Вырождение однородной изотропной турбулентности в пределе больших чисел Рейнольдса*

В.Н. Гребенёв
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: vngrebenev@gmail.com

Для замкнутой модели уравнения Кармана — Ховарта в пределе больших чисел Рейнольдса доказано существование и единственность решения начально-краевой задачи. Установлена асимптотическая устойчивость автомодельного решения по времени, и исследовано поведение решения начально-краевой задачи в области больших масштабов корреляции. Показано, что при определенных условиях интеграл Лойцянского является законом сохранения данной модели.

Ключевые слова: изотропная однородная турбулентность, замкнутая модель уравнения Кармана — Ховарта, группа преобразований, автомодельное решение, начально-краевая задача, разрешимость, асимптотические свойства решения.

Введение

Однородный изотропный турбулентный поток является классическим объектом исследований при моделировании развитой турбулентности в аэродинамической трубе за решеткой с высокой степенью изотропии (см. [1, 2] и обзор литературы к этим работам). Отметим, что турбулентные течения характеризуются выравниванием процесса диффузии-возмущения и одной из основных задач в данном случае является определение законов затухания. В частности, это относится к вопросу об асимптотическом поведении при больших временах продольной двухточечной корреляционной функции флуктуации скорости $B_{LL}(r,t)$. Анализируя работы по динамике однородных изотропных турбулентных потоков, можно сделать вывод о неполноте математических исследований в этом направлении [2]. В настоящей работе изучается турбулентное движение с большими величинами скоростей пульсации, или с большими числами Рейнольдса, с использованием замкнутой модели уравнения Кармана — Ховарта, предложенной в [3, 4].

1. Уравнение Кармана — Ховарта

Уравнение Кармана — Ховарта для корреляционных функций поля скорости в однородной изотропной турбулентности имеет вид [5]

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right), \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Межрегиональные интеграционные проекты СО РАН (проект № 103).

где $B_{LL}(r,t) = \overline{u'^2} f(|\mathbf{r}_1|, t)$, $r = |\mathbf{r}_1|$, $\overline{u'^2} = B_{LL}(0,t)$ — интенсивность турбулентности. Для нормализованной корреляционной функции $f(|\mathbf{r}_1|, t)$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial \overline{u'^2(t)} f(|r_1|,t)}{\partial t} = \frac{1}{r_1^4}\frac{\partial}{\partial r_1} r_1^4 \left(\overline{u'^2(t)}^{3/2} h(|r_1|,t) + 2\nu \frac{\partial}{\partial r_1} \overline{u'^2(t)} f(|r_1|,t) \right) \qquad (2)$$

и представляет точное соотношение, связывающее нормализованную продольную корреляционную функцию $f(|\mathbf{r}_1|, t)$ флуктуаций скорости и двухточечный момент третьего порядка $h(|\mathbf{r}_1|, t)$. Система координат корреляционного пространства $\mathcal{K}^3 \equiv \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)\}$ выбрана следующим образом: вектор $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ совпадает с направлением оси $\mathbf{r}_1$; $\mathbf{x} \in R^3$ и $\mathbf{x}' \in R^3$ обозначают маркированные точки турбулентного потока в момент времени t. Уравнение (1) (или (2)) получается из уравнений Навье — Стокса после применения процедуры "осреднения" в предположении изотропии и однородности турбулентного течения (см., например, [5]). Появление градиента $\partial B_{LL,L}/\partial r$ $(\partial \overline{u'^2(t)}^{3/2} h(|r_1|, t)/\partial r)$, который представляет собой дополнительную неизвестную функцию в правой части уравнения, является следствием нелинейности уравнений Навье — Стокса. Эта функция не может быть определена только из уравнения (1) без использования каких-либо дополнительных гипотез. Вопросу замыкания данного уравнения посвящено большое число работ (см., например, обзоры 1, 2). В работах [3, 4] использовалось предположение, что

$$B_{LL,L} = 2\nu_T \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}, \qquad (3)$$

где коэффициент турбулентной вязкости ν_T предполагался пропорциональным произведению размера турбулентных вихрей на характерную скорость, т. е.

$$\nu_T = \kappa_2 r D_{LL}^{1/2}, \quad D_{LL} = 2[\overline{u'^2} - B_{LL}(r,t)], \quad \overline{u'^2} = B_{LL}(0,t), \quad \kappa_2 = \frac{\sqrt{2}}{5C^{3/2}}. \qquad (4)$$

