

Об определении переменной жёсткости круглой пластины*

Т. А. Аникина¹, А. О. Ватульян², П. С. Углич³

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

³Южный математический институт, Владикавказ, Россия

e-mail: atanusha@mail.ru, vatulyan@math.rsu.ru, puglich@inbox.ru

Рассматривается обратная коэффициентная задача об определении переменной жёсткости круглой упругой пластинки, которая совершает вынужденные установившиеся колебания под действием равномерно распределённой осциллирующей нагрузки. При этом изгибная жёсткость пластинки считается функцией радиальной координаты. Исходной информацией для ее определения является информация о прогибе пластинки на фиксированной частоте. Для решения прямой задачи о колебаниях неоднородной пластинки использован метод Ритца. Результаты, полученные при помощи этого метода, сравниваются с известными аналитическими решениями для однородной пластинки, а также с результатами, полученными при решении соответствующей краевой задачи методом пристрелки. Для решения обратной задачи использован метод Галёркина. Приведены результаты вычислительных экспериментов для различных законов изменения жёсткости.

Ключевые слова: неоднородная пластина, колебания, реконструкция свойств.

Введение

При описании динамического поведения объектов, исследуемых в таких областях как техническая диагностика, идентификация свойств биологических тканей и геофизика, модели, основанные на гипотезе однородности, оказываются недостаточно адекватными [1, 2]. При этом возникает необходимость в использовании моделей неоднородных сред, для которых требуются разработка математического аппарата изучения закономерностей деформирования, создание эффективных вычислительных схем, а также исследование обратных задач, позволяющих определить искомые неоднородные характеристики среды на основе некоторой дополнительной информации. Данный тип обратных задач относится к коэффициентным обратным задачам, которые являются некорректными и могут быть решены только с использованием специальных численных схем [3]. Отметим, что достаточно подробно аналогичные задачи исследованы для стержневых элементов конструкций и слоистых структур [4].

В настоящей работе рассматривается обратная коэффициентная задача об определении переменной жёсткости круглой упругой пластинки, которая совершает установившиеся осесимметричные колебания под действием равномерно распределённой

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00194-а), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт П596) и Южного математического института г. Владикавказ.

осциллирующей нагрузки. При этом изгибная жёсткость пластинки считается функцией радиальной координаты. Соответствующая задача описывается дифференциальным оператором четвёртого порядка с переменными коэффициентами, и возникающая краевая задача может быть решена только численно. Для решения прямой задачи о колебаниях неоднородной пластинки использован метод Ритца, с помощью которого определены собственные частоты и формы колебаний, а также прогиб пластинки на заданной частоте. Проведено сравнение результатов, полученных при помощи метода Ритца, с известными аналитическими результатами для однородной круглой пластинки [5], а также с численными данными, полученными методом пристрелки.

Представлена постановка обратной задачи об определении переменной жёсткости круглой упругой пластинки по известному прогибу на заданной частоте. Решение её сведено к решению задачи Коши для оператора первого порядка относительно функции, характеризующей изменение изгибной жёсткости, которая может быть решена аналитически. Обсуждены некоторые аспекты такого подхода. Помимо этого для решения обратной задачи использован проекционный метод Галёркина. Приведены результаты вычислительных экспериментов для различных законов распределения жёсткости и граничных условий.

1. Прямая задача

Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой пластины радиуса R переменной жёсткости под действием равномерно распределённой нагрузки q . Будем считать, что цилиндрическая жёсткость пластины

$$D(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$$

является функцией радиальной координаты. В данном выражении $E(r)$ — модуль Юнга, h — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа — Лява [5] примем следующие законы изменения перемещений:

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = w, \quad (1)$$

где $w(r)$ — функция поперечного прогиба пластинки.

