_x+i} &= 1, & i &= 1, 2, \dots, N_x, \quad j = 2, 3, \dots, N_t.\end{aligned}\quad (8)$$

Элементы матрицы размера  $N_t N_x$  эквивалентного возмущения  $P$  в стохастическом уравнении (6) выражаются в виде

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -\lambda_{N_x+k+1}, & i = (m+1)N_x + k, \quad j = mN_x + k + 1, \\ & k = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad m = 0, 1, \dots, N_t - 2; \\ -\lambda_1 - \lambda_{k+1}, & i = (m+1)N_x + k, \quad j = mN_x + k, \\ & k = 1, 2, \dots, N_x, \quad m = 0, 1, \dots, N_t - 2; \\ -\lambda_1 M_{s-1}^\gamma, & i = (m+1+s)N_x + k, \quad j = mN_x + k, \\ & k = 1, 2, \dots, N_x, \quad m = 0, 1, \dots, N_t - 2 - s, \quad s = 1, 2, \dots, N_t - 2; \\ -\lambda_{k+1+s} M_{k-1}^\alpha, & i = (m+1)N_x + k + s, \quad j = mN_x + s, \\ & k = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad m = 0, 1, \dots, N_t - 2, \quad s = 1, 2, \dots, N_x - k; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}\quad (9)$$

При использовании среднеквадратичного критерия [3] на конечном множестве точек  $\{x_i, t_j\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_t - 1$ , где  $N_t N_x$  — объём выборки, минимизируется функционал

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \|c - \hat{c}\|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

или в развёрнутой форме

$$\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_t-1} (c_i^j - \hat{c}_i^j)^2 = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_t-1} (\hat{\varepsilon}_{j+(i-1)N_t})^2 \rightarrow \min,$$

где  $\hat{\varepsilon} = c_i^j - \hat{c}_i^j$  — вектор остатков,  $c_i^j$  — дискретные значения функции концентрации, полученные экспериментально,  $\hat{c}_i^j$  — искомые оценки значений функции концентрации. Оценки коэффициентов ЛПДМ находятся из условия минимизации среднеквадратичного отклонения (10) построенной модели пространственно-временной функциональной зависимости  $\hat{c}_i^j$  от экспериментальных данных  $c_i^j$ . С этой целью первое уравнение в (6) преобразуется к виду

$$P_{\hat{\lambda}}^{-1}b = P_{\hat{\lambda}}^{-1}F\hat{\lambda} + \hat{\varepsilon}. \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к минимизации функционала

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \left\| P_{\hat{\lambda}}^{-1}b - P_{\hat{\lambda}}^{-1}F\hat{\lambda} \right\|^2 \rightarrow \min. \quad (12)$$

Решение этой задачи на основе итерационной процедуры позволяет практически устранить смещение в оценках и тем самым добиться высокой точности результатов вычисления оценок параметров пространственно-временной функциональной зависимости [3].

Оценки коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели на начальном этапе реализации итерационной процедуры [3] вычисляются при помощи метода наименьших квадратов по формуле

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b, \quad (13)$$

где  $\hat{\lambda}$  — вектор оценок коэффициентов стохастического разностного уравнения. В соответствии с алгоритмом данной процедуры формируется последовательность приближённых решений

$$\hat{\lambda}^{(s)} = (F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(s-1)}}^{-1} F) F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(s-1)}}^{-1} b, \quad s = 1, 2, \dots, 3N_x. \quad (14)$$

Здесь  $\hat{\lambda}$  — вектор оценок коэффициентов стохастического разностного уравнения, вычисленный на  $s$ -м шаге,  $\Omega_{\hat{\lambda}^{(s-1)}}^{-1} = (P_{\hat{\lambda}^{(s-1)}} P_{\hat{\lambda}^{(s-1)}}^T)^{-1}$  — квадратная симметричная матрица размера  $N_t N_x \times N_t N_x$ , сходящаяся к решению  $\lambda$  матричного уравнения  $F^T (P_{\hat{\lambda}} P_{\hat{\lambda}}^T)^{-1} F \lambda = F^T (P_{\hat{\lambda}} P_{\hat{\lambda}}^T)^{-1} b$ . По найденным оценкам  $\hat{\lambda}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 3N_x$ , могут быть вычислены параметры функции (3).

