Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений*

З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

При более слабых, чем в работе Green A.E., Naghdi P.M. (J. Fluid Mech. 1976), ограничениях на скорость трёхмерного вихревого течения жидкости над подвижным дном выведена система нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды для приближённого описания течений со свободной границей. Определены порядки аппроксимации основных гидродинамических величин и уравнений, реализованные при переходе от пространственной модели к приближённой. Для полученной нелинейно-дисперсионной модели найдены законы изменения полной энергии и потенциального вихря.

Ключевые слова: поверхностные волны на воде, нелинейно-дисперсионные уравнения, завихренность, аппроксимация.

Введение

Выводу нелинейно-дисперсионных (НЛД) моделей, где в качестве приближённой скорости выбрана усреднённая по глубине горизонтальная составляющая скорости трёхмерного течения, посвящено несколько широко известных работ [1–6]. Основное различие в подходах к выводу — учёт завихренности: в работах [1, 2, 5] потенциальность трёхмерного течения не предполагается, тогда как в других работах это предположение делается. Любопытным является тот факт, что при отличающихся предположениях на характер течения жидкости и разных способах вывода в итоге получаются эквивалентные определяющие уравнения, представляющие собой разные формы записи одной и той же системы уравнений теории мелкой воды второго приближения.

В настоящей работе приводится вывод НЛД-модели, основанный на разложении по малому параметру вектора скорости трёхмерной (3D) модели идеальной несжимаемой жидкости. При этом условия вывода являются менее ограничительными, в частности, не используются предположение [1] о независимости горизонтальной составляющей скорости от вертикальной координаты и условие [3] потенциальности трёхмерного течения. Выясняется, какую роль в выводе НЛД-модели выполняет дополнительное требование потенциальности. Рассматриваются вопросы, касающиеся законов сохранения НЛД-модели и их связи с законами сохранения 3D-модели, а также вопросы, связанные с формальным порядком аппроксимации основных гидродинамических величин исходной 3D-модели, таких как скорость, ускорение, давление, завихренность, их аналогами из НЛД-модели.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-05-91052-НЦНИ и 12-01-00721), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6293.2012.9) и Проекта IV.31.2.1 Программы фундаментальных исследований СО РАН.

1. Постановка задачи для уравнений Эйлера

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном, заданным функцией $z = -h(x, y, t)$, а сверху — свободной границей, описываемой функцией $z = \eta(x, y, t)$, где t — время, x, y, z — координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость Oxy совпадает с невозмущённой свободной поверхностью. В полной постановке задачи требуется найти вектор скорости $\mathbf{U} = (u, v, w)$, давление p и функцию η, удовлетворяющие системе уравнений

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + w_z = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z + \nabla p = 0, \tag{2}$$

$$w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + ww_z + p_z = -g, \tag{3}$$

краевым условиям на свободной границе

$$(\eta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\eta - w)\big|_{z=\eta} = 0, \tag{4}$$

$$p\big|_{z=\eta} = 0 \tag{5}$$

и условию непротекания через подвижное дно

$$(h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h + w)\big|_{z=-h} = 0, \tag{6}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$, $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор горизонтальной составляющей скорости, w — вертикальная составляющая скорости, g — ускорение свободного падения, плотность несжимаемой жидкости считается равной единице.

Уравнения приближённых моделей, описывающих динамику длинных поверхностных волн, получаются при определённых предположениях относительно характера течения, рассматриваемого в рамках задачи (1)–(6). При этом искомыми величинами в этих уравнениях обычно являются $H = \eta + h$ — полная глубина слоя жидкости, и $\mathbf{c} = \mathbf{c}(x, y, t)$ — вектор скорости в приближённой модели, связанный каким-либо образом с вектором скорости $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ трёхмерного течения. Если в качестве $\mathbf{c}$ принять осреднённую по глубине горизонтальную составляющую скорости

$$\mathbf{c} = (c_1,\ c_2) = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\,dz, \tag{7}$$

то для любой приближённой модели получается одно и то же уравнение неразрывности

$$H_t + \nabla(H\mathbf{c}) = 0, \tag{8}$$

которое следует из уравнения несжимаемости (1), проинтегрированного по толщине слоя жидкости с учётом граничных условий (4), (6):

$$\nabla \int\limits_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\,dz - \mathbf{u} \cdot \nabla\eta\Big|_{z=\eta} - \mathbf{u} \cdot \nabla h\Big|_{z=-h} + w\Big|_{z=\eta} - w\Big|_{z=-h} = 0.$$

Для вывода уравнений движения мелкой воды введём характерные масштабы и перейдём к безразмерным переменным. Пусть L — характерный размер по горизонтали,

h_0, a_0 — характерные глубина и амплитуда волны, $\alpha = a_0/h_0$, $\mu = h_0/L$. В соответствии с масштабами определим безразмерные переменные:

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \overline{z} = \frac{z}{h_0}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \overline{t} = \frac{tc_0}{L}, \quad \overline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\alpha c_0}, \quad \overline{w} = \frac{w}{\alpha\mu c_0}, \quad \overline{p} = \frac{p}{{c_0}^2}, \tag{9}$$

где $c_0 = \sqrt{gh_0}$

В новых переменных задача (1)–(6) примет вид (для упрощения черту над безразмерными переменными здесь и далее опускаем)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + w_z = 0, \tag{10}$$

$$\mathbf{u}_t + \alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \alpha w \mathbf{u}_z + \alpha^{-1}\nabla p = 0, \tag{11}$$

$$\mu^2\left(w_t + \alpha\mathbf{u} \cdot \nabla w + \alpha w w_z\right) + \alpha^{-1}(p_z + 1) = 0, \tag{12}$$

$$(\eta_t + \alpha\mathbf{u} \cdot \nabla\eta - w)\big|_{z=\alpha\eta} = 0, \tag{13}$$

$$p\big|_{z=\alpha\eta} = 0, \tag{14}$$

$$(h_t + \alpha\mathbf{u} \cdot \nabla h + \alpha w)\big|_{z=-h} = 0. \tag{15}$$

Далее, пока не будет сказано иное, используются только безразмерные переменные.