Используем вариационный принцип Лагранжа [6]

$$\delta(\Pi - K) = 0, \quad (2)$$

где в соответствии с указанными гипотезами

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_S (M_{rr}\varepsilon_{rr}^1 + 2M_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}^1 + M_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi}^1) dS - \int_S qw(r)dS,$$

$$K = \frac{\omega^2}{2} \int_S \rho w^2(r)dS.$$

Здесь S — круг радиуса R , M_{rr} , $M_{r\varphi}$, $M_{\varphi\varphi}$ — изгибающие моменты, ε_{rr}^1 , $\varepsilon_{\varphi\varphi}^1$, $\varepsilon_{r\varphi}^1$ — соответственно изменения кривизн и кручение пластинки. В осесимметричном случае

выражения для величин M_{rr} , $M_{r\varphi}$, $M_{\varphi\varphi}$ и ε_{rr}^1 , $\varepsilon_{\varphi\varphi}^1$, $\varepsilon_{r\varphi}^1$ имеют вид [5, 6]

$$M_{rr} = -D(r) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_{\varphi\varphi} = -D(r) \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_{r\varphi} = 0,$$

$$\varepsilon_{rr}^1 = -\frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^1 = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^1 = 0. \quad (3)$$

Вариационное уравнение (2) после подстановки в него выражений (3) для изменений кривизн и изгибающих моментов с учётом осевой симметрии приобретает следующий вид:

$$\delta(\Pi - K) = 2\pi \delta \left\langle \int_0^R D(r) \left\{ [w''(r)]^2 + \left[\frac{w'(r)}{r} \right]^2 + 2\nu \frac{w'(r)w''(r)}{r} \right\} r dr - \right.$$

$$\left. - 2 \int_0^R q w(r) r dr - \int_0^R \rho \omega^2 h r w^2(r) r dr \right\rangle = 0. \quad (4)$$

Варьируя функционал и интегрируя по частям, получим

$$\delta(\Pi - K) = 2\pi \int_0^R \left\{ [rD(r)w''(r)]'' + \nu [D'(r)w'(r)]' - \left[\frac{D(r)w'(r)}{r} \right]' - \right.$$

$$\left. - \rho \omega^2 h r w(r) - q r \right\} \delta w(r) dr + \left\{ -\nu D'(r)w'(r) - [D(r)r w''(r)]' + \frac{D(r)w'(r)}{r} \right\} \delta w(r) \Big|_0^R +$$

$$+ [\nu D(r)w'(r) + D(r)r w''(r)] \delta w'(r) \Big|_0^R = 0. \quad (5)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых вариациях, получим уравнение колебаний и соответствующие граничные условия. Введём далее безразмерные параметры и переменные по формулам

$$r = R\tilde{r}, \quad D = D_0 \tilde{D}, \quad D_0 = D(R)$$

(знак тильды для удобства в дальнейшем будем опускать).

Уравнение колебаний пластинки в безразмерных переменных запишется как

$$[D(r)r w''(r)]'' + \nu [D'(r)w'(r)]' - \left[\frac{D(r)w'(r)}{r} \right]' - k^2 r w(r) - \lambda q r = 0, \quad (6)$$

дополнительные граничные условия имеют вид

$$\left\{ \nu D'(r)w'(r) + [D(r)r w''(r)]' - \frac{D(r)w'(r)}{r} \right\} \Big|_{r=0,1} = 0,$$

$$D(r) [\nu w'(r) + r w''(r)] \Big|_{r=0,1} = -r M_{rr}(r) \Big|_{r=0,1} = 0. \quad (7)$$

Здесь $k^2 = \frac{\rho \omega^2 h R^4}{D_0}$ — безразмерный спектральный параметр, связанный с частотой колебаний, $\lambda = \frac{q_0 R^3}{D_0}$ — вспомогательный коэффициент, ρ — плотность пластины.

Необходимо отметить, что анализ дополнительных условий (7) сводит их к равенству $w'(0) = 0$. Это накладывает ограничения на решение прямой задачи.

