Вычислительные технологии **Том 1, № 2, 1996**

МНОГОШАГОВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СХЕМЫ И ЯВНЫЕ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СПЛАЙН-МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ШАБЛОНЕ*

В. И. Киреев
Московский государственный авиационный институт, Россия

На основе квадратных интегродифференциальных сплайнов построены новые дискретные двух- и трехшаговые схемы второго и третьего порядков для решения задачи Коши с обыкновенными дифференциальными уравнениями на нерегулярном шаблоне. Решение, получаемое по данным схемам, в совокупности с квадратными и кубическими сплайн-функциями составляет новый алгоритм явного последовательного сплайн-метода решения задачи Коши. Данный подход позволяет избежать решения нелинейных алгебраических уравнений.

Выдающийся математик и механик, академик Н. Н. Яненко в своей многогранной научной деятельности определил наиболее важные направления развития вычислительной механики и математики. В частности, Н. Н. Яненко придавал большое значение развитию схем повышенной точности. Так, в одной из последних статей [1] он относил эту проблему к числу весьма важных, требующих решения. В соответствии с этим в данной работе в дополнение к традиционным способам конструирования численных схем решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и в развитие [2, 3] предложен новый подход, основанный на адаптации параметрических соотношений для интегродифференциальных сплайнов (ИД-сплайнов) и их следствий для конструирования новых дискретных схем и дискретно-непрерывных сплайн-схем второго и третьего порядков.

1. Дискретные схемы второго и третьего порядков, построенные на нерегулярном шаблоне

Рассматривается задача Коши для ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b].$$

Полученные в работе дискретные схемы второго и третьего порядков следуют из параметрических соотношений, относящихся к дифференциальным и интегродифференциальным сплайнам, и следствий из этих соотношений — аппроксимационных формул для производных, а также из обобщенной на нерегулярный шаблон квадратурной формулы парабол, экстраполяционной формулы и др. [4]. Так, из квадратных дифференциальных сплайнов и условий непрерывности производных следуют параметрические соотношения функционально-дифференциального типа:

$$\bar{m}_i + \bar{m}_{i-1} = \frac{2\Delta f_i}{h_i}, \qquad \frac{\bar{m}_i}{h_{i+1}} - \frac{\bar{m}_{i-1}}{h_i} = \frac{\Delta f_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{\Delta f_i}{h_i^2}. \tag{1}$$

(Здесь и ниже f обозначает аппроксимируемую функцию в задаче теории приближения, $\bar{m}_i = f_i'$, $m_i = f_i''$, $I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$, $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ — параметр нерегулярности сетки.)

Из соотношений (1) в работе [2] получены аппроксимационные формулы для производных на нерегулярном шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) $(h = \mathrm{var})$:

$$\bar{m}_{i-1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[-\frac{H_{2i}^{i+1}}{h_i} f_{i-1} + \frac{(H_i^{i+1})^2}{h_i h_{i+1}} f_i - \frac{1}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right],$$

$$\bar{m}_i = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[-\delta_{i+1} f_{i-1} + \frac{H_i^{i+1}\Delta h_{i+1}}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{1}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right] \left(\frac{h_i^2 \delta_{i+1}}{6} M_{3,i} \right), \tag{2}$$

$$\bar{m}_{i+1} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[\delta_{i+1} f_{i-1} - \frac{(H_i^{i+1})^2}{h_i h_{i+1}} f_i + \frac{H_i^{2(i+1)}}{h_{i+1}} f_{i+1} \right], \tag{3}$$

$$m_i = \frac{2}{H_i^{i+1}} \left[\frac{1}{h_i} f_{i-1} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) f_i + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right], \tag{4}$$

здесь $H_{ki}^{p(i+1)} = kh_i + ph_{i+1}$, $M_{3,i} = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(x)|$, в скобках рядом с формулами будут указываться правые части оценок погрешностей аппроксимации производных или интегралов.