2. Вспомогательные соотношения

В безразмерных переменных осреднённая скорость $\mathbf{c}$ определяется соотношением

$$\mathbf{c} = (c_1,\, c_2) = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{u}\, dz, \tag{16}$$

а уравнение неразрывности (8) принимает вид

$$H_t + \alpha\nabla \cdot (H\mathbf{c}) = 0, \quad H = \alpha\eta + h. \tag{17}$$

Для вывода НЛД-уравнений движения будем использовать разложение вектора скорости в ряд по степеням параметра μ^2:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mu^2\mathbf{u}_1 + O(\mu^4), \quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O(\mu^4). \tag{18}$$

Так как в длинноволновом приближении изменение величин в направлении оси Oz незначительно по сравнению с изменением в горизонтальной плоскости, будем считать, что главный член $\mathbf{u}_0$ разложения горизонтальной составляющей $\mathbf{u}$ вектора скорости не зависит от вертикальной координаты z:

$$(\mathbf{u}_0)_z = 0. \tag{19}$$

Это предположение является естественным для теории мелкой воды. Следует отметить, что в работах [1, 5] предполагается, что горизонтальная составляющая $\mathbf{u}$ вектора скорости вообще от z не зависят, т. е. при выводе НЛД-модели в указанных работах используется более сильное ограничение, чем (19).

С использованием разложений (18) выразим функции $\mathbf{u}$ и w через скорость $\mathbf{c}$ НЛД-модели. Сначала найдем выражение члена w_0 через $\mathbf{u}_0$. Подставляя функции $\mathbf{u}$ и w в уравнение неразрывности (10), получим равенство $\nabla \mathbf{u}_0 + (w_0)_z = 0$, интегрируя которое по вертикальной координате

$$\int\limits_{-h}^{z} \Big[\nabla \cdot \mathbf{u}_0 + (w_0)_\zeta\Big] d\zeta = 0$$

и учитывая, что функция $\mathbf{u}_0$ не зависит от z, имеем

$$(z+h)\nabla \cdot \mathbf{u}_0 + w_0(z) - w_0(z)\big|_{z=-h} = 0. \tag{20}$$

Далее используем условие на дне (15). Подставляя в него разложения (18), получаем равенство

$$h_t + \alpha\left(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla h + w_0\right) = 0, \quad z = -h,$$

которое можно записать в виде

$$w_0\big|_{z=-h} = -\frac{1}{\alpha} D_0 h,$$

где D_0 — оператор полной производной

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \mathbf{u}_0 \cdot \nabla.$$

Подставляя это соотношение в (20), получаем, что составляющая w_0 вертикальной компоненты скорости выражается через $\mathbf{u}_0$ следующим образом:

$$w_0(z) = -\frac{1}{\alpha} D_0 h - (z+h)\nabla \cdot \mathbf{u}_0. \tag{21}$$

Далее найдем связь между скоростями $\mathbf{c}$ и $\mathbf{u}$. Подставляя разложение (18) в формулу (16), получаем

$$\mathbf{c} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \left(\mathbf{u}_0 + \mu^2 \mathbf{u}_1 + O(\mu^4)\right) dz = \mathbf{u}_0 + \mu^2 \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{u}_1 dz + O(\mu^4). \tag{22}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{u}_0 = \mathbf{c} + O(\mu^2)$, и первую из формул (18) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mu^2 \mathbf{V} + O(\mu^4), \tag{23}$$

где

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{u}_1 dz, \tag{24}$$

причём здесь имеет место равенство

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \mathbf{V} dz = 0. \tag{25}$$

Из (23) следует соотношение
$$\mathbf{u} = \mathbf{c} + O(\mu^2). \tag{26}$$

Что касается вертикальной компоненты скорости, то для всех последующих выводов также достаточно её представление с точностью до $O(\mu^2)$. Формула для $w(z)$ получается из соотношений (18), (21), (26):

$$w(z) = -\frac{1}{\alpha} D\,h - (z+h)\nabla\cdot\mathbf{c} + O(\mu^2), \tag{27}$$

где
$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\mathbf{c}\cdot\nabla. \tag{28}$$

Отметим, что главная часть вертикальной компоненты скорости $w(z)$, которую по-прежнему будем обозначать w_0, оказалась линейной функцией от координаты z.

Выражения (23), (27) будут использованы ниже для вывода формулы для давления и НЛД-уравнений движения.

