Вычислительные технологии **Том 16, № 6, 2011**

Моделирование процесса измерения комптоновского рассеяния в позитронной эмиссионной томографии*

И. Г. Казанцев[1], И. П. Яровенко[2], И. В. Прохоров[2]
[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия*
e-mail: kazantsev.ivan6@gmail.com, yarovenko@iam.dvo.ru, prh@iam.dvo.ru

Исследуется идеализированная интегральная математическая модель формирования проекционных данных в позитронной эмиссионной томографии на основе рассеянных фотонов. Проведенные численные эксперименты показали хорошее совпадение проекций, полученных аналитически и статистическим методом Монте-Карло.

Ключевые слова: позитронная эмиссионная томография, комптоновское рассеяние, идеализированная модель, статистическое моделирование.

Введение

Идеализированная интегральная модель позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) на первичных (не рассеянных) фотонах хорошо известна [1]. Для распределения внутренних источников активности изотопа $f(x, y, z)$ внутри среды с линейным коэффициентом ослабления $\mu(x, y, z)$ и детекторов малых размеров A и B вблизи поверхности просвечиваемого тела модель формирования данных имеет вид

$$P^{AB} = \exp\left[-\int\limits_A^B \mu(x', y', z')dl'\right] \int\limits_A^B f(x, y, z)dl, \qquad (1)$$

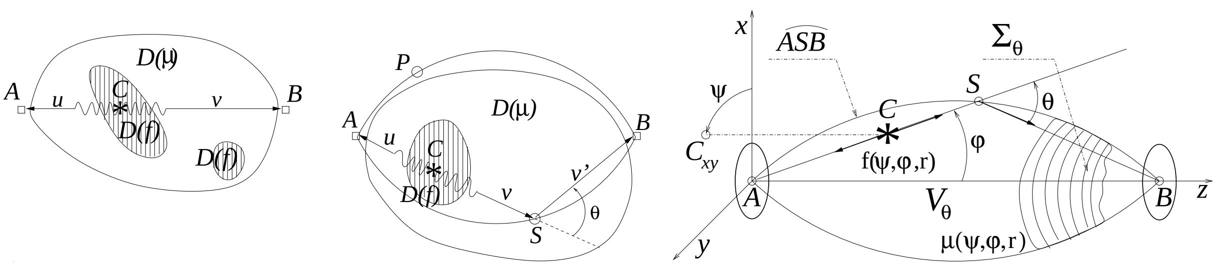
где dl, dl' — элементы длины на линии AB. Функция μ описывает анатомическую структуру просвечиваемого организма, и ее носитель $D(\mu)$ есть ограниченная односвязная область. Источники с эмиссионной активностью f после их введения в среду $D(\mu)$ распределяются в соответствии с особенностями функционирования организма, в силу чего носителем функции f является некоторая многосвязная область $D(f) \subset D(\mu)$ неизвестной формы. Задача состоит в определении (реконструкции) активности изотопов f и носителя $D(f)$ по данным P^{AB}, регистрируемым большим множеством пар детекторов (A, B). В традиционной модели ПЭТ экспоненциальный множитель в (1) считается известным из данных предварительного сканирования (например, методами классической рентгеновской или магнитно-резонансной томографии). Физическая модель ПЭТ основана на использовании большого числа пар гамма-квантов (u, v), разлетающихся

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-07-00131-а и 11-01-98521), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” и гранта 09-II-СО-004 Конкурса интеграционных проектов ДВО РАН с научными учреждениями СО РАН.

приблизительно в противоположных направлениях из точки аннигиляции C (рис. 1, *а*) в результате столкновения позитрона, излучаемого радионуклидом f, с одним из электронов среды μ. Эти два фотона регистрируются методом совпадений внутри малого временного промежутка. Данные детекторов P^{AB} корректируются и затем интерпретируются как интегралы от f по прямым линиям, в которых учитываются только первичные фотоны с энергией $E = 511$ кэВ.

Однако на практике в детекторы попадают и фотоны v' с энергиями $E' < E$, претерпевшие комптоновское рассеяние (рис. 1, *б*). В зависимости от разрешения детектора по энергии в простейшем случае используется спектральное окно чувствительности $W = [t, 511]$ с порогом t и фотоны с энергией вне окна W в алгоритмах ПЭТ не учитываются. Для попавших в окно фотонов методами моделирования оценивается отношение числа первичных фотонов к рассеянным и данные масштабируются в соответствии с этим отношением, что принято называть коррекцией на рассеяние. Выбор порога t и другие проблемы (одна из них состоит в малой статистике отсчетов) обусловливают широкое привлечение в ПЭТ статистических методов. Модель (1) является идеализированной, однако именно на ее основе получены аналитические формулы обращения, позволившие ответить на вопросы о принципиальной возможности восстановления функции f для регулярных систем регистрации, даны оценки точности и построены операторы прямой задачи, позволяющие применять итерационные методы.