Краевые условия имеют следующий вид:

в случае жёсткой заделки

$$w(1) = w'(1) = 0, \quad (8)$$

в случае шарнирного опирания

$$w(1) = 0, \quad M_{rr}(1) = -D(r) \left[w''(r) + \frac{\nu}{r} w'(r) \right] \Big|_{r=1} = 0. \quad (9)$$

Решение задач (6)–(8), (6)–(9) может быть построено несколькими методами. Поскольку оператор имеет переменные коэффициенты, то необходимо использовать численные схемы. Одна из них опирается на метод Ритца, основанный на определении стационарной точки функционала:

$$F = \int_0^1 D(r) \left\{ [w''(r)]^2 + \left[\frac{w'(r)}{r} \right]^2 + 2\nu \left[\frac{w'(r)w''(r)}{r} \right] \right\} r dr - \\ - 2 \int_0^1 w(r) q r dr - \rho \omega^2 h \int_0^1 w^2(r) r dr. \quad (10)$$

В соответствии с методом Ритца представим функцию прогиба в виде суммы

$$w(r) = \sum_{k=1}^{N_1} C_k \varphi_k(r),$$

где базисные функции имеют вид $\varphi_k(r) = (1 - r^2)^2 r^{2k}$ для случая жёсткой заделки и $\varphi_k(r) = (1 - r^2) r^{2k}$ для случая шарнирного опирания.

Кроме того, эта задача может быть решена с помощью метода пристрелки, если привести (6) к следующему виду:

$$w^{IV}(r) = \frac{1}{D(r)r} \left\{ k^2 w(r) + \lambda q - \left[\nu D''(r) + \frac{D'(r)}{r} - \frac{D(r)}{r^2} \right] w'(r) - \right. \\ \left. - \left[2D'(r) + D''(r) + \nu D'(r) - \frac{D(r)}{r} \right] w''(r) - 2 [D(r) + D'(r)r] w'''(r) \right\}. \quad (11)$$

В табл. 1 приведены собственные частоты для различных законов распределения цилиндрической жёсткости $D(r)$, рассчитанные на основании двух предложенных методов. Точность методов тестировалась для однородной пластины в случае жёсткой заделки с известными [7] собственными частотами $k_1 = 10.21$, $k_2 = 39.78$, $k_3 = 88.90$. Погрешность метода Ритца при определении собственных частот при $N_1 = 7$ составила менее 1%. Здесь и ниже принято значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.1$.

Далее было проведено сравнение результатов для однородной пластинки при $k = 0$ с аналитическими результатами [5], что позволяет проверить адекватность численных

Т а б л и ц а 1. Собственные частоты для различных законов распределения цилиндрической жёсткости

Закон распределения $D(r)$	Жёсткая заделка		Шарнирное опирание	
	метод Ритца	метод пристрелки	метод Ритца	метод пристрелки
$D(r) = 1$	10.27	10.22	4.63	4.62
	39.79	39.77	29.48	29.49
	89.11	89.10	73.94	73.94
$D(r) = 1 + r^2$	12.51	12.52	5.32	5.33
	46.34	46.35	33.87	33.87
	103.44	102.53	84.51	84.51
$D(r) = 1 + e^r$	17.68	17.68	7.64	7.65
	66.25	66.27	48.68	48.66
	174.75	146.96	123.12	121.40
$D(r) = 1 + \cos r$	13.47	13.47	6.25	6.25
	53.60	53.41	39.86	39.86
	129.26	120.21	101.46	100.05
$D(r) = 1 + \sin 3r$	12.66	12.67	6.11	6.11
	50.98	50.98	38.88	38.88
	114.41	114.33	96.21	96.20

Т а б л и ц а 2. Значения прогиба, полученные методом Ритца и решениями (12), (13)

Радиус r	Жёсткая заделка		Шарнирное опирание	
	метод Ритца	точное решение	метод Ритца	точное решение
$r = 0$	0.015625	0.015625	0.072445	0.072443
$r = 0.5$	0.008789	0.008789	0.051403	0.051403
$r = 0.95$	0.000148	0.000148	0.005688	0.005688