3. Вывод уравнений движения НЛД-модели

Для вывода формулы, выражающей давление через переменные НЛД-модели, проинтегрируем уравнение (12) по вертикальной координате с учётом динамического условия (14) и, привлекая формулу (26), перепишем этот интеграл в виде соотношения

$$p(z) = \alpha\mu^2 \int\limits_z^{\alpha\eta} \big(Dw + \alpha w w_\zeta + O(\mu^2)\big)\,d\zeta - z + \alpha\eta. \tag{29}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, применяя формулу (27):

$$Dw + \alpha w w_z = -\frac{1}{\alpha}D^2 h - (z+h)D\,(\nabla\cdot\mathbf{c}) + \alpha(z+h)\,(\nabla\cdot\mathbf{c})^2 + O(\mu^2) =$$
$$= -R_2 - (z+h)R_1 + O(\mu^2).$$

Здесь
$$R_1 = D\,(\nabla\cdot\mathbf{c}) - \alpha\,(\nabla\cdot\mathbf{c})^2\,, \quad R_2 = \frac{1}{\alpha}D^2 h. \tag{30}$$

Подставляя полученное соотношение в выражение (29), выводим формулу распределения давления по координате z, $-h \le z \le \alpha\eta$:

$$p = H - (z+h) - \alpha\mu^2\left[(H-(z+h))\,R_2 + \left(\frac{H^2}{2} - \frac{(z+h)^2}{2}\right)R_1\right] + O(\mu^4). \tag{31}$$

Используя соотношения (23), (27) и (31), выведем уравнения движения НЛД-модели. Для этого проинтегрируем уравнение (11) по толщине слоя воды и применим динамическое условие (14). Это даёт соотношение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{u}_t + \alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \alpha w\mathbf{u}_z)\,dz + \frac{1}{\alpha}\left(\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} p\,dz - p\big|_{z=-h}\nabla h\right) = 0, \tag{32}$$

которое далее почленно преобразуем. Исключим члены, содержащие давление, применив формулу (31):

$$\frac{1}{\alpha}\left(\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} p\,dz - p\big|_{z=-h}\nabla h\right) =$$

$$= H\nabla\eta - \mu^2\left[\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - H\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right)\right] + O(\mu^4). \tag{33}$$

Вычислим слагаемое с вертикальной компонентой скорости, применив формулы (23), (27):

$$\alpha\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\mathbf{u}_z dz = -\alpha\mu^2\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\left[\frac{1}{\alpha}D\,h + (z+h)(\nabla\cdot\mathbf{c})\right]\mathbf{V}_z dz + O(\mu^4) =$$

$$= -\mu^2\,Dh\mathbf{V}\Big|_{z=-h}^{z=\alpha\eta} - \alpha\mu^2(\nabla\cdot\mathbf{c})\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(z+h)\mathbf{V}_z dz + O(\mu^4).$$

Интеграл в правой части вычисляем интегрированием по частям, что в силу соотношения (25) приводит к равенству

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(z+h)\mathbf{V}_z dz = H\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta}.$$

Таким образом, получаем

$$\alpha\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\mathbf{u}_z dz = \mu^2 Dh\mathbf{V}\big|_{z=-h} - \mu^2\left(Dh + \alpha H(\nabla\cdot\mathbf{c})\right)\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta} + O(\mu^4). \tag{34}$$

Наконец, преобразуем группу членов из уравнения (32), содержащую горизонтальные компоненты скорости. Подстановка выражения (23) в соответствующие слагаемые уравнения (32) приводит к равенству

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\mathbf{u}_t + \alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u})\,dz = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\mathbf{c}_t + \alpha\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\mathbf{c})\,dz +$$

$$+\mu^2\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\left[\mathbf{V}_t + \alpha\left(\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{c}\right)\right]dz + O(\mu^4).$$

Дальнейшее упрощение выражения, стоящего при μ^2, основано на использовании равенства (25). Нетрудно получить следующие соотношения:

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{V}_t dz = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{V}dz - \alpha\eta_t\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta} - h_t\mathbf{V}\big|_{z=-h} = -\alpha\eta_t\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta} - h_t\mathbf{V}\big|_{z=-h},$$

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}dz = (\mathbf{c}\cdot\nabla)\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{V}dz - \alpha\,(\mathbf{c}\cdot\nabla\eta)\,\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta} - (\mathbf{c}\cdot\nabla h)\,\mathbf{V}\big|_{z=-h} =$$

$$= -\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\nabla\eta)\,\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta} - (\mathbf{c}\cdot\nabla h)\,\mathbf{V}\big|_{z=-h},$$

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{c}dz = \left(\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{V}dz\cdot\nabla\right)\mathbf{c} = 0.$$

Эти формулы вместе с (34) позволяют получить равенство

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{u}_t + \alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \alpha w\mathbf{u}_z)\,dz = H\mathbf{c}_t + \alpha H\,(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{c} -$$

$$-\mu^2\Big[\alpha\eta_t + \alpha\,(\mathbf{c}\cdot\nabla(\alpha\eta)) + Dh + \alpha H(\nabla\cdot\mathbf{c})\Big]\mathbf{V}\big|_{z=\alpha\eta} - \mu^2\Big[h_t + \alpha\,(\mathbf{c}\cdot\nabla h) - Dh\Big]\mathbf{V}\big|_{z=-h} + O(\mu^4),$$

где выражения в квадратных скобках обращаются в нуль: первое соотношение

$$(\alpha\eta)_t + \alpha\,(\mathbf{c}\cdot\nabla(\alpha\eta)) + Dh + \alpha H(\nabla\cdot\mathbf{c}) = 0$$