Из физических экспериментов известно, что в медицинских сканерах рассеянные фотоны составляют от 30 до 70 % общего числа регистрируемых фотонов, при этом однократно рассеянные (вторичные) фотоны составляют большинство (90–95 %) из всех многократно рассеянных фотонов. За последние два десятилетия достигнут прогресс в создании детекторов с достаточно высоким (до 2–3 %) разрешением по энергии. Поэтому актуальной становится задача не только коррекции, или отбрасывания рассеянных фотонов, но и использования их в процессе восстановления активности $f(x, y, z)$ внутренних источников. Для этого необходимо иметь инструмент моделирования регистрации потока рассеянных фотонов, подобный проекционной модели (1) классической томографии. Общие проблемы переноса гамма-излучения и его применения в томографии исследованы в монографиях [2 – 4].



а *б* *в*

Рис. 1. Идеализированные модели ПЭТ: *а* — ПЭТ на первичных фотонах (u, v) с энергией $E =$ 511 кэВ, $C \in D(f)$ — точка аннигиляции; *б* — ПЭТ на однократном комптоновском рассеянии; (u, v) — пара аннигиляционных фотонов, $S \in D(\mu)$ — точка рассеяния, v' — фотон v энергии E', рассеянный с углом θ; точка P геометрически является потенциальной точкой рассеяния с углом θ, однако находится вне среды μ ($P \notin D(\mu)$, $\mu(P) = 0$) и вклада в значения счетчика B не дает; *в* — поверхность Σ_θ — геометрическое место точек S рассеяния с углом θ и сферическими координатами $(\psi, \varphi, |AS|)$; точка C_{xy} — проекция C на плоскость xAy, $\angle ABS = \theta - \varphi$

В практических задачах оценки однократного рассеяния в ПЭТ в биомедицинских сканерах широко используется аппроксимация SSS (Single Scatter Simulation) [5, 6]. Вывод этой аппроксимации и исследование ее связи с уравнением переноса можно найти в работе [7]. Приближение SSS оценивает количество вторичных комптоновских аннигиляционных пар фотонов, зарегистрированных парой детекторов A и B как интеграл по всему объему V возможных событий рассеяния S за единицу времени:

$$S_V^{AB} = \int\limits_V dV \left(\frac{\sigma_{AS}\sigma_{BS}}{4\pi |AS|^2 |BS|^2} \right) \frac{\mu}{\sigma_C} \frac{\partial \sigma_{\mathrm{C}}}{\partial \Omega} [I^A + I^B], \tag{2}$$

где

$$I^A = \epsilon_{AS}\, \epsilon'_{BS}\, e^{-\left(\int\limits_A^S \mu dl + \int\limits_S^B \mu' dl\right)} \int\limits_A^S f dl, \quad I^B = \epsilon'_{AS}\, \epsilon_{BS}\, e^{-\left(\int\limits_A^S \mu dl + \int\limits_S^B \mu' dl\right)} \int\limits_S^B f dl. \tag{3}$$

Здесь σ_{AS} и σ_{BS} — геометрические поперечные сечения детекторов A и B; f — активность источников; $\mu = \mu(E, S)$ — линейный коэффициент ослабления, зависящий от энергии E и положения точки рассеяния S; $\dfrac{\partial \sigma_{\mathrm{C}}}{\partial \Omega}$ — дифференциальное сечение комптоновского рассеяния; ϵ_{AS} и ϵ_{BS} — величины, связанные с эффективностью детекторов A и B. Эффективность ϵ поглощения энергии приемником зависит как от энергии кванта, так и от угла падения фотона на плоскость детектора. Знак штриха означает значение величины после рассеяния. Уравнение (2) симметрично относительно A и B, и рассеянные фотоны регистрируются обоими детекторами A и B. Дифференциальное сечение комптоновского рассеяния вычисляется по формуле

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{C}}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{E'}{E} - \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{E'}{E}\right)^3 \right), \tag{4}$$

где r_e — классический радиус электрона. Полное сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{C}} = \int d\Omega \frac{d\sigma_{\mathrm{C}}}{d\Omega}. \tag{5}$$