Т а б л и ц а 3. Значения прогиба при $k = 10$ и $k = 2.5$

Закон распределения $D(r)$	Радиус r	Жёсткая заделка, $k = 10$		Шарнирное опирание, $k = 2.5$	
		метод Ритца	метод пристрелки	метод Ритца	метод пристрелки
$D(r) = 1 + r^2$	$r = 0$	0.030339	0.030337	0.071159	0.071157
	$r = 0.5$	0.015013	0.015011	0.048943	0.048941
	$r = 0.95$	0.000194	0.000188	0.005221	0.005215
$D(r) = 1 + e^r$	$r = 0$	0.007935	0.007935	0.030131	0.03013
	$r = 0.5$	0.004096	0.004096	0.020813	0.020812
	$r = 0.95$	0.000059	0.000056	0.002241	0.002238
$D(r) = 1 + \cos r$	$r = 0$	0.020329	0.020325	0.046881	0.046878
	$r = 0.5$	0.011326	0.011325	0.033475	0.033474
	$r = 0.95$	0.000188	0.000185	0.003739	0.003736
$D(r) = 1 + \sin 3r$	$r = 0$	0.028074	0.028078	0.050652	0.050650
	$r = 0.5$	0.015245	0.015244	0.035034	0.035033
	$r = 0.95$	0.000287	0.000282	0.003913	0.003908

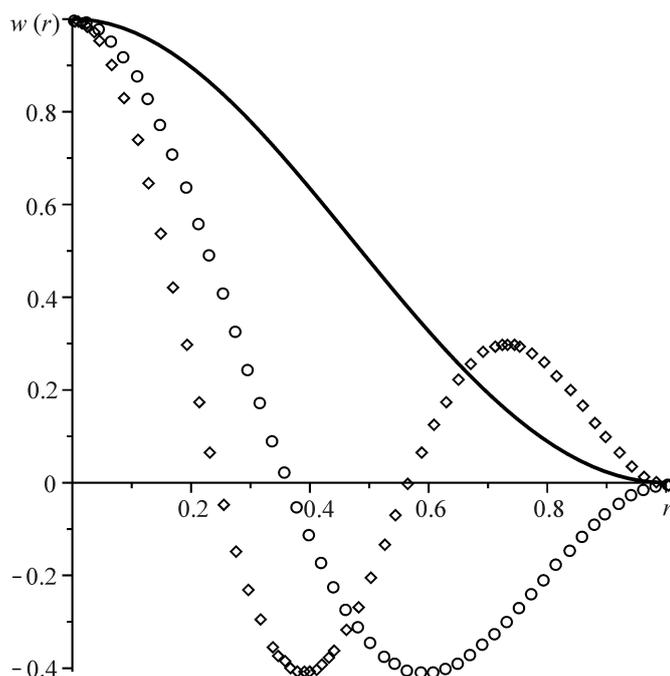


Рис. 1. Собственные формы колебаний, найденные методом Ритца при $D(r) = 1 + r^2$. Линия, круги, ромбы — на частоте соответственно $k = 12.51$, 46.34 и 103.44

методов и алгоритмов. Выражение для прогиба равномерно нагруженной однородной пластинки в случае жёсткой заделки имеет вид

$$w = \frac{q}{64D}(1 - r^2)^2, \quad (12)$$

в случае шарнирного опирания —

$$w = \frac{q(1 - r^2)}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - r^2 \right). \quad (13)$$

Погрешность результатов, найденных методом Ритца, составила $10^{-5} \div 10^{-7}$. В табл. 2 приведены значения прогиба, полученные методом Ритца при $q/D_0 = 1$, и аналитические решения (12), (13), в табл. 3 — значения прогиба в некоторых точках для $k = 10$ в случае жёсткой заделки и $k = 2.5$ при шарнирном опирании. Из последней таблицы видно достаточно хорошее совпадение результатов, полученных разными методами. Тем не менее необходимо отметить, что ближе к краю пластины рассматриваемые данные имеют существенные различия.