выполнено в силу уравнения неразрывности (17), которое может быть записано в эквивалентной форме

$$DH + \alpha H(\nabla\cdot\mathbf{c}) = 0, \tag{35}$$

а справедливость тождества

$$h_t + \alpha\,(\mathbf{c}\cdot\nabla h) - Dh = 0$$

вытекает из определения (28). Таким образом,

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\mathbf{u}_t + \alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \alpha w\mathbf{u}_z)\,dz = H\mathbf{c}_t + \alpha H\,(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{c} + O(\mu^4). \tag{36}$$

Возвращаясь к уравнению (32) и делая соответствующие подстановки согласно выполненным преобразованиям, а также отбрасывая члены порядка $O(\mu^4)$, получаем искомое векторное уравнение движения НЛД-модели:

$$\mathbf{c}_t + \alpha(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} + \nabla\eta = \mu^2\left[\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right)\right]. \tag{37}$$

Уравнения (17), (37) описывают распространение длинных волн с дисперсией на подвижном дне и по форме совпадают с полученными в [6]. В случае неподвижного дна они сводятся к уравнениям из работ [3, 4]. Подчеркнём, что при получении НЛД-уравнений в [3, 4, 6] течение предполагалось потенциальным, а вывод осуществлялся с использованием потенциала скорости.

Из формулы (31) следует, что давление в НЛД-модели вычисляется по формуле

$$\widetilde{p} = H - (z+h) - \alpha\mu^2\left[(H-(z+h))\,R_2 + \left(\frac{H^2}{2} - \frac{(z+h)^2}{2}\right)R_1\right]. \tag{38}$$

Таким образом, здесь в отличие от теории мелкой воды первого приближения имеет место квадратичная зависимость $\widetilde{p}$ от вертикальной координаты. Если через P обозначить проинтегрированное по толщине слоя давление (38)

$$P = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \widetilde{p} dz = \frac{H^2}{2} - \alpha\mu^2 \left(\frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right), \tag{39}$$

то уравнение движения (37) запишется аналогично уравнению изменения импульса в газовой динамике:

$$\mathbf{c}_t + \alpha(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} + \frac{1}{\alpha}\frac{\nabla P}{H} = \frac{1}{\alpha}\frac{\nabla h}{H}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}, \tag{40}$$

при этом

$$\widetilde{p}\Big|_{z=-h} = H - \alpha\mu^2 \left(\frac{H^2}{2} R_1 + H R_2 \right). \tag{41}$$

Умножая уравнение (17) на $\mathbf{c}$, а (40) на H и складывая результаты, приходим к записи НЛД-уравнения движения с дивергентной левой частью:

$$(H\mathbf{c})_t + \alpha\nabla\cdot(H\mathbf{cc}) + \frac{1}{\alpha}\nabla P = \frac{1}{\alpha}\nabla h\, \widetilde{p}\Big|_{z=-h}, \tag{42}$$

где $\mathbf{cc}$ — тензорное произведение вектора $\mathbf{c}$ на себя. В случае ровного дна это уравнение принимает консервативный вид.

4. Анализ условий вывода

При описанном выводе НЛД-уравнений учитываются два предположения: возможность разложения вектора скорости $\mathbf{U}$ в ряды по параметру μ^2 и независимость главного члена $\mathbf{u}_0$ горизонтальной составляющей вектора скорости $\mathbf{u}$ от вертикальной координаты. Предположение о потенциальности течения не используется, т. е. допускается что $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{U} \neq 0$.

Посмотрим, какой порядок по параметру μ будут иметь отдельные компоненты вектора вихря при указанных выше условиях вывода НЛД-модели. Из формул (9) получаются следующие соотношения для обезразмеривания компонент вихря $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\overline{\omega}_1 = \frac{h_0}{\alpha c_0}\omega_1, \quad \overline{\omega}_2 = \frac{h_0}{\alpha c_0}\omega_2, \quad \overline{\omega}_3 = \frac{h_0}{\alpha c_0 \mu}\omega_3.$$

Далее черту над ω опустим. Компоненты вихря в безразмерных переменных имеют вид

$$\omega_1 = \mu^2 w_y - v_z, \quad {}_2 = -\mu^2 w_x + u_z, \quad \omega_3 = v_x - u_y.$$

Для первых двух компонент вихря удобно использовать следующее представление:

$$(\omega_1, \omega_2) = \left(\mu^2\nabla w - \mathbf{u}_z\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Учитывая условие (19), получаем

$$\mu^2\nabla w - \mathbf{u}_z = O(\mu^2), \tag{44}$$

откуда следует, что $\omega_k = O(\mu^2)$ $(k = 1, 2)$. Третья компонента вихря вычисляется по формуле

$$\omega_3 = \widetilde{\omega} + O(\mu^2) = O(1), \quad \widetilde{\omega} = (\mathrm{c}_2)_x - (\mathrm{c}_1)_y\,. \tag{45}$$

Здесь функцию $\widetilde{\omega}$ можно трактовать как завихренность течения приближённой модели.

Вернёмся к началу вывода НЛД-уравнений и условие (19) заменим предположением о том, что первые две компоненты вихря имеют порядок $O(\mu^2)$, т. е. имеет место соотношение (44). По-прежнему рассмотрим разложение (18). Тогда справедливо равенство

$$O(\mu^2) = \mu^2\nabla w - \mathbf{u}_z = \mu^2\nabla w_0 - (\mathbf{u}_0)_z - \mu^2\,(\mathbf{u}_1)_z + O(\mu^4),$$

а из него следует соотношение (19). Таким образом, показано, что приведённый вывод НЛД-уравнений (17), (40) можно осуществить на основе предположения (44), из которого следует независимость главного члена в разложении (18) горизонтальных компонент вектора скорости от z.