Модифицируем это уравнение в предположении, что система (A, B) настроена для регистрации пар фотонов (u, v), из которых u попадает в детектор A нерассеянным с энергией $E = 511$ кэВ, а фотон v', отклонившись в точке S на угол θ, зарегистрирован в B с энергией E' (см. рис. 1, *б*). Связь между энергиями E и E' до и после столкновения описывается известной формулой, однозначно определяющей угол рассеяния θ:

$$E'/E = 1/(2 - \cos\theta). \tag{6}$$

В такой постановке слагаемое I^B в (2) равно нулю. Введем обозначение

$$Q_{f,\mu}(x, y, z) \equiv \frac{\mu}{\sigma_C} \frac{\partial \sigma_{\mathrm{C}}}{\partial \Omega}\, \epsilon_{AS}\, \epsilon'_{BS}\, e^{-\left(\int\limits_A^S \mu dl + \int\limits_S^B \mu' dl\right)} \int\limits_A^S f dl, \tag{7}$$

где (x, y, z) — декартовы координаты точки рассеяния S. Тогда (2) принимает вид

$$S_V^{AB} = \int\limits_V dV \left(\frac{\sigma_{AS}\sigma_{BS}}{4\pi |AS|^2 |BS|^2} \right) Q_{f,\mu}(x, y, z). \tag{8}$$

Это уравнение будет использовано для вывода идеализированного интегрального уравнения однократного комптоновского рассеяния с определенным углом θ.

1. Идеализированная модель

Аппроксимация (2)–(3) апробирована в натурных физических и модельных статистических экспериментах по коррекции на рассеяние и известна [8 – 10] как достаточно точный инструмент описания процесса регистрации рассеянных фотонов в медицинских сканерах, адаптируемый к объектам V различной формы. Однако для детекторов с идеальным спектральным разрешением и с привлечением геометрических свойств траекторий рассеянных фотонов и поверхностей, на которых сосредоточены точки рассеяния с одинаковым углом θ, в уравнении (8) возможно точное описание объема V, и тогда интегрирование в (8) приобретает конкретные пределы, что позволяет вывести интегральное уравнение однократного рассеяния.

Из геометрии однократного рассеяния легко видеть (см. рис. 1, *б*), что для всех точек рассеяния S с углом рассеяния θ справедливо простое геометрическое свойство: $\angle ASB = \pi - \theta$. Тогда геометрическим местом точек, где происходит рассеяние с определенным углом θ, является поверхность Σ_θ тела вращения V_θ, образованного вращением вокруг оси Z дуги $\widehat{ASB}$ (см. рис. 1, *в*). Используя сферические координаты (ψ, φ, r) с началом в точке A, поверхность Σ_θ и тело V_θ могут быть записаны как

$$\Sigma_\theta = \{(\psi, \varphi, r) |\, \psi \in [0, 2\pi), \phi \in [0, \theta], r = |AS|\}, \tag{9}$$

$$V_\theta = \{(\psi, \varphi, r) |\, \psi \in [0, 2\pi), \phi \in [0, \theta], r \in [0, |AS|]\}. \tag{10}$$

Легко показать, что радиус окружности, которой принадлежит дуга $\widehat{ASB}$,

$$R = \frac{|AB|}{2\sin\theta}. \tag{11}$$

Используя закон синусов для треугольника $\triangle ABS$

$$\frac{|AS|}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{|BS|}{\sin(\varphi)} = 2R, \tag{12}$$

получаем выражения для хорд

$$|AS| = |AB|\frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin\theta}, \quad |BS| = |AB|\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}. \tag{13}$$

Пусть детектор B регистрирует фотоны, рассеянные под такими различными углами, что $\theta \le T$ для некоторого выбранного угла $T \le \pi/2$. Тогда область интегрирования V_T определена формулой (10) и соответствует в (8) носителю V точек рассеяния с углами рассеяния $\theta \le T$.