Рассмотрение нескольких типов квадратных ИД-сплайнов приводит к обобщенной на $h = \mathrm{var}$ двухинтервальной квадратурной формуле парабол

$$\frac{1}{h_{i+1}^2} I_i^{i+1} + \frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{h_i} f_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) f_i + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right], \tag{5}$$

к интегродифференциальной параметрической связи

$$\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i} = \frac{1}{6} \left(h_{i+1}\bar{m}_{i+1} + 2H_i^{i+1}\bar{m}_i + h_i \bar{m}_{i-1} \right), \tag{6}$$

квадратурным формулам

$$I_{i-1}^i = \frac{h_i^3}{6H_i^{i+1}} \left(\frac{H_{2i}^{3(i+1)}}{h_i^2} f_{i-1} + \frac{H_i^{i+1} H_i^{3(i+1)}}{h_i^2 h_{i+1}} f_i - \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right),$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}^3}{6H_i^{i+1}}\left(-\frac{1}{h_i}f_{i-1} + \frac{H_i^{i+1}H_{3i}^{i+1}}{h_i h_{i+1}^2}f_i + \frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i+1}^2}f_{i+1}\right), \tag{7}$$

$$I_{i-1}^{i} = \frac{h_i}{3}(f_{i-1} + 2f_i) - \frac{h_i^2}{6}\bar{m}_i \ \left(\frac{5h_i^4}{24}M_{3,i}\right),$$

$$I_{i-1}^{i} = h_i f_{i-1} + \frac{h_i^2}{6}(\bar{m}_i + 2\bar{m}_{i-1}) \ \left(\frac{h_i^4}{24}M_{3,i}\right),$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}^2}{6H_i^{i+1}}\left(\frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i-1}}f_{i-2} - \frac{3(H_i^{i+1})^2 + 2h_{i+1}H_{i-1}^{i}}{h_{i-1}h_i}f_{i-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{6h_i H_{i-1}^{i} + h_{i+1}(3h_{i-1} + 6h_i + 2h_{i+1})}{h_i h_{i+1}}f_i\right), \tag{8}$$

лево- и правосторонним одноинтервальным интегрофункциональным аппроксимационным формулам для $\bar{m}_{i-1}, \ \ \bar{m}_{i+1}$

$$\bar{m}_{i-1} = \frac{6I_{i-1}^{i}}{h_i^2} - \frac{2}{h_i}(f_i + 2f_{i-1}), \quad \bar{m}_i = \frac{2}{h_i}(f_{i-1} + 2f_i) - \frac{6I_{i-1}^{i}}{h_i^2} \ \left(\frac{h_i^2}{12}M_{3,i}\right),$$

трехинтервальным интегральным формулам для $\bar{m}_i, \ \ \bar{m}_{i+1}$

$$\bar{m}_i = \frac{2}{A}\left[\frac{h_i^2 - h_{i+1}^2}{h_{i+1}}I_{i+1}^{i+2} + \frac{3h_{i+1}H_{i+1}^{i+2} + (h_{i+2}^2 - h_i^2)}{h_{i+1}}I_i^{i+1} - \frac{H_{i+1}^{i+2}H_{2(i+1)}^{i+2}}{h_i}I_{i-1}^{i}\right], \tag{9}$$

$$\bar{m}_{i+1} = \frac{2}{A}\left[\frac{H_i^{i+1}H_i^{2(i+1)}}{h_{i+2}}I_{i+1}^{i+2} - \frac{(h_i^2 - h_{i+2}^2) + 3h_{i+1}H_i^{i+1}}{h_{i+1}}I_i^{i+1} + \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+2}^2}{h_i}I_{i-1}^{i}\right], \tag{10}$$

где $A = h_{i+1}^2(H_{2i}^{i+1} + 2h_{i+2}) + h_{i+1}(h_i^2 + h_{i+2}^2) + h_i h_{i+2}(H_i^{3(i+1)} + h_{i+2})$.