На рис. 1 представлены моды колебаний неоднородной пластинки, найденные методом Ритца для $D(r) = 1 + r^2$ в случае жёсткой заделки.

2. Обратная задача

Обратная задача заключается в определении жёсткости пластины $D(r)$ по некоторой дополнительной информации о поле перемещений, заданной либо на границе пластины в некотором диапазоне изменения частоты колебаний, либо всюду внутри пластины, относится к коэффициентным обратным задачам и в общей ситуации является существенно нелинейной и некорректной [3].

В настоящей работе рассмотрена постановка обратной задачи, заключающаяся в нахождении жёсткости пластины $D(r)$ по заданному прогибу при некоторой фиксированной частоте

$$w(r, k_0) = W(r), \quad k_0 \in [k_1, k_2]. \quad (14)$$

В этой ситуации обратная задача оказывается линейной, однако построение её решения имеет некоторые вычислительные трудности.

Для решения обратной задачи в такой постановке были использованы два подхода. Первый из них заключался в сведении обратной задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, второй — в применении проекционного метода Галёркина.

Сведём краевую задачу (6)–(9) к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$\left\{ [D(r)rW''(r)]' + \nu D'(r)W'(r) - \frac{D(r)W'(r)}{r} \right\}' = k^2 r W(r) + \lambda q r. \quad (15)$$

Проинтегрировав полученное уравнение в пределах от нуля до r и приведя подобные слагаемые, получим

$$D'(r) + D(r)f(r) = g(r), \quad (16)$$

где

$$f(r) = \frac{W''(r) + rW'''(r) - \frac{W'(r)}{r}}{rW''(r) + \nu W'(r)}, \quad g(r) = \frac{\int_0^r [k^2 r W(r) + \lambda q r] dr}{rW''(r) + \nu W'(r)}.$$

Здесь использованы условия (7) при $r = 0$. Уравнение (16) есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами [8]. Его решение определяется с точностью до произвольной постоянной. Построим решение (16), подчинённое дополнительному граничному условию $D_0 = D(1)$:

$$D(r) = e^{-\int_0^r f(\zeta) d\zeta} \left[\int_0^r g(\zeta) e^{\int_0^\zeta f(\eta) d\eta} d\zeta - \int_0^1 g(\zeta) e^{\int_0^\zeta f(\eta) d\eta} d\zeta \right] + D_0 e^{\int_0^1 f(\zeta) d\zeta}. \quad (17)$$

Из результатов проведённых вычислительных экспериментов следует, что на основе представленного аналитического решения затруднительно осуществить восстановление искомой функции жёсткости с приемлемой точностью. Дальнейший анализ свойств дифференциального оператора (16) показал, что функции $f(r)$ и $g(r)$ разрывны на отрезке $[0, 1]$ и имеют особые точки второго рода, при этом интегралы в (17) оказываются расходящимися и для вычисления решения в окрестностях этих точек требуется другой подход.

Второй подход заключается в применении к исходной краевой задаче (6)–(9) проекционного метода Галёркина. Выберем базисные функции

$$\psi_k(r) = r^{k-1}$$

и представим функцию жёсткости в виде разложения по этой системе:

$$D(r) = \sum_{k=1}^{N_2} A_k \psi_k(r).$$

Преобразуем уравнение (6) и введём следующее обозначение для невязки:

$$N(r) = r^2 [D(r)rW''(r)]'' + \nu r^2 [D'(r)W'(r)]' - r [D(r)W'(r)]' + D(r)W'(r) - k^2 r^3 W(r) - \lambda q r^3. \quad (18)$$