Идеализированная модель $S^{AB}_{V_T}$ рассеяния в точках множества V_T будет выведена, используя интеграл (8), вычисленный в точках малых детекторов круглой формы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с диаметрами δ и центрами в A и B соответственно и усредненный затем по паре кругов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и их площадям в виде предела

$$S^{AB}_{V_T} = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\left(\pi\dfrac{\delta^2}{4}\right)^2} \int\limits_{\mathbf{A}} d\mathbf{A} \int\limits_{\mathbf{B}} d\mathbf{B} \int\limits_{V_T} dV_T \left(\frac{\sigma_{AS}\sigma_{BS}}{4\pi|AS|^2|BS|^2}\right) Q_{f,\mu}(x, y, z). \tag{14}$$

Для малых значений δ геометрические сечения кругов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, перпендикулярные к лучам AS и SB, являются приближенно эллипсами с площадями

$$\sigma_{AS} \approx \frac{\pi\delta^2 \cos\varphi}{4}, \quad \sigma_{BS} \approx \frac{\pi\delta^2 \cos(\theta-\varphi)}{4}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и полагая значения внутренних интегралов $\int\limits_{V_T}$ близкими при варьировании точек $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$, получим

$$S_{V_T}^{AB} = \int\limits_{V_T} dV_T \left(\frac{\cos\varphi\cos(\theta-\varphi)}{4\pi|AS|^2|BS|^2} \right) Q_{f,\mu}(x,y,z). \tag{16}$$

Произведем замену переменных в (16) с декартовых координат (x,y,z) на криволинейные (ψ,φ,θ), где (ψ,φ) — сферические координаты, а $\theta \in [0,T]$ (при фиксированном расстоянии $|AB|$), по правилу

$$\begin{aligned} x &= X(\psi,\varphi,\theta) = |AS|\sin\varphi\cos\psi, \\ y &= Y(\psi,\varphi,\theta) = |AS|\sin\varphi\sin\psi, \\ z &= Z(\psi,\varphi,\theta) = |AS|\cos\varphi, \end{aligned} \tag{17}$$

здесь зависимость $|AS|$ от θ и φ выражается уравнением (13). Вычислим элементарный объем

$$dV_T = dxdydz = |J|d\psi d\varphi d\theta, \tag{18}$$

где J есть якобиан

$$J = \begin{bmatrix} \partial X/\partial\psi & \partial X/\partial\varphi & \partial X/\partial\theta \\ \partial Y/\partial\psi & \partial Y/\partial\varphi & \partial Y/\partial\theta \\ \partial Z/\partial\psi & \partial Z/\partial\varphi & \partial Z/\partial\theta \end{bmatrix}, \tag{19}$$

а $|J|$ — его определитель. Учитывая (13), можно показать, что

$$|J| = \det J = \frac{|AB|^3 \sin^2(\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)}{\sin^4(\theta)} = \frac{|AS|^2|SB|^2}{|AB|}, \tag{20}$$

и после замены переменных уравнение (16) принимает вид

$$S_{V_T}^{AB} = \int\limits_0^T d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\theta} d\varphi \, \frac{\cos\varphi\cos(\theta-\varphi)}{4\pi|AB|} Q_{f,\mu}(\psi,\varphi,\theta). \tag{21}$$

Учитывая (7) и полагая точечные приемники идеально эффективными ($\epsilon = \epsilon' = 1$), получим интегральное уравнение рассеяния с углами, меньшими T:

$$S_{V_T}^{AB} = \int\limits_0^T d\theta \int\limits_0^{\theta} d\varphi \frac{\cos\varphi\cos(\varphi-\theta)}{4\pi|AB|} \int\limits_0^{2\pi} d\psi \, \frac{\mu(\psi,\varphi,|AS|)}{\sigma_{\mathrm{C}}} \frac{\partial\sigma_{\mathrm{C}}}{\partial\Omega} e^{-\left(\int\limits_A^S \mu dl + \int\limits_S^B \mu' dl\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{|AS|} f(\psi,\varphi,r)dr. \tag{22}$$

Подынтегральная для $\int\limits_0^T$ часть

$$\xi_\theta^{AB} = \int\limits_0^\theta d\varphi \frac{\cos\varphi\cos(\varphi-\theta)}{4\pi|AB|} \int\limits_0^{2\pi} d\psi\, \frac{\mu(\psi,\varphi,|AS|)}{\sigma_C} \frac{\partial\sigma_C}{\partial\Omega}\, e^{-\left(\int\limits_A^S \mu dl + \int\limits_S^B \mu' dl\right)} \int\limits_0^{|AS|} f(\psi,\varphi,r)dr \quad (23)$$

может интерпретироваться как мгновенное количество рассеянных с углом θ фотонов, при этом

$$S_{V_T}^{AB} = \int\limits_0^T \xi_\theta^{AB} d\theta. \quad (24)$$

Предварительные результаты, подобные формуле (23), с точностью до скалярного множителя были получены в работе [11] с использованием геометрических вероятностей.