Как уже отмечалось, вывод НЛД-модели в основном выполняется в предположении потенциальности ($\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{U} = 0$) исходного трёхмерного течения. В работе [7] потенциальность течения не предполагалась, но изначально было введено более сильное, чем (44), предположение $\omega_1 = \omega_2 = 0$, или

$$\mathbf{u}_z = \mu^2\nabla w, \tag{46}$$

позволяющее получить НЛД-уравнения (17), (37). Оказывается, что из условия (46) следует потенциальность течения. Для доказательства используем известное для случая идеальной жидкости уравнение Гельмгольца

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \alpha\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_3)\,\mathbf{U}, \tag{47}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \nabla_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Если величины $\omega_1 = \omega_2 = 0$ подставить в два первых скалярных уравнения системы (47), то получим соотношение

$$\omega_3\mathbf{u}_z = 0,$$

откуда с учётом того, что в общем случае $\mathbf{u}_z \neq 0$, следует $\omega_3 = 0$, т. е. течение является безвихревым ($\boldsymbol{\omega} = 0$).

В свою очередь условие (46) позволяет не только вывести уравнения (17), (37), но и вычислить в явном виде член $\mathbf{u}_1$ в разложении вектора скорости (18):

$$\mathbf{u}_1(z) = -(z+h)\left(\frac{\nabla D_0 h}{\alpha} + \nabla h(\nabla\cdot\mathbf{u}_0)\right) - \frac{(z+h)^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_1\big|_{z=-h}. \tag{48}$$

Эта формула получается, если в равенство (46) подставить разложения (18), приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ^2 и выполнить интегрирование полученного уравнения по толщине слоя жидкости. Привлекая формулу (24), легко получить

$$\mathbf{V} = \left(\frac{H}{2} - z - h\right)\left(\frac{\nabla D h}{\alpha} + \nabla h(\nabla\cdot\mathbf{c})\right) + \left(\frac{H^2}{6} - \frac{(z+h)^2}{2}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{c}). \tag{49}$$

Как следует из результатов, представленных в предыдущих разделах, конкретное выражение $\mathbf{u}_1(z)$, или $\mathbf{V}(z)$, благодаря свойству (25) не влияет на вид НЛД-уравнений. Однако выражение $\mathbf{V}(z)$ согласно формуле (23) позволяет вычислить отклонение горизонтальной составляющей $\mathbf{u}(z)$ скорости трёхмерного течения от осреднённой по глубине скорости $\mathbf{c}$.

5. Закон изменения энергии

Важной характеристикой системы уравнений гидродинамики является закон сохранения энергии [5, 8–10]. Обратимся к трёхмерным уравнениям гидродинамики (10)–(12) и выпишем соответствующее им уравнение энергии. Умножая (11), (12) на компоненты скорости u, v и w и складывая полученные выражения, приходим к уравнению

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla K) + \alpha w\frac{\partial K}{\partial z} + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{U}\cdot\nabla_3 p) + \frac{w}{\alpha} = 0, \tag{50}$$

где $K = (u^2 + v^2 + \mu^2 w^2)/2$ — кинетическая энергия. Прибавляя к (50) уравнение для потенциальной энергии $\Pi = z/\alpha^2$

$$\frac{d\Pi}{dt} - \frac{w}{\alpha} = 0,$$

получаем уравнение для полной энергии

$$\frac{d(K+\Pi)}{dt} + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{U}\cdot\nabla_3 p) = 0.$$

Если к последнему прибавить уравнение неразрывности, умноженное на $(p/\alpha + K + \Pi)$, то получим закон сохранения полной энергии в консервативной форме:

$$\frac{\partial(K+\Pi)}{\partial t} + \alpha\nabla_3\left((K + \Pi + \frac{p}{\alpha^2})\mathbf{U}\right) = 0. \tag{51}$$

Рассмотрим усреднённую по толщине слоя полную энергию, подставив в выражение K вместо компонент скоростей их разложения согласно формулам (23), (27):

$$\frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(K+\Pi)dz =$$

$$= \frac{1}{2H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\Big[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) + 2\mu^2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{V}) + \mu^2\left(\frac{D\,h}{\alpha} + (z+h)\nabla\cdot\mathbf{c}\right)^2 + \frac{z}{\alpha^2}\Big]dz + O(\mu^4) =$$

$$= \mathcal{E} + O(\mu^4), \tag{52}$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})}{2} + \frac{H-2h}{2\alpha^2} + \mu^2\left(\frac{H^2}{6}(\nabla\cdot\mathbf{c})^2 + \frac{H}{2\alpha}(\nabla\cdot\mathbf{c})Dh + \frac{(Dh)^2}{2\alpha^2}\right).$$

Учитывая связь (52) между усреднённой полной энергией трёхмерного течения и функцией $\mathcal{E}$, последнюю естественно отождествлять с полной энергией течения, описываемого в рамках приближённой НЛД-модели.