Здесь D_{LL} — структурная функция второго порядка, C — универсальная постоянная, совпадающая с колмогоровской константой [5]. Отметим, что замыкающая гипотеза (4) по размерности величин не противоречит теории Колмогорова локальной изотропии турбулентных течений при больших турбулентных числах Рейнольдса (см. подробности в [3]). В работе [6] коэффициент турбулентной вязкости полагался равным (модель Миллионщикова)

$$\nu_T = \kappa_2 \overline{u'^2}^{1/2} r, \quad \overline{u'^2} = B_{LL}(0,t), \qquad (5)$$

что асимптотически совпадает с (4) на больших корреляционных расстояниях r, где $B_{LL} \approx 0$. Сравнение вычисленных по формулам (3), (4) и измеренных значений для тройной корреляции $B_{LL,L}$ показало хорошее совпадение данных в пределах допустимых значений [4].

1.1. Группы симметрий, допускаемые уравнением Кармана — Ховарта

Для уравнения Кармана — Ховарта укажем две группы растяжений, допускаемых "невязким" представлением (2) (в пределе больших чисел Рейнольдса):

$$\frac{\partial \overline{u'^2(t)} f(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r} r^4 \overline{u'^2(t)}^{3/2} h(r,t), \qquad (6)$$

где f и h — соответственно нормализованные двухточечные двойные и тройные корреляции турбулентного поля скоростей. Уравнение (6) допускает следующие группы растяжений (см. [7, 8]):

$$G^{a_1}\ :\ t^*=t,\quad r^*=e^{a_1}r,\quad \overline{u'^2}^*=e^{2a_1}\overline{u'^2},\quad f^*=f,\quad h^*=h, \tag{7}$$

$$G^{a_2}\ :\ t^*=e^{a_2}t,\quad r^*=r,\quad \overline{u'^2}^*=e^{-2a_2}\overline{u'^2},\quad f^*=f,\quad h^*=h, \tag{8}$$

и группу переноса

$$G^{a_3}\ :\ t^*=t+a_3,\quad r^*=r,\quad \overline{u'^2}^*=\overline{u'^2},\quad f^*=f,\quad h^*=h, \tag{9}$$

где (a_1,a_2,a_3) — групповые параметры. В инфинитезимальном виде группы G^{a_1} и G^{a_2} принимают вид

$$X_{a_1}=r\frac{\partial}{\partial r}+2\overline{u'^2}\frac{\partial}{\partial\overline{u'^2}},\quad X_{a_2}=t\frac{\partial}{\partial t}-2\overline{u'^2}\frac{\partial}{\partial\overline{u'^2}}. \tag{10}$$

Инфинитезимальные операторы X_{a_1} и X_{a_2} порождают двухпараметрическую группу точечных симметрий:

$$G^{a_1,a_2}\ :\ t^*=e^{a_2}t,\quad r^*=e^{a_1}r,\quad \overline{u'^2}^*=e^{2(a_1-a_2)}\overline{u'^2},\quad f^*=f,\quad h^*=h. \tag{11}$$

Отметим, что

$$\hat{K}=\frac{r\overline{u'^2}^{3/2}\partial f/\partial r}{t^{-3(\sigma+1)/(\sigma+3)}}$$

является дифференциальным инвариантом группы G^{a_1,a_2}. Таким образом, замыкающие соотношения (3), (4) не разрушают группу G^{a_1,a_2}. Последнее означает, что замыкание (3), (5) уравнения Кармана—Ховарта допускает интерпретацию в рамках групповой классификации незамкнутого уравнения (6). Другие инварианты группы G^{a_1,a_2} имеют вид

$$\xi=\frac{r}{t^{2/(\sigma+3)}},\quad \hat{f}=\frac{\overline{u'^2}f}{t^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}},\quad \hat{h}=\frac{\overline{u'^2}^{3/2}h}{t^{-3(\sigma+1)/(\sigma+3)}},\quad \text{где } \sigma=\frac{2a_2-3a_1}{a_1}. \tag{12}$$