2. Статистическое моделирование

Для проверки адекватности формулы (23) реальному физическому процессу используем имитационное моделирование на основе метода Монте-Карло [12]. Идея метода основана на представлении переноса излучения в среде в виде случайного процесса — движения фотонов через среду, используя известные законы взаимодействия излучения с веществом. В результате такого моделировния накапливается необходимое количество статистической информации для того, чтобы построить оценку величины ξ_θ^{AB}. Этот подход позволяет имитировать сигнал, который будет наиболее близок к тому, что регистрирует реальный томограф, так как вносит в итоговый сигнал случайные шумы и ошибки, характерные для реального физического процесса.

Алгоритм, используемый в работе, реализуется в следующей последовательности.

1. *Розыгрыш точки аннигиляции фотона.* Пусть источник с эмиссионной активностью f распределен в некоторой области $G_0 = D(f) \subset D(\mu)$. На первом этапе разыгрываем точку r образования позитрона равномерно внутри G_0. Будем считать, что позитрон тут же аннигилирует, так что точки образования и аннигиляции позитрона совпадают.

2. *Розыгрыш направления движения фотонов, образовавшихся в результате аннигиляции.* Ограничимся рассмотрением наиболее вероятного случая, когда в результате аннигиляции образуются два фотона. Для применяемых в медицине фармпрепаратов отклонение образовавшихся в результате аннигиляции фотонов от антиколлинеарности, как правило, не превышает 10^{-3} рад. [5]. В связи с этим будем считать, что аннигиляционные фотоны распространяются строго в диаметрально противоположных направлениях. Вследствие изотропии первоначальных направлений движения фотона равномерно на сфере разыгрываем направление $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, в котором полетит первый из образовавшихся фотонов. Далее отслеживаем историю фотона, движущегося в направлении ω.

3. *Розыгрыш свободного пробега фотона в веществе.* Свободный пробег разыгрывается с учетом экспоненциального закона уменьшения интенсивности потока фотонов с расстоянием. Для нахождения длины свободного пробега в кусочно-неоднородной среде применялся алгоритм, приведенный в [12]. Если в результате свободного пробега фотон

покинул томограф, то такая траектория отбрасывается и выполняется переход к п. 1. В противном случае разыгрывается тип взаимодействия фотона с веществом.

4. *Розыгрыш взаимодействия фотона с веществом.* Для характерного в позитронной эмиссионной томографии диапазона энергий среди всех видов взаимодействия излучения с веществом преобладают фотоэлектрическое поглощение, комптоновское рассеяние и рассеяние по Рэлею [2]. Для определения типа взаимодействия излучения с веществом вычисляются вероятности поглощения фотона, рассеяния по Рэлею и по Комптону

$$P_a = \mu_a(E)/\mu(E), \quad P_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{R}}(E)/(\mu_{\mathrm{R}}(E) + \mu_{\mathrm{C}}(E)), \quad P_{\mathrm{C}} = 1 - P_{\mathrm{R}}, \tag{25}$$

где μ_a — коэффициент поглощения, μ_{R}, μ_{C} — коэффициенты рассеяния по Рэлею и Комптону соответственно. Здесь и далее символами α, β будем обозначать независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной в диапазоне $[0, 1]$.

Если $\alpha < P_a$, то фотон поглотился, и такая траектория дальше не отслеживается. Если $\alpha > P_a$, то фотон рассеется, и необходимо определить тип рассеяния. При $\beta < P_{\mathrm{R}}$ фотон рассеется по закону Рэлея, в противном случае фотон рассеется по закону Комптона.

5. *Рассеяние фотона по Рэлею.* Если фотон рассеялся по закону Рэлея, то разыгрываем новое направление движения $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$, которое связано с первоначальным направлением ω следующими соотношениями:

$$\omega'_1 = \sqrt{1-\nu^2}\,(\cos\phi\,\omega_3\,\omega_1 - \sin\phi\,\omega_2)\Big/\sqrt{1-\omega_3^2} + \nu\,\omega_1, \tag{26}$$

$$\omega'_2 = \sqrt{1-\nu^2}\,(\cos\phi\,\omega_3\,\omega_2 - \sin\phi\,\omega_1)\Big/\sqrt{1-\omega_3^2} + \nu\,\omega_2, \tag{27}$$

$$\omega'_3 = -\sqrt{1-\nu^2}\,\cos\phi\,\sqrt{1-\omega_3^2} + \nu\,\omega_3, \tag{28}$$