Выведем уравнение для полной энергии $\mathcal{E}$. Для этого умножим векторное уравнение (40) на $\mathbf{c}$ и учтём равенство

$$(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c}) = \left(\mathbf{c}\cdot\nabla\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})}{2}\right).$$

В результате получим

$$D\left(\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})}{2}\right)+\frac{1}{\alpha H}\nabla(\mathbf{c}P)-\frac{1}{\alpha H}\left(P\nabla\cdot\mathbf{c}+\frac{Dh}{\alpha}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}\right)=-\frac{h_t}{\alpha^2 H}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}. \tag{53}$$

Используя формулы (35), (39), (41) и обозначения (30), получаем следующую цепочку равенств:

$$\frac{1}{\alpha H}\left(P\nabla\cdot\mathbf{c}+\frac{Dh}{\alpha}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}\right)=$$

$$=\frac{H}{2\alpha}\nabla\cdot\mathbf{c}+\frac{Dh}{\alpha^2}-\mu^2\left[\left(\frac{H^2}{3}R_1+\frac{H}{2}R_2\right)\nabla\cdot\mathbf{c}+\frac{Dh}{\alpha}\left(\frac{H}{2}R_1+R_2\right)\right]=$$

$$=-\frac{DH}{2\alpha^2}+\frac{Dh}{\alpha^2}-\mu^2\left[\frac{H}{3}(\nabla\cdot\mathbf{c})^2DH+\frac{H^2}{3}D\frac{(\nabla\cdot\mathbf{c})^2}{2}+\frac{H}{2\alpha}(\nabla\cdot\mathbf{c})D^2h+\right.$$

$$\left.+\frac{H}{2\alpha}D(\nabla\cdot\mathbf{c})Dh+\frac{Dh}{2\alpha}(\nabla\cdot\mathbf{c})DH+\frac{Dh}{\alpha^2}D^2h\right]=$$

$$=-D\left(\frac{H-2h}{2\alpha^2}\right)-\mu^2\left[D\left(\frac{H^2}{6}(\nabla\cdot\mathbf{c})^2\right)+D\left(\frac{H}{2\alpha}(\nabla\cdot\mathbf{c})Dh\right)+D\left(\frac{(Dh)^2}{2\alpha^2}\right)\right]=$$

$$=-D\left(\mathcal{E}-\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})}{2}\right).$$

С учётом последнего равенства уравнение (53) примет вид

$$D\mathcal{E}+\frac{1}{\alpha H}\nabla\cdot(\mathbf{c}P)=-\frac{h_t}{\alpha^2 H}\widetilde{p}\Big|_{z=-h},$$

или

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\alpha\left(\mathbf{c}\cdot\nabla\mathcal{E}\right)+\frac{1}{\alpha H}\nabla\cdot(\mathbf{c}P)=-\frac{h_t}{\alpha^2 H}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}.$$

Если это уравнение умножить на H, а уравнение неразрывности (17) на $\mathcal{E}$ и сложить результаты, то уравнение для полной энергии в НЛД-модели будет иметь дивергентную форму записи левой части, идентичную левой части уравнения для полной энергии в газовой динамике:

$$\frac{\partial H\mathcal{E}}{\partial t}+\alpha\nabla\left(H\mathbf{c}\left(\mathcal{E}+\frac{P}{\alpha^2 H}\right)\right)=-\frac{h_t}{\alpha^2}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}. \tag{54}$$

Это уравнение можно вывести непосредственно из закона сохранения (51). Если уравнение (51) проинтегрировать по толщине слоя жидкости и выполнить выкладки надлежащим образом, то получается соотношение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\left[\frac{\partial(K+\Pi)}{\partial t}+\alpha\nabla_3\left((K+\Pi+\frac{p}{\alpha^2})\mathbf{U}\right)\right]dz=$$

$$=\frac{\partial H\mathcal{E}}{\partial t}+\alpha\nabla\left(H\mathbf{c}\left(\mathcal{E}+\frac{P}{\alpha^2 H}\right)\right)+\frac{h_t}{\alpha^2}\widetilde{p}\Big|_{z=-h}+O(\mu^4)=0, \tag{55}$$

т. е. уравнение (54) с порядком $O(\mu^4)$ аппроксимирует усреднённый по глубине закон сохранения полной энергии исходной гидродинамической системы. Учитывая (52), уравнение (54) можно назвать законом изменения полной энергии НЛД-модели.

При $h_t = 0$ (в случае стационарного дна) уравнение энергии (54) принимает дивергентный вид и может быть сведено к закону сохранения энергии из работы [5].

Заметим, что если в выражениях $\mathcal{E}$ и P отбросить члены порядка $O(\mu^2)$, то получим закон сохранения энергии уравнений мелкой воды первого приближения, имеющий фундаментальное значение в классической теории мелкой воды [9].