1.2. Однопараметрическое семейство автомодельных решений

Двухпараметрическая группа G^{a_1,a_2} допускается "невязким" представлением замкнутой модели (3), (4) уравнения Кармана—Ховарта

$$\frac{\partial\overline{u'^2(t)}f(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4 2\kappa_2 r\sqrt{\overline{u'^2}(1-f)}\frac{\partial\overline{u'^2(t)}f(r,t)}{\partial r}\right], \tag{13}$$

и инварианты (12) группы G^{a_1,a_2} позволяют ввести новые автомодельные переменные ξ, $\hat{f}$: переменная r "масштабируется" с помощью интегрального масштаба $\ell_t\propto t^{2/(\sigma+3)}$, а интенсивность турбулентности $\overline{u'^2}$ ведет себя как $\overline{u'^2}\propto t^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}$. Отметим, что группа переносов G^{a_3} может быть использована в (13) для сдвига по времени.

Полученные инварианты позволяют уменьшить число переменных, и, как результат, уравнение (13) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (факторизация (13) по группе G^{a_1,a_2})

$$\frac{2\kappa_2}{\xi^4}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^5(1-\hat{f})^{1/2}\frac{d\hat{f}}{d\xi}\right]+\delta\xi\frac{d\hat{f}}{d\xi}+\gamma\hat{f}=0, \tag{14}$$

для которого ставятся краевые условия

$$\xi = 0 : \hat{f}(\xi) = 1, \quad \xi \to +\infty : \hat{f}(\xi) \to 0, \tag{15}$$

где

$$\delta = \frac{2}{\sigma + 3}, \quad \gamma = 2\frac{\sigma + 1}{\sigma + 3}. \tag{16}$$

Здесь σ является параметром. Таким образом, параметр σ порождает однопараметрическое семейство краевых задач (14), (15). Его физический смысл состоит в определении поведения продольной корреляционной функции на больших масштабах корреляции [9]. Разрешимость нелинейной задачи на собственные значения исследовалась в [10]. Для решения поставленной задачи применялся подход, разработанный в [11], который является обобщением некоторых методов теории возмущений. Решение задачи строится явно в виде (формального) ряда по специальному (полиномиального вида) базису разложения. Особенность данного метода в том, что он содержит управляющий параметр, позволяющий контролировать сходимость ряда. Кроме этого, коэффициенты ряда определяются рекуррентно и наличие еще одного параметра позволяет производить масштабирование коэффициентов для ускорения скорости сходимости. Тестирование метода проводилось сравнением полученного решения в рамках данного метода с известными точными решениями для $\sigma = 0$ и 4.

Формальный асимптотический анализ поведения $\hat{f}$ при $\xi \to \infty$ с учетом того, что $(1 - \hat{f})^{1/2} \to 1$ при $\xi \to +\infty$, приводит к следующей асимптотической форме уравнения (14):

$$\frac{2\kappa_2}{\xi^4}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^5 \frac{d\hat{f}}{d\xi}\right] + \delta\xi\frac{d\hat{f}}{d\xi} + \gamma\hat{f} = 0. \tag{17}$$

В новой "масштабированной" переменной $\hat{\xi} = (\delta/2\kappa_2)\xi$ уравнение (17) записывается в канонической форме

$$\frac{1}{\breve{\xi}^9}\frac{d}{d\breve{\xi}}\left[\breve{\xi}^9 \frac{d\breve{f}}{d\breve{\xi}}\right] + \frac{\breve{\xi}}{2}\frac{d\breve{f}}{d\breve{\xi}} + \frac{\gamma}{\delta}\breve{f} = 0, \quad \breve{f}(\breve{\xi}) = \hat{f}(\hat{\xi}),$$

или

$$\frac{1}{\breve{\xi}^9}\frac{d}{d\breve{\xi}}\left[\breve{\xi}^9 \frac{d\breve{f}}{d\breve{\xi}}\right] + \frac{\breve{\xi}}{2}\frac{d\breve{f}}{d\breve{\xi}} + (\sigma + 1)\breve{f} = 0, \quad \breve{\xi} = 2\hat{\xi}^{1/2}. \tag{18}$$

При $\sigma + 1 \in (0, 5)$ уравнение допускает везде убывающие положительные решения с алгебраической асимптотикой

$$\breve{f}(\breve{\xi}) = M\breve{\xi}^{-2(\sigma+1)} + \ldots, \quad M = \mathrm{const} > 0;$$

если $\sigma + 1 = 5$, то

$$\breve{f}(\breve{\xi}) = Me^{-\breve{\xi}^2/4};$$

для $\sigma + 1 > 5$ уравнение не имеет решений в классе положительных функций.