Далее потребуем ортогональности невязки к базисным функциям

$$\int_0^1 N(r)\psi_k(r)rdr = 0.$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения A_k на основе метода Галёркина:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \sum_{n=1}^{N_2} A_k \{ r^2 [\psi_1(r)rW''(r)]'' + \nu r^2 [\psi_1'(r)W'(r)]' - r [\psi_1(r)W'(r)]' + \\ \quad + \psi_1(r)W'(r) \} \psi_1(r)rdr = \int_0^1 [k^2 r^3 W(r) - \lambda q r^3] \psi_1(r)rdr, \\ \dots \\ \int_0^1 \sum_{n=1}^{N_2} A_k \{ r^2 [\psi_{N_2}(r)rW''(r)]'' + \nu r^2 [\psi_{N_2}'(r)W'(r)]' - r [\psi_{N_2}(r)W'(r)]' + \\ \quad + \psi_{N_2}(r)W'(r) \} \psi_{N_2}(r)rdr = \int_0^1 [k^2 r^3 W(r) - \lambda q r^3] \psi_{N_2}(r)rdr, \end{array} \right.$$

решая которую, находим приближённое решение сформулированной обратной задачи.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов по восстановлению цилиндрической жёсткости пластины $D(r)$ на основе предложенной проекционной схемы. На рис. 2, а в случае шарнирного опирания при $D(r) = 1 + e^r$ продемонстрировано влияние количества координатных функций N_2 на точность результатов. Дальнейшие вычисления проводились при $\nu = 0.1$, $q = 1$, $N_2 = 15$. Результаты экспериментов показали, что для выбранного числа координатных функций невязка имеет порядок 10^{-3} . На рис. 2, б, в приведены результаты реконструкции жёсткости для краевой задачи (6), (7), (8), на рис. 2, г — для краевой задачи (6), (7), (9) (сплошные линии — точное решение, квадраты — восстановленное). Результат реконструкции немонотонной функции с большим числом осцилляций (см. рис. 2, е) свидетельствует о невозможности реконструкции сильноосциллирующих функций в рамках предлагаемого подхода. Попытки увеличить число координатных функций в полиномиальном разложении жёсткости не привели к успеху. Необходимо отметить, что восстановление монотонных функций рекомендуется проводить в окрестности первой собственной частоты колебаний, а немонотонных — в окрестности второй.