где ν — косинус угла между направлениями ω и ω', распределенный с плотностью вероятности

$$g(\nu) = \frac{3}{16\pi}(1-\nu^2), \tag{29}$$

азимутальный угол рассеяния $\phi = 2\pi\beta$. Формулы (26)–(28) для нахождения нового направления справедливы при $\omega_3 \neq \pm 1$. В противном случае используются формулы

$$\omega'_1 = \sqrt{1-\nu^2}\cos\phi, \quad \omega'_2 = \sqrt{1-\nu^2}\sin\phi, \quad \omega'_3 = \nu. \tag{30}$$

После нахождения нового направления движения возвращаемся назад к п. 3.

6. *Рассеяние фотона по Комптону.* При рассеянии фотона по закону Комптона происходит изменение не только направления, но и энергии фотона. Вероятность того, чтобы рассеянный фотон имел энергию от E до E', в зависимости от значения случайного числа α определяется из уравнения

$$\int\limits_{E}^{E'} \frac{d\sigma_{\mathrm{C}}}{dE} dE \left(\int\limits_{E}^{E_{min}} \frac{d\sigma_{\mathrm{C}}}{dE} dE \right)^{-1} = \alpha, \tag{31}$$

где $E_{\min} = E/(1+2E/E_0)$ — минимальная энергия, которую может приобрести фотон в результате рассеяния, $d\sigma_{\mathrm{C}}/dE$ — дифференциальное сечение комптоновского рассеяния в интервале энергий от E до $E + dE$, определяемое комбинацией сечения Кляйна — Нишины — Тамма и функции некогерентного рассеяния [2], позволяющей учитывать влияние связи электронов в атоме вещества на процесс рассеяния.

Решение уравнения (31) — достаточно трудоемкий процесс. Для ускорения в расчетах использовалась заранее подготовленная двумерная таблица, содержащая решения уравнения (31) с заданной точностью на равномерных сетках по E и α. В промежуточных точках применялась линейная интерполяция. Найденное значение энергии рассеянного фотона позволяет определить косинус угла рассеяния:

$$\nu = 1 + E_0/E - E_0/E', \tag{32}$$

где E_0 — энергия покоя электрона. Далее, разыгрывая азимутальный угол рассеяния равновероятно в диапазоне от 0 до 2π и применяя формулы (26)–(30), находим новое направление движения фотона. После этого возвращаемся к п. 3.

7. Регистрация фотона детектором. Если в результате трассировки фотон попал в детектор, запоминаем номер детектора и переходим к отслеживанию фотона в направлении $-\omega$. В случае, когда оба фотона, образовавшиеся в результате аннигиляции, попали соответственно в детекторы A и B и энергия рассеянного фотона находится в заданном диапазоне $[\alpha, \alpha + \Delta\alpha]$, зависящем от θ, оценка функции ξ_θ^{AB} увеличивается на величину интенсивности активного вещества в точке аннигиляции позитрона. Итоговая оценка величины ξ_θ^{AB} имеет вид

$$\xi_\theta^{AB} \approx M_\theta^{AB} = \frac{16}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(r_i)}{\Delta\alpha \delta^4 \pi^2}, \tag{33}$$

где N — общее число моделируемых частиц, а суммирование ведется по всем событиям парного попадания частиц в детекторы.

Данный алгоритм был реализован в виде компьютерной программы, которая использовалась в численных экспериментах. Для генерации случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне $[0, 1]$, использовался датчик, описанный в [13]. Для проверки формулы (23) были проведены численные эксперименты с фантомом, широко используемым в литературе [14] и позволяющим геометрическое моделирование с контролем границ объекта, вне которого рассеяние считается несущественным. Данный фантом (рис. 2) представляет собой цилиндр радиусом 8 см, заполненный водой.

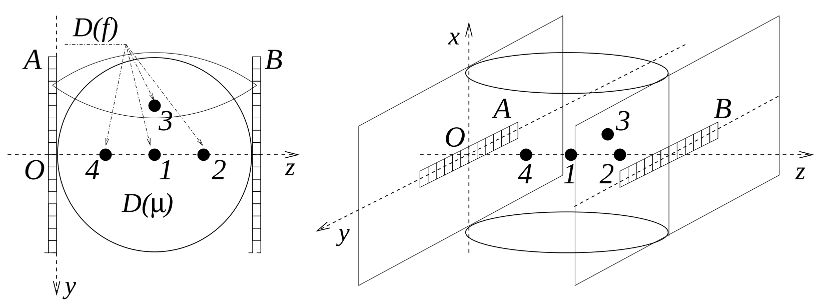


Рис. 2. Томографический фантом, сечение yOz (*а*), общий вид (*б*); проекции ξ_θ и M_θ вычисляются для 100 пар приемников (A, B) с координатами центров $x_i^A = x_i^B = 0$, $y_i^A = y_i^B = 8.0 - (i - 0.5)\delta$, $z_i^A = 0$, $z_i^B = 16$, $i = 1, \ldots, 100$, $\delta = 0.16$ см, $\mu = \mu' = 0.096$ см$^{-1}$