Рассмотрим снова задачу (14)–(16). В случае $\sigma = 4$ уравнение (14) интегрируется явно (см. [3, 4]). Показатель $\sigma = 4$ определяется из условия существования интеграла

Лойцянского [5]. Решение краевой задачи выписывается явно в виде обратной функции [3, 4]

$$\xi = 7\kappa_2 \left(\ln \left[\frac{1 + (1 - \hat{f})^{1/2}}{1 - (1 - \hat{f})^{1/2}} \right] - 2(1 - \hat{f})^{1/2} \right). \tag{19}$$

Справедливы следующие асимптотические представления для $\hat{f}$ (см. также [3]):

$$\hat{f}(\xi) \approx \exp\left(-\frac{\xi}{7\kappa_2}\right) \quad \text{для } \xi \gg 1, \quad \hat{f}(\xi) \approx 1 - \frac{3}{14\kappa_2}\xi^{2/3} \quad \text{для } \xi \ll 1. \tag{20}$$

Непосредственная проверка показывает, что интеграл Лойцянского

$$\Lambda = \overline{u'^2} \int\limits_0^\infty r^4 f(r,t)dr = \int\limits_0^\infty \xi^4 \hat{f}(\xi) d\xi$$

действительно сходится для данного автомодельного решения. Интенсивность турбулентности $\overline{u'^2}(t)$ и интегральный масштаб $\ell_t(t)$ ведут себя как

$$\overline{u'^2}(t) \propto (t+a)^{-10/7}, \quad \ell_t \propto (t+a)^{2/7}, \quad a \in R. \tag{21}$$

Приведем геометрическую интерпретацию полученного автомодельного решения (19). Для этого перепишем (19) в виде

$$\frac{1}{14\kappa_2}\xi = -(1 - \hat{f})^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + (1 - \hat{f})^{1/2}}{1 - (1 - \hat{f})^{1/2}} \right].$$

Вводя новые переменные

$$x = \xi / 14\kappa_2, \quad y = \hat{f}^{1/2},$$

получаем хорошо известное уравнение трактрисы [12]

$$x = x(y) = -(a^2 - y^2)^{1/2} + \frac{a}{2} \ln \left[\frac{a + (a^2 - y^2)^{1/2}}{a - (a^2 - y^2)^{1/2}} \right], \quad a = 1, \tag{22}$$

возникающее в дифференциальной геометрии. Кривая $x = x(y)$ является образующей поверхности вращения Бельтрами [12], представляющей собой каноническую поверхность с постоянной гауссовой кривизной, равной -1. Отражая данную поверхность относительно плоскости yOz декартовой системы координат, получаем псевдосферу единичного радиуса ($a = 1$), которая является гиперболическим многообразием постоянной отрицательной кривизны, равной -1. Данная поверхность имеет сингулярные точки, формирующие окружность потери гладкости многообразия. Параметрическое уравнение $x = x(y)$ (или графика функции $\hat{f}$) имеет вид

$$x = \ln \cot \frac{1}{\theta} - \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Вращая эту кривую относительно оси Ox (или график функции $\hat{f}$ вокруг оси $\mathbf{r}_1$ в корреляционном пространстве $\mathcal{K}^3$, что допустимо в силу инвариантности решения относительно вращения и отражения), получаем универсальное накрытие поверхности Бельтрами

$$x_\omega \equiv x, \quad y_\omega = \sin\theta\cos\omega, \quad z_\omega = \sin\theta\sin\omega, \quad -\infty < \omega < \infty, \tag{23}$$

где ω — угол вращения плоскости XY. Значению угла $\theta = \pi/2$ соответствуют сингулярные точки поверхности. Таким образом, автомодельное решение $\hat{f}$ реализуется в корреляционном пространстве $\mathcal{K}^3$ как поверхность вращения отрицательной гауссовой кривизны (или двухмерное гиперболическое многообразие).

В следующем разделе показано, что полученное семейство автомодельных решений (параметризованных параметром σ) являются предельным решением при $t \to \infty$ соответствующих решений начально-краевых задач для уравнения (13).