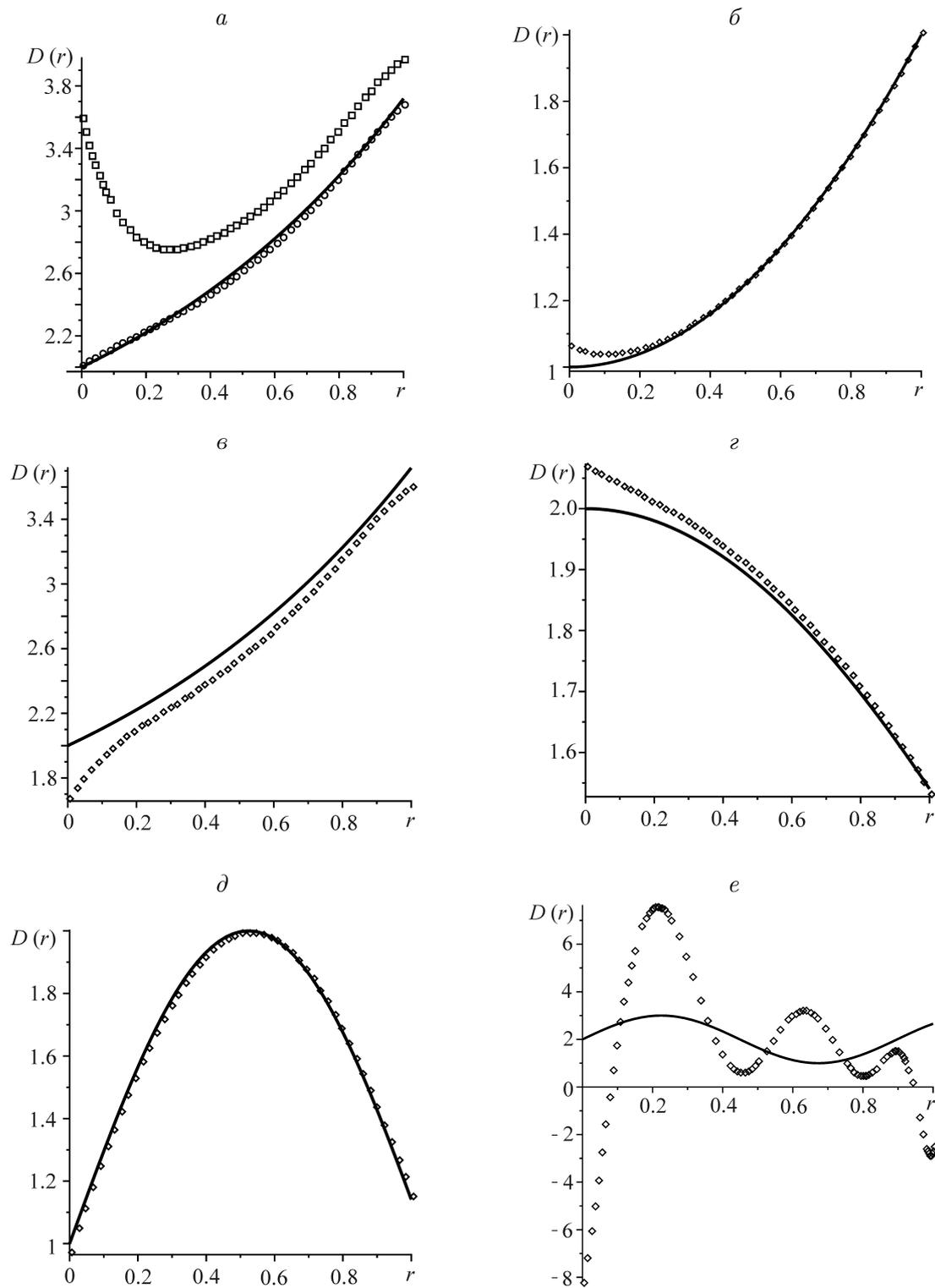


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи: *a* — при $D(r) = 1 + e^r$ (сплошная линия — точное решение, квадраты — $N_2 = 6$, кружки — $N_2 = 15$); *б* — при $D(r) = 1 + r^2$, *в* — $D(r) = 1 + e^r$, *г* — $D(r) = 1 + \cos r$, *д* — $D(r) = 1 + \sin 3r$, *е* — $D(r) = 2 + \sin 7r$ (сплошные линии — точное решение, квадраты — восстановленное)

Заключение

В работе рассмотрена обратная задача об определении переменной жёсткости круглой упругой пластинки по известному прогибу на заданной частоте. Разработан вычислительный аппарат для решения прямой задачи. Достоверность предложенного подхода определялась сравнением с известными аналитическими решениями. Приведён сравнительный анализ результатов, полученных с помощью проекционного метода Ритца и метода пристрелки. Для решения обратной задачи предложены два подхода: первый основан на сведении к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка относительно изгибной жёсткости, второй — на проекционном методе Галёркина. Проанализированы особенности численной реализации первого подхода. Приведены результаты вычислительных экспериментов на основе метода Галёркина для различных законов распределения жёсткости и граничных условий. Серия вычислительных экспериментов показала применимость проекционного подхода к решению обратной задачи о реконструкции переменной жёсткости пластины для монотонных и немонотонных функций, имеющих не более одной стационарной точки.

Список литературы

- [1] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
- [2] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 472 с.
- [3] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 222 с.
- [4] Аникина Т.А., Богачёв И.В., Ватульян А.О. Об идентификации неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 1. С. 107–115.
- [5] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
- [6] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [7] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
- [8] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1959. 468 с.

*Поступила в редакцию 8 сентября 2011 г.,
с доработки — 15 октября 2012 г.*