Однако в выражении (2) содержатся параметры  $\gamma$  и  $\alpha$ , которые считаются неизвестными, в связи с чем описанный алгоритм идентификации требует существенного преобразования. Автором разработана итерационная процедура, позволяющая реализовать предложенный метод идентификации следующим образом: на первом шаге значения параметров  $\gamma$  и  $\alpha$  в формуле (2) принимаются равными некоторым начальным приближениям  $\gamma^{(0)}$  и  $\alpha^{(0)}$ , на следующем итерационном шаге значения параметров пересчитываются через оценки коэффициентов ЛПДМ, вычисленные на каждой итерации по формулам (13), (14), и с учётом (2) определяются следующим образом:

$$\hat{\alpha}^{(i)} = -\frac{\hat{\lambda}_2^{(i)}}{\hat{\lambda}_{2+N_x}^{(i)}}, \quad \hat{\gamma}^{(i)} = \hat{\lambda}_1^{(i)}. \quad (15)$$

После нескольких итераций оценки параметров  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\alpha}$  принимаются равными значениям  $\hat{\gamma}^{(i)}$  и  $\hat{\alpha}^{(i)}$ , вычисленным на последней итерации, а оценки остальных параметров

процесса (1) могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} \hat{d}_i &= \frac{h^{\hat{\alpha}} \hat{\lambda}_{2+N_x+i}}{\tau^{\hat{\gamma}}}, \quad i = 0, 1, \dots, N_x - 2, \\ \hat{d}_{N_x-1} &= -\frac{h^{\hat{\alpha}} \hat{\lambda}_{1+N_x}}{\tau^{\alpha \hat{\gamma}}}, \\ \hat{c}_0(ih) &= \hat{\lambda}_{1+2N_x+i}, \quad i = 0, 1, \dots, N_x - 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Описанный численный метод позволяет свести задачу оценивания параметров дробно-дифференциального уравнения к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели.

### 3. Результаты численного моделирования

Проведены численные исследования предложенной итерационной процедуры, включающие анализ сходимости разработанного метода и оценку погрешности вычисления параметров процесса аномальной диффузии на основе описанного подхода. В ходе исследований генерировалась выборка значений функции концентрации при заданных значениях параметров, в которую добавлялась случайная аддитивная помеха  $\varepsilon$  от 0 до 5%.

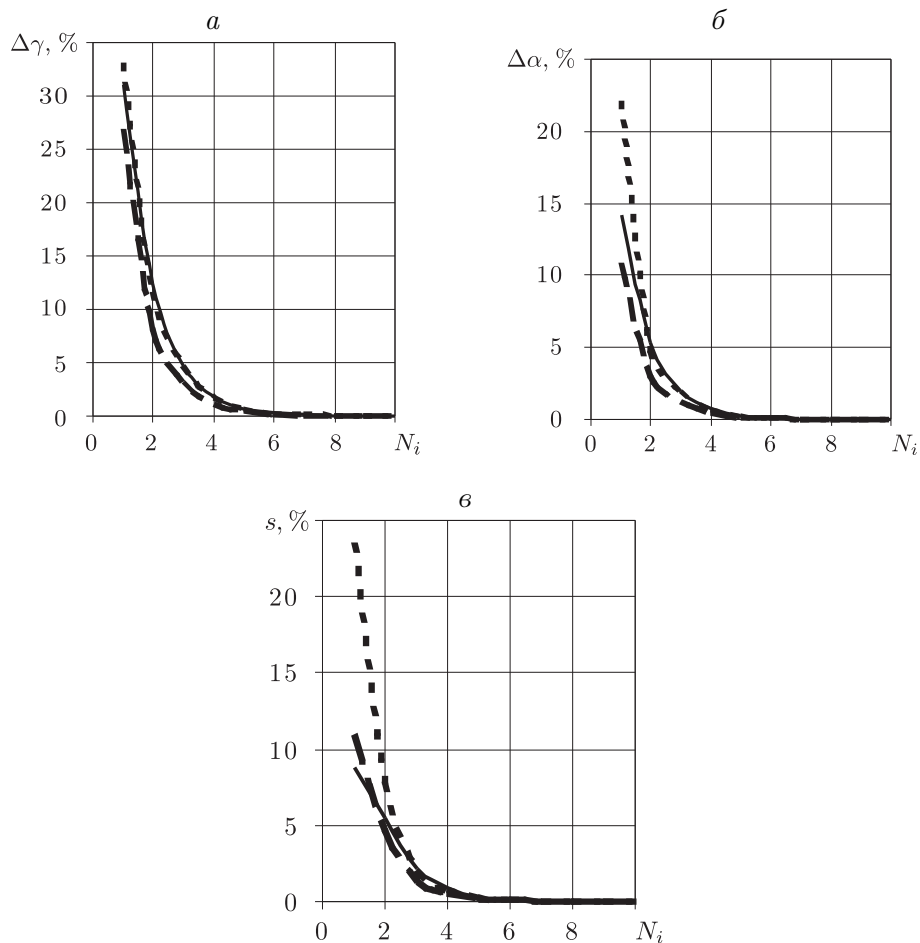


Рис. 2. Зависимость смещения оценки параметров  $\gamma$  (а),  $\alpha$  (б) и среднеквадратичного отклонения  $s$  (в) от числа итераций  $N_i$