6. Уравнение для потенциального вихря

Прежде всего отметим, что для уравнений мелкой воды в случае, когда скорость модели определяется по формуле (16), характерно наличие вихря $\widetilde{\omega} \neq 0$ даже тогда, когда исходное трёхмерное течение предполагается потенциальным. Понятие потенциального вихря $\widetilde{\omega}/H$ и его свойства играют важную роль в описании длинноволновых движений в океане. Известно, что для уравнений мелкой воды первого приближения потенциальный вихрь сохраняется вдоль траекторий жидких частиц [11]:

$$D\left(\frac{\widetilde{\omega}}{H}\right) = 0. \tag{56}$$

Для НЛД-уравнений (17), (40) имеет место аналог закона сохранения потенциального вихря. Выведем его, используя для двумерных векторов операции, обозначаемые так же, как векторное произведение и операция rot для трёхмерных векторов. Результатом действия этих операций на векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$) будут не векторы, как в $\mathbf{R}^3$, а скаляры, определяемые по формулам

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = (a_2)_x - (a_1)_y, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Таким образом, имеем

$$\widetilde{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{c}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{c}_t = \widetilde{\omega}_t, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} = \widetilde{\omega}\nabla\cdot\mathbf{c} + (\mathbf{c}\cdot\nabla\widetilde{\omega}) = -\widetilde{\omega}\frac{DH}{\alpha H} + (\mathbf{c}\cdot\nabla\widetilde{\omega}).$$

Легко проверить, что для произвольных гладких функций f и g справедливы равенства

$$\operatorname{rot}\nabla g = 0, \quad \nabla g \times \nabla g = 0, \quad \operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g, \tag{57}$$

$$\nabla f \times \nabla(Dg) = D(\nabla f \times \nabla g) - \nabla(Df)\times\nabla g + \alpha(\nabla f \times \nabla g)\nabla\cdot\mathbf{c}, \tag{58}$$

$$\nabla f \times \nabla(Dg) = HD\left(\frac{\nabla f \times \nabla g}{H}\right) - \nabla(Df)\times\nabla g. \tag{59}$$

Последнее равенство следует из (58) после замены в нём выражения $\nabla\cdot\mathbf{c}$ согласно уравнению неразрывности в форме (35): $\nabla\cdot\mathbf{c} = -DH/\alpha H$.

Если применить операцию rot к уравнению (40), то с учётом выражений для давления (39), (41) и отмеченных выше свойств операторов получим

$$\operatorname{rot}(\mathbf{c}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c}) - \frac{\nabla H}{\alpha H^2}\times\left[H\nabla H - \alpha\mu^2\left(H^2 R_1\nabla H + \frac{H^3}{3}\nabla R_1 + HR_2\nabla H + \frac{H^2}{2}\nabla R_2\right)\right] +$$

$$+\mu^2\left(\frac{\nabla H}{2}R_1 + \frac{H}{2}\nabla R_1 + \nabla R_2\right)\times\nabla h = 0,$$

или

$$HD\left(\frac{\widetilde{\omega}}{H}\right)+\mu^2\left(\frac{H}{3}\nabla H\times\nabla R_1+\frac{1}{2}\nabla H\times\nabla R_2+\frac{1}{2}\nabla(HR_1)\times\nabla h+\nabla R_2\times\nabla h\right)=0. \quad (60)$$

Используя равенства (57)–(59), имеем

$$\nabla H\times\nabla R_1=\nabla H\times\nabla\left(D(\nabla\cdot\mathbf{c})\right)-\alpha\nabla H\times\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right)^2=D\left(\nabla H\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{c})\right),$$

$$\nabla H\times\nabla R_2=HD\left(\frac{\nabla H\times\nabla Dh}{\alpha H}\right)+HD\left(\frac{\nabla(H\nabla\cdot\mathbf{c})\times\nabla h}{H}\right)-\nabla\left(D(H\nabla\cdot\mathbf{c})\right)\times\nabla h,$$

$$\nabla(HR_1)\times\nabla h=\nabla\left(HD(\nabla\cdot\mathbf{c})\right)\times\nabla h-\alpha\nabla\left(H(\nabla\cdot\mathbf{c})^2\right)\times\nabla h=\nabla\left(D(H\nabla\cdot\mathbf{c})\right)\times\nabla h,$$

$$\nabla R_2\times\nabla h=\nabla\frac{D(Dh)}{\alpha}\times\nabla h=HD\left(\frac{\nabla Dh\times\nabla h}{\alpha H}\right).$$

Следовательно, уравнение (60) примет вид

$$D\left[\frac{\widetilde{\omega}}{H}+\mu^2\left(\nabla\frac{H}{3}\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{c})+\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H\nabla\cdot\mathbf{c}}{2}\right)\times\nabla h+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H-2h}{2\alpha}\right)\times\nabla Dh\right)\right]=0. \quad (61)$$

Из (61) следует, что в НЛД-модели генерируется потенциальный вихрь $\widetilde{\omega}/H$, который не сохраняется вдоль траекторий, как это имеет место в классической теории мелкой воды (56), однако вдоль траекторий сохраняется величина, взятая в квадратные скобки уравнения (61). Выясним физическое содержание этой величины в случае, когда первые две компоненты вихря трёхмерного течения "почти" равны нулю: $\omega_k=O(\mu^4)$ $(k=1,\,2)$, или

$$\mu^2\nabla w-\mathbf{u}_z=O(\mu^4). \quad (62)$$

Тогда в формуле (23) компонента $\mathbf{V}$ определяется по явной формуле (49).