Формулы (9), (10) при $h = \mathrm{const}$ становятся двухинтервальными:

$$\bar{m}_i = \frac{1}{h^2}(I_i^{i+1} - I_{i-1}^{i}), \quad \bar{m}_{i+1} = \frac{1}{h^2}(I_{i+1}^{i+2} - I_i^{i+1}).$$

2. Явные двухшаговые схемы второго порядка

Схема 2Я2А (2 — "шаговость", Я — "явная", 2 — порядок точности, А — модификация) получается аппроксимацией $(dy/dx)_{x_n}$ по формуле (2):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+1} &= \hat{y}_n - \delta_{n+1}^2\Delta\hat{y}_n + H_n^{n+1}\delta_{n+1}F_n \quad (h = \mathrm{var}), \\ \hat{y}_{n+1} &= \hat{y}_{n-1} + 2hF_n \qquad\qquad\qquad (h = \mathrm{const}). \end{aligned}$$

При $h = \mathrm{const}$ (регулярный шаблон) схема 2Я2А есть двухшаговая схема Эйлера. Из оценки порядка аппроксимации (2) следует, что порядок аппроксимации схемы при $h_{n+1} < h_n^2$ повышается на единицу без изменения количества точек шаблона.

Из аппроксимации второй производной (4) следует функционально-дифференциальная схема 2Я2Б:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{n+1} &= -\delta_{n+1}\hat{y}_{n-1} + \frac{H_n^{n+1}}{h_n}\hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{2}H_n^{n+1}F'(x_n,\hat{y}_n) \quad (h=\text{var}),\\
\hat{y}_{n+1} &= -\hat{y}_{n-1} + 2\hat{y}_n + h^2F'_n \qquad (h=\text{const}).
\end{aligned}
$$

Из второго параметрического соотношения из (1) следует схема 2Я2В:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{n+1} &= \hat{y}_n + \delta_{n+1}^2\Delta\hat{y}_n + h_{n+1}^2\left(\frac{F_n}{h_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{h_n}\right) \quad (h=\text{var}),\\
\hat{y}_{n+1} &= \hat{y}_n + \Delta\hat{y}_n + h\Delta F_n \qquad (h=\text{const}).
\end{aligned}
$$

Путем преобразования двух соотношений (1) легко получается схема Адамса—Бэшфорта (2Я2Г):

$$
\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^2}{2}\left(\frac{H_{2n}^{n+1}}{h_nh_{n+1}}F_n - \frac{1}{h_n}F_{n-1}\right) \quad (h=\text{var}).
$$

3. Неявные одно- и двухшаговая схемы второго порядка

Первая схема — это классическая одношаговая схема Эйлера—Коши (1НЯ2) (НЯ – “неявная"), следующая из первого параметрического соотношения из (1), а вторая двухшаговая (2НЯ2) — из аппроксимационной формулы (3):

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{n+1} &= \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{2}[F_n + F(x_{n+1},\hat{y}_{n+1})],\\
\hat{y}_{n+1} &= \frac{h_{n+1}}{H_n^{2(n+1)}}\left[\frac{(H_n^{n+1})^2}{h_nh_{n+1}}\hat{y}_n - \delta_{n+1}\hat{y}_{n-1} + H_n^{n+1}F(x_{n+1},\hat{y}_{n+1})\right].
\end{aligned}
$$

Последняя схема при $h = \text{const}$ преобразуется к виду

$$
\hat{y}_{n+1} = -\frac{1}{3}\hat{y}_{n-1} + \frac{4}{3}\hat{y}_n + \frac{2}{3}hF(x_{n+1},\hat{y}_{n+1}).
$$

4. Явная трехшаговая схема третьего порядка (3Я3)

Эта схема вытекает из квадратурной формулы (8) и имеет вид

$$
\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^2}{6H_n^{n+1}}\left[\frac{H_{3n}^{2(n+1)}}{h_{n-1}}F_{n-2} - \frac{3(H_n^{n+1})^2 + 2h_{n+1}H_{n-1}^n}{h_{n-1}h_n}F_{n-1} + \right.
$$
$$
\left. + \frac{6h_nH_{n-1}^n + h_{n+1}(H_{3(n-1)}^{6n} + 2h_{n+1})}{h_nh_{n+1}}F_n\right].
$$