На рис. 2, *a*, *б* показаны результаты исследований сходимости итерационной процедуры для различных значений начальных приближений  $\gamma^{(0)}$  и  $\alpha^{(0)}$  в зависимости от числа итераций. Исследования проводились на тестовом сигнале при  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha = 1.3$ ,  $c_0^i = 0.6$ ,  $d_i = 0.1$ ,  $i = 0, \dots, N_x$ ,  $N_t = 100$ ,  $N_x = 3$ ,  $h = 0.1$ ,  $\tau = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0$ . Данные усреднялись по пяти реализациям. Три линии на рисунках показывают результаты, полученные при различных значениях начальных приближений  $\gamma^{(0)}$  и  $\alpha^{(0)}$ . Видно, что

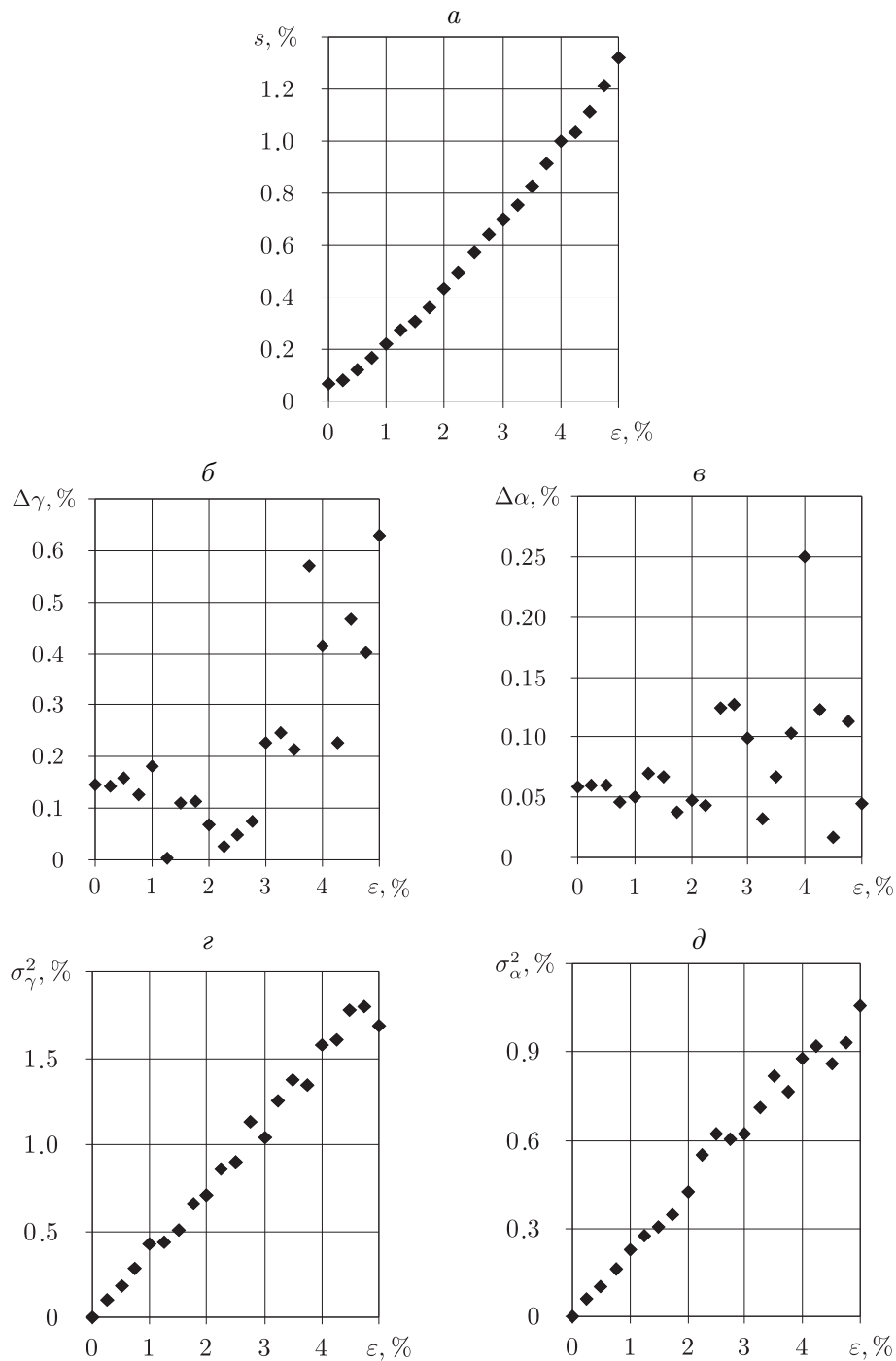


Рис. 3. Зависимости среднеквадратичного отклонения  $s$  (*a*), смещения оценок параметров  $\gamma$  (*б*),  $\alpha$  (*в*) и дисперсии оценок параметров  $\gamma$  (*г*),  $\alpha$  (*д*) от величины случайной аддитивной помехи  $\varepsilon$  в результатах наблюдений  $\varepsilon$