Введём обозначения

$$\widetilde{\mathbf{u}}=\mathbf{c}+\mu^2\mathbf{V},\quad \widetilde{\omega}_3=\operatorname{rot}\widetilde{\mathbf{u}}=\omega_3+O(\mu^4). \quad (63)$$

Таким образом, величина $\widetilde{\omega}_3$ с точностью $O(\mu^4)$ аппроксимирует вертикальную компоненту вихря ω_3 трёхмерного течения и является третьей компонентой вектора вихря течения, горизонтальная компонента скорости которого совпадает с $\widetilde{\mathbf{u}}$. Выпишем выражение функции $\widetilde{\omega}_3$, основываясь на формуле (49) для $\mathbf{V}$:

$$\widetilde{\omega}_3=\operatorname{rot}\mathbf{c}+\mu^2\operatorname{rot}\mathbf{V}=\widetilde{\omega}+\mu^2\left[\nabla\left(\frac{H}{2}-h\right)\times\nabla\left(\frac{Dh}{\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\nabla\left(\left(\frac{H}{2}-z-h\right)\nabla\cdot\mathbf{c}\right)\times\nabla h+\left(\frac{H}{3}\nabla H-(z+h)\nabla h\right)\times\nabla(\nabla\cdot\mathbf{c})\right].$$

Для второго и третьего членов в квадратной скобке справедливы равенства

$$\nabla\left(\left(\frac{H}{2}-z-h\right)\nabla\cdot\mathbf{c}\right)\times\nabla h=\nabla\left(\frac{H\nabla\cdot\mathbf{c}}{2}\right)\times\nabla h-(z+h)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{c})\times\nabla h,$$

$$\left(\frac{H}{3}\nabla H - (z+h)\nabla h\right) \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}) = \frac{H}{3}\nabla H \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (z+h)\nabla h \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}).$$

Следовательно,

$$\widetilde{\omega}_3 = \widetilde{\omega} + \mu^2 \left[\frac{H}{3}\nabla H \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}) + \frac{1}{2}\nabla(H\nabla \cdot \mathbf{c}) \times \nabla h + \frac{1}{2\alpha}\nabla(H - 2h) \times \nabla D h\right]. \quad (64)$$

Таким образом, в квадратной скобке (61) размещается величина $\widetilde{\omega}_3/H$, поэтому это уравнение может быть записано в компактной форме

$$D\left(\frac{\widetilde{\omega}_3}{H}\right) = 0, \quad (65)$$

совпадающей с формой записи уравнения (56) для потенциального вихря модели первого приближения. Уравнение (65) означает, что сохраняющейся вдоль траекторий величиной является не вихрь скорости $\mathbf{c}$ НЛД-модели, а вихрь приближённой скорости $\widetilde{\mathbf{u}}$ трёхмерного течения.

Если предположить, что донная поверхность является стационарной, то (61) сводится к уравнению для потенциального вихря из работы [5], где исходное течение также не предполагается потенциальным.

Заключение

В представленной работе система НЛД-уравнений (17) и (37) была получена путём введения малого параметра μ и разложения компонент скорости в ряды по μ. Ниже приведены результаты по достигнутому порядку аппроксимации гидродинамических величин и уравнений.

Горизонтальные компоненты средней скорости 3D-модели аппроксимируются точно (по определению), а распределение компонент скорости $\mathbf{u}(z)$ по z аппроксимируется с порядком $O(\mu^2)$ в случае вихревых течений и с порядком $O(\mu^4)$, если 3D-течение потенциально, что вытекает из формул (18), (26), (48), (49). Вертикальная составляющая $w(z)$ вектора скорости $\mathbf{U}$ аппроксимируется линейной по z функцией с порядком $O(\mu^2)$ (см. (27)).

Распределение давления по z, как и среднее давление по толщине слоя жидкости, аппроксимируется с точностью до $O(\mu^4)$, что следует из формулы (31).

Среднее ускорение 3D-модели аппроксимируется ускорением НЛД-модели с порядком $O(\mu^4)$ (см. (36)).

В случае вихревых течений завихренность описывается соотношениями (44), (45), причем ω_3 аппроксимируются с порядком $O(\mu^2)$, а при условии (62) — с порядком $O(\mu^4)$.

Уравнению несжимаемости, проинтегрированному по глубине с учётом кинематических краевых условий, точно соответствует уравнение неразрывности (17). Проинтегрированные по слою воды уравнения движения согласно условиям вывода аппроксимированы с точностью $O(\mu^4)$.

Осреднённая по глубине полная энергия 3D-модели отличается от полной энергии НЛД-модели величиной порядка $O(\mu^4)$. На такую же величину различаются и уравнения, описывающие изменение полной энергии в проинтегрированной по глубине 3D-модели и приближённой модели, что следует из формул (52), (55).

Список литературы

[1] Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 78, pt 2. P. 237–246.

[2] Ertekin R.C., Webster W.C., Wehausen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // Ibid. 1986. Vol. 169. P. 275–292.

[3] Железняк М.И., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. науч. тр. / Ин-т прикл. физики АН СССР, 1985. С. 8–33.

[4] Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 272 с.

[5] Базденков С.В., Морозов Н.Н., Погуце О.П. Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике // Докл. АН. СССР. 1987. Т. 293, № 4. С. 818–822.

[6] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.

[7] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Полные нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на плоскости и сфере // Труды Междунар. конф. "Современные проблемы прикладной математики и механики: Теория, эксперимент и практика", посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, 2011. http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/37730/42330/Fedotova.pdf

[8] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.

[9] Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 208 с.

[10] Fedotova Z.I., Karepova E.D. Variational principle for approximate models of wave hydrodynamics // Rus. J. of Numerical Analysis and Math. Modelling. 1996. Vol. 11, No. 3. P. 183–204.

[11] Должанский Ф.В. Лекции по геофизической гидромеханике. М.: Ин-т вычисл. математики РАН, 2006. 378 с.

Поступила в редакцию 25 апреля 2012 г.,
с доработки — 31 июля 2012 г.