При $h = \text{const}$ 3Я3 преобразуется к известной схеме, легко получающейся интегроинтерполяционным методом [4]:

$$
\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{12}(5F_{n-2} - s16F_{n-1} + 23F_n).
$$

5. Неявные двух- и одношаговые схемы третьего порядка

Из обобщенной формулы парабол (5) следует первая двухшаговая схема (2НЯ3А)

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n - \delta_{n+1}^2 \Delta \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^2}{3}\left[\frac{1}{h_n}F_{n-1} + \frac{2H_n^{n+1}}{h_n h_{n+1}}F_n + \frac{1}{h_{n+1}}F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right],$$

которая при $h = \mathrm{const}$ преобразуется к известной:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{3}\left[F_{n-1} + 4F_n + F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right].$$

Одноинтервальная, трехточечная квадратурная формула (7) определяет вторую двухшаговую схему 2НЯ3Б:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}^3}{6H_n^{n+1}}\left[-\frac{1}{h_n}F_{n-1} + \frac{H_n^{n+1}H_{3n}^{n+1}}{h_n h_{n+1}^2}F_n + \frac{H_{3n}^{2(n+1)}}{h_{n+1}^2}F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right],$$

которая при $h = \mathrm{const}$ упрощается и принимает следующий вид [4]:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{12}\left[-F_{n-1} + 8F_n + 5F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right].$$

Две неявные одношаговые схемы 1НЯ3А и 1НЯ3Б выведены из квадратурных формул (8), а двухшаговая схема 2НЯ3Д получена из параметрической связи (6) —

$$1\text{НЯ3А}: \qquad \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{3}[F_n + 2F(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] - \frac{h_{n+1}^2}{6}F'(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}),$$

$$1\text{НЯ3Б}: \qquad \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + h_{n+1}F_n + \frac{h_{n+1}^2}{6}[2F'_n + F'(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})],$$

$$1\text{НЯ3Д}: \qquad \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \delta_{n+1}\Delta \hat{y}_n + \frac{h_{n+1}}{6}[h_n F'_{n-1} + 2H_n^{n+1}F'_n + h_{n+1}F'(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})].$$

Все эти схемы имеют повышенно-дифференциальный тип, так как в их правые части входят вторые производные от решения $\hat{y}(x)$.

В работе выполнен анализ устойчивости некоторых двухшаговых схем на нерегулярном шаблоне путем проверки условия корней однородных характеристических уравнений. В табл. 1 приведены значения корней q_1, q_2 для шести двухшаговых схем.

Таблица 1

Схема q_i	2Я2А	2Я2Б	2Я2В	2НЯ2		2НЯ3А	2НЯ3Д
				$h = \mathrm{const}$	$0<\delta_{n+1}<2$		
q_1	δ_{n+1}^2	δ_{n+1}	δ_{n+1}^2	1	1	1	1
q_2	-1	1	1	$1/3$	$0 \div 4/5$	$-\delta_{n+1}^2$	δ_{n+1}

Из анализа q_1 и q_2 можно сделать следующие выводы.

Для обеспечения устойчивости схем 2Я2А, 2НЯ3А на нерегулярном (в общем случае) шаблоне необходимо выбрать параметр неравномерности сетки $\delta_{n+1} \le 1$.

Чтобы обеспечить устойчивость схем 2Я2Б, 2Я2В, 2НЯ3Д, для которых при $h = \mathrm{const}$ условие корней не выполняется, необходимо формировать неравномерную сетку с $\delta_{n+1} < 1$.

Схема 2НЯ2 при формировании сетки с $0 < \delta_{n+1} \le 2$ для обеспечения устойчивости не требует выполнения условия $\delta_{n+1} < 1$.

6. Явные последовательные сплайн-методы второго и третьего порядков

В основу данных дискретно-непрерывных методов кладутся дискретные решения второго и третьего порядка (шаг “С-1") и соответствующие по порядку сплайн-функции — квадратные и кубические (шаг “С-2").