с ростом количества итераций величины смещения в оценках параметров  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\alpha}$ , а также среднеквадратичного отклонения модели  $s$  (рис. 2, в) от входной выборки данных стремятся к нулю, и при любых начальных приближениях  $\gamma^{(0)} \in (0, 1)$  и  $\alpha^{(0)} \in (1, 2)$  итерационная процедура сходится к точному решению уже при числе итераций  $N_i = 6$ .

На рис. 3 представлены графики зависимостей среднеквадратичного отклонения  $s$  построенной на основе результатов идентификации модели от точного решения, а также смещения  $\Delta$  и дисперсии  $\sigma^2$  оценок параметров дробных дифференциальных операторов, входящих в уравнение (1). Исследования проводились при начальных условиях, описанных выше. Результаты усреднялись по 100 реализациям. В качестве начальных приближений были выбраны значения  $\alpha^{(0)} = 1.5$  и  $\gamma^{(0)} = 0.5$  — середины соответствующих интервалов. Число итераций принималось равным  $N_i = 6$ . Случайная аддитивная помеха  $\varepsilon$  в результатах наблюдений считалась удовлетворяющей нормальному распределению. Из приведенных графиков видно, что при величине случайной аддитивной помехи  $\varepsilon = 5\%$  величина среднеквадратичного отклонения модели от экспериментальных данных и дисперсии порядков дробных дифференциальных операторов не превышают 2%, а смещения полученных оценок находятся в пределах 1%. Аналогичная картина наблюдается и в случае оценок коэффициентов диффузии, где дисперсия не превышает 5%, а смещение составляет менее 2%. Полученные данные свидетельствуют о том, что погрешность оценивания предложенным методом не превышает величины случайной аддитивной помехи в результатах наблюдений, что позволяет говорить о высокой эффективности описанной процедуры.

Были проведены также численные исследования смещения и дисперсии оценок в зависимости от периодов дискретизации  $\tau$  и  $h$ , показавшие, что представленный метод имеет высокую скорость сходимости на интервалах  $\tau \in (0.1, 0.25)$  и  $h \in (0.09, 0.17)$ . Применение метода в указанных интервалах периодов дискретизации позволяет минимизировать значения погрешности оценивания.

## Выводы

В работе предложен новый метод определения параметров дифференциального уравнения с частными дробными производными, описывающего процесс аномальной диффузии. Построены линейно-параметрические дискретные модели, связывающие в форме разностных уравнений результаты наблюдений мгновенных значений процесса аномальной диффузии. Приведена итерационная процедура формирования матрицы регрессоров, исследована сходимость данной процедуры. Численные исследования позволяют сделать вывод о высокой точности применения данного метода и возможности использования предложенного подхода при решении практических задач определения коэффициента диффузии и степени дробного дифференциального оператора.

Новизна представленного в работе метода заключается в разработке итерационной процедуры формирования матрицы регрессоров системы стохастических разностных уравнений, что даёт возможность перейти от обычной параметрической идентификации процесса аномальной диффузии (т. е. определения коэффициентов диффузии) к структурно-параметрической идентификации процесса, включающей определение порядков дробных дифференциальных операторов.



## Список литературы

- [1] Эйкхофф П., Ванечек А., Савараги Е. и др. Современные методы идентификации систем / Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [2] Овсиенко А.С. Метод параметрической идентификации процесса аномальной диффузии на границе застойной зоны и области радиального стока скважины // Тез. докл. V научно-практ. конф. по математическому моделированию и компьютерным технологиям в процессах разработки месторождений. М.: Нефтяное хозяйство, 2012. С. 37.
- [3] Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
- [4] Зотеев В.Е. Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестник СамГТУ. Физико-математические науки. 1999. Вып. 7. С. 170–177.
- [5] Радченко В.П., Зотеев В.Е. Определение динамических характеристик механической системы на основе стохастических разностных уравнений колебаний // Изв. вузов. Машиностроение. 2007. № 1. С. 3–10.
- [6] Петухов А.А., Ревизников Д.Л., Сластушенский Ю.В. Описание аномальной диффузии с использованием дробно-дифференциальных уравнений и метода дискретных элементов // Материалы XVII Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. М.: МАИ-ПРИНТ, 2011. С. 601–602.
- [7] Петухов А.А., Ревизников Д.Л. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений // Вестник МАИ. 2009. Т. 16, № 6. С. 228–234.

*Поступила в редакцию 30 июля 2012 г.,  
с доработки — 26 ноября 2012 г.*