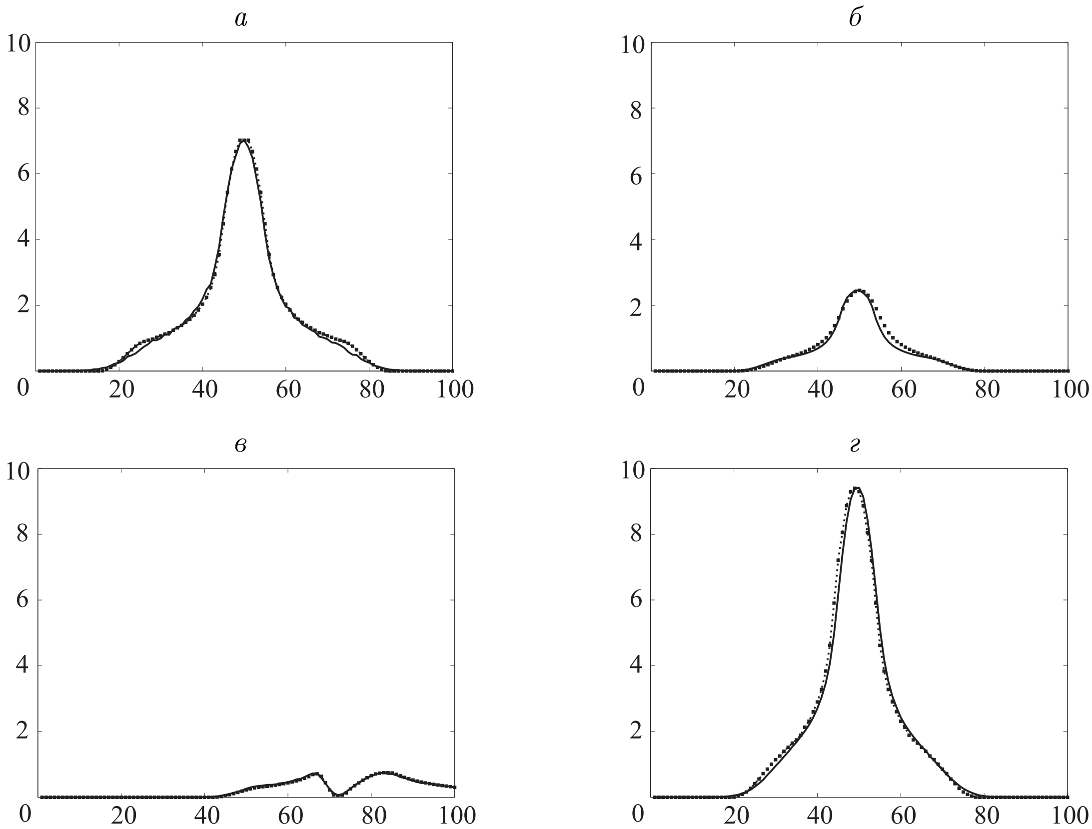


Рис. 3. Сравнительные результаты моделирования проекций комптоновского рассеяния на томографическом фантоме; пунктирные линии — проекции M_θ, рассчитанные методом Монте-Карло, сплошные — проекции ξ_θ; проекции от сферы № 1 (*а*), № 2 (*б*), № 3 (*в*), № 4 (*г*)

Внутрь цилиндра помещены четыре стационарно излучающих сферических источника диаметрами 1.8 см, заполненные фармпрепаратом с единичной активностью: № 1 в центре и № $2, 3, 4$, смещенные на 4 см от центра. Фотоны регистрируются линейками детекторов A и B, лежащими в плоскости yOz. Считается, что детекторы линейки A регистрируют первичные фотоны, линейки B — рассеянные. Каждая линейка состоит из 100 детекторов сечения $\delta = 0.16$ см.