В качестве этих сплайн-функций могут быть приняты

$$S_2(x) = \hat{y}_n + \bar{m}_n(x - x_n) + \frac{1}{h_{n+1}}\left(\frac{\Delta\hat{y}_{n+1}}{h_{n+1}} - \bar{m}_n\right)(x - x_n)^2 \quad (i = \overline{0, N-1}), \tag{11}$$

$$S_3(x) = \hat{y}_n + \bar{m}_n(x - x_n) + \left(\frac{3\Delta\hat{y}_{n+1}}{h_{n+1}^2} - \frac{3\bar{m}_n}{h_{n+1}} - \frac{\Delta\bar{m}_{n+1}}{h_{n+1}}\right)(x - x_n)^2 +$$
$$+\frac{1}{h_{n+1}^2}\left(-\frac{2}{h_{n+1}}\Delta\hat{y}_{n+1} + 2\bar{m}_n + \Delta\bar{m}_{n+1}\right)(x - x_n)^3 \quad (i = \overline{0, N-1}). \tag{12}$$

Таким образом, алгоритм получения непрерывного сплайн-решения содержит две совокупности вычислительных процедур, выполняющихся последовательно и независимо друг от друга.

Пусть $n = \overline{0, N}$. На каждом отрезке $[x_n, x_{n+1}]$:

а) На шаге С-1 рассчитываются $\hat{y}_{n+1}, \;\; \hat{y}'_{n+1} = \bar{m}_{n+1}$ по одной наиболее приемлемой явной (несоставной) или явно-неявной (составной) схеме, скомпонованной из совокупности схем — явной и неявной. Решение, полученное на этом шаге, может быть названо опорным. Порядок точности схемы должен соответствовать порядку сходимости сплайн-функции.

б) На шаге С-2 на каждом отрезке $[x_n, \;\; x_{n+1}]$ определяется сплайн-функция (11) или (12). Для этого необходимо рассчитать коэффициенты многочленов $S_2(a_i, x)$ $(i = \overline{0, 2})$ и $S_3(a_i, x)$
$(i = \overline{0, 3})$. Коэффициенты a_0 определяются значением $\hat{y}_0$ и значениями $\hat{y}_n$, вычисленными на предыдущем шаге, а коэффициенты a_1 для $S_2(a_i, x)$ — дифференцированием $S_2(a_i, x)$ на предыдущем отрезке ($\bar{m}_0 = F(x_0, y_0)$). Коэффициенты a_1 для $S_3(a_i, x)$ вычисляются по формуле $\bar{m}_n = F(x_n, \hat{y}_n)$ $(n = \overline{0, N})$. Коэффициенты a_2 для $S_2(a_i, x)|^{[x_n, x_{n+1}]}$ и a_2, a_3 для $S_3(a_i, x)|^{[x_n, \; x_{n+1}]}$ $(n = \overline{1, N-1})$ вычисляются с помощью подстановки в их формулы значений $\hat{y}_{n+1}, \;\; \bar{m}_n$ для $S_2(a_i, x)$ и $\hat{y}_{n+1}, \;\; \bar{m}_n, \;\; \bar{m}_{n+1}$ для $S_3(a_i, x)$.

Нетрудно видеть, что оба решения являются дискретно-непрерывными, причем по построению схема второго порядка обеспечивает также и непрерывность первой производной во всех внутренних узлах.

Все изложенные выше дискретные схемы и последовательные сплайн-методы апробированы на конкретных методических расчетах для решения задачи Коши для ОДУ, имеющего точное решение:

$$dy/dx = x + y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 0.4065].$$

Задача решалась на неравномерной сетке с $\delta_{n+1} = 0.9$ ($x = 0, \quad 0.15, \quad 0.285, \quad 0.4065$) по составным (явным) схемам типа “предиктор-корректор", образующих следующие сочетания: П1К2, П2К2, П2К3, П3К3. (Здесь П и К указывают на шаги “предиктор"и “корректор", а следующие за ними цифры — на порядок точности схем.) Из сочетаний схем следует, что для схемы К2 принимались предикторы первого и второго порядков, а для К3 — второго и третьего.

Результаты расчетов $\hat{y}_n$ $(n = 1, 2, 3)$ по указанным составным схемам приведены в табл. 2, где указаны явные и неявные схемы, составляющие шаги “предиктор"и “корректор"соответственно. В последнем столбце этой таблицы приведено точное решение, а в скобках — расхождение численных и точных решений (в процентах).

Таблица 2

<table>
<tr><td>Схема</td><td>П1</td><td>К2</td><td>П2</td><td>К2</td><td>П2</td><td>К3</td><td>П3</td><td>К3</td><td rowspan="2">Точное решение</td></tr>
<tr><td>x_n</td><td>1Я1</td><td>1НЯ2</td><td>2Я2А</td><td>1НЯ2</td><td>2Я2А</td><td>2НЯ3А</td><td>3Я3</td><td>2НЯ3А</td></tr>
<tr><td>0.150</td><td colspan="2">1.172711
(0.08)</td><td colspan="2">1.174097
(0.036)</td><td colspan="2">1.173700
(0.0027)</td><td colspan="2">1.173700
(0.0027)</td><td>1.173668</td></tr>
<tr><td>0.285</td><td colspan="2">1.372442
(0.15)</td><td colspan="2">1.375370
(0.061)</td><td colspan="2">1.374445
(0.0057)</td><td colspan="2">1.374467
(0.00415)</td><td>1.374524</td></tr>
<tr><td>0.4065</td><td colspan="2">1.593437
(0.20)</td><td colspan="2">1.597867
(0.079)</td><td colspan="2">1.596537
(0.0043)</td><td colspan="2">1.596576
(0.0019)</td><td>1.596606</td></tr>
</table>

Анализ приведенных в табл. 2 результатов указывает на повышение точности расчетов при повышении порядков схем как на шаге “П", так и на шаге “К". Минимальную погрешность имеют результаты, полученные по схеме П3К3, однако схема П2К3 тоже дает хорошие результаты.

Таблица 3

Схема x_n	П1К2	П2К2	П2К3	Точное значение
0.150	1.302812 (1.57)	1.321290 (0.18)	1.323700 (0.0024)	1.323668
0.285	1.656175 (0.47)	1.660534 (0.06)	1.659445 (0.0048)	1.659524
0.4065	1.981588 (1.07)	2.001969 (0.06)	2.003037 (0.0035)	2.003106

Получено также непрерывно-дискретное решение, в котором на шаге С-1 принимались схемы П1К2, П2К2 — для сплайна (11) и П2К3 — для сплайна (12) .

Непрерывные сплайн-решения в силу их коллокационных свойств можно использовать для анализа поведения производных. Результаты численных значений производных, вычисленных дифференцированием $S_2(x)$ и $S_3(x)$, приведены в табл. 3. В скобках ниже численных значений производных указаны проценты их отличия от точных.

Как видно из табл. 3, точность вычисления производных, полученная с использованием $S_2(x)$ и опорного решения П2К2, существенно превышает точность, полученную по $S_2(x)$ и П1К2, а точность для $S_3(x)$ и П3К3 примерно на порядок лучше точности для $S_2(x)$ и П2К2.

Список литературы

[1] Яненко Н. Н. Проблемы вычислительной механики. В *“Научные основы прогр. техники и технол.”*, Машиностроение, М., 1986.

[2] Киреев В. И., Патрикеева Т. К. Интегродифференциальные консервативные сплайны и их применение в интерполяции, численном дифференцировании и интегрировании. В *"Вычисл. технологии"*, **4**, №10, ИВТ СО РАН, Новосибирск, 1995, 233–244.

[3] Киреев В. И. Интегральный метод приближения функций алгебраическими многочленами и биквадратными сплайнами. *Вестник МАИ*, **1**, №1, 1994, 48–57.

[4] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* Наука, М., 1989.

Поступила в редакцию 30 июня 1996 г.