Во всех расчетах при моделировании траектории движения фотона отслеживалось до 10 актов взаимодействия со средой. Данные о сечениях взаимодействия излучения с веществом брались из таблиц Хабла [15]. Моделировалось 10^{11} траекторий (время расчета на компьютере Pentium 3.2 GHz около 5 суток). При расчете профилей сигнала по формуле (23) коэффициент ослабления в воде принимался одинаковым для всех энергий $\mu = \mu' = 0.096$ см$^{-1}$. Проекции ξ_θ и M_θ масштабировались умножением на скаляр по принципу совмещения точек максимума и приводились к условным единицам в интервале $[0, 10]$.

Графики на рис. 3 демонстрируют поведение сравниваемых величин в случае, когда отслеживается рассеяние на угол $\theta = \pi/3$. Наблюдается хорошее соответствие между проекциями, полученными по формуле (23), и статистическим моделированием. Небольшое различие, обусловленное многократным рассеянием фотонов, наблюдается лишь по краям графиков. Аналогичная ситуация наблюдается и для кривых, соответствующих другим углам рассеяния.

Заключение

В качестве исходной в работе использовалась известная модель регистрации однократно рассеянных фотонов в позитронной эмиссионной томографии, представляющая собой интеграл по области событий рассеяния фотонов. Однако предметом восстановления в эмиссионной томографии являются не точки рассеяния фотонов, а области концентрации активности изотопов. Получено интегральное преобразование, позволяющее для точечных детекторов, обладающих идеальным спектральным разрешением, оценивать комптоновское рассеяние в виде интеграла от распределений коэффициента ослабления и активности радионуклида. Это дает возможность сформулировать прямую задачу в детерминистской постановке в виде оператора именно от тех величин, которые подлежат реконструкции. Для тестового томографического фантома и геометрии сбора данных в виде линеек приемников проведено сравнительное статистическое моделирование регистрации комптоновского рассеяния. Получено хорошее совпадение проекций, генерированных методом Монте-Карло и вычисленных по полученной формуле интегрального преобразования.

Список литературы

[1] Терещенко С.А. Методы вычислительной томографии. М.: Физматлит, 2004. 320 с.

[2] Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения. М.: Госатомиздат, 1963. 284 с.

[3] Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000. 224 с.

[4] Горшков В.А., Крёнинг М., Аносов Ю.В., Доржгочоо О. Томография на рассеянном излучении. М.: Технополиграфцентр, 2002. 146 с.

[5] Ollinger J.M. Model-based scatter correction for fully 3D PET // Physics in Medicine and Biology. 1996. Vol. 41. P. 153–176.

[6] Watson C.C., Newport D.A., Casey M.E. A single scatter simulation technique for scatter correction in 3D PET // Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine / Eds. P. Grangeat and J.L. Amans. Amsterdam, Netherlands: Kluwer Acad., 1996. P. 255–268.

[7] Kösters T. Derivation and Analysis of Scatter Correction Algorithms for Quantitaive Positron Emission Tomography. University of Münster, 2010. PhD Thesis.

[8] Watson C.C. New, faster, image-based scatter correction for 3D PET // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2000. Vol. 47. P. 1587–1594.

[9] Werling A., Bublitz O., Doll J. et al. Fast implementation of the single scatter simulation algorithm and its use in iterative image reconstruction of PET data // Physics in Medicine and Biology. 2002. Vol. 47. P. 2947–2960.

[10] Accorsi R., Adam L.E., Werner M.E, Karp J.S. Optimization of a fully 3D single scatter simulation algorithm for 3D PET // Ibid. 2004. Vol. 49. P. 2577–2598.

[11] Kazantsev I.G., Matej S., Lewitt R.M. Geometric model of single scatter in PET // IEEE Medical Imaging Conf. San Diego, 2006. P. M11–343.

[12] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.

[13] L'Ecuyer P.L., Cote S. Implementing a random number package with splitting facilities // ACM Trans. on Math. Software. 1991. Vol. 17. P. 98–111.

[14] Riauka T., Gortel W. Photon propagation and detection in single-photon emission computed tomography — an analytical approach // Medical Phys. 1994. Vol. 21. P. 1311–3121.

[15] Hubbell J.H., Seltzer S.M. Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients 1 Kev to 20 Mev for Elements $Z = 1$ to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest // Technical Report NISTIR 5632. National Inst. of Standards and Technology, USA, 1995.

Поступила в редакцию 1 июня 2011 г.,
с доработки — 12 июля 2011 г.