Замечание 1. С учетом доказанного результата о геометрии автомодельного решения при $\sigma = 4$ получаем, что притягивающее множество является поверхностью отрицательной кривизны для решений соответствующей начально-краевой задачи. Данный результат является интересным с той точки зрения, что изучаемое уравнение является точным следствием трехмерных уравнений Навье — Стокса — его статистического аналога для однородной изотропной турбулентности. Как отмечено В.И. Арнольдом (в качестве гипотезы), при малой вязкости возможен выход решений уравнений Навье — Стокса на предельные режимы с экспоненциально неустойчивыми траекториями. Существование предельного множества со структурой гиперболического многообразия ведет к такому поведению траекторий. Итак, полученный результат может быть рассмотрен как практически физический пример реализации указанной гипотезы.

2. Начально-краевая задача

Исследуем детально начально-краевую задачу для изучаемой замкнутой модели уравнения Кармана — Ховарта в пределе больших чисел Рейнольдса.

2.1. Постановка задачи

В соответствии с пространственно-временной структурой автомодельного решения (параметризованного параметром σ) уравнения (13) так называемая автомодельная обработка решения [13] уравнения (13) имеет вид

$$B_{LL}(r,t) \equiv \overline{u'^2(t)} f(r,t) = (t+a_3)^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)} f(\xi \cdot t^{2/(\sigma+3)}, t), \tag{24}$$

где $\overline{u'^2(t)} = (t+a_3)^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}$ и $\xi = r/(t+a_3)^{2/(\sigma+3)}$. Тогда (13) преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{2\kappa_2}{\xi^4}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^5\sqrt{1-f}\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\right] + \frac{2}{\sigma+4}\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + 2\frac{\sigma+1}{\sigma+3}f, \tag{25}$$

где $\tau = \ln t$. Введем новую переменную $q = 2\xi^{1/2}$. Тогда уравнение (25) запишется в виде

$$\frac{\partial f(q,\tau)}{\partial \tau} = \frac{2\kappa_2}{q^9}\frac{\partial}{\partial q}\left[q^9\sqrt{1-f}\frac{\partial f(q,\tau)}{\partial q}\right] + \frac{1}{\sigma+4}q\frac{\partial f}{\partial q} + 2\frac{\sigma+1}{\sigma+3}f. \tag{26}$$

Будем также использовать следующий вид (26) для новой функции $u = 1 - f$:

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{2\kappa_2}{q^9}\frac{\partial}{\partial q}\left[q^9 u^{1/2}\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial q}\right] + \frac{1}{\sigma+4}q\frac{\partial u}{\partial q} + 2\frac{\sigma+1}{\sigma+3}(u-1). \tag{27}$$

Полученное уравнение принадлежит классу уравнений нелинейной фильтрации.

Ввиду автомодельного представления $B_{LL}(0,t)$ изучается следующая начально-краевая задача для (26):

$$\begin{aligned} f(q,t_0) &= f_0(q) && \text{при } q \geq 0, && (28)\\ f(0,t) &= 1 && \text{при } q = 0, \quad t \geq 0, && (29)\\ f(q,t) &\to 0 && \text{при } q \to \infty, \quad t \geq 0. && (30) \end{aligned}$$

Физический смысл имеют положительные всюду в $[0,\infty)\times[0,\infty)$ функции f такие, что для $q>0$ $f<1$.

2.2. Существование и единственность решения

Сначала докажем существование и единственность слабого решения задачи (26), (28)–(30). Затем покажем, что в области $Q=(q>0, t>0)$ полученное слабое решение удовлетворяет уравнению (26) в классическом смысле. Чтобы ввести в рассмотрение слабое решение задачи, перепишем (26) следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{2\kappa_2}{q^9}\frac{\partial}{\partial q}\left[q^9 \frac{2}{3}\frac{\partial (1-f)^{3/2}}{\partial q}\right] + \frac{1}{\sigma+4}\frac{\partial (qf)}{\partial q} - \frac{(\sigma+3)+2(\sigma+1)(\sigma+4)}{(\sigma+3)(\sigma+4)} f. \tag{31}$$

Введем следующее определение.

Определение 1. *Функция $f(q,\tau)$, определенная в Q, называется слабым решением задачи (26), (28)–(30), если для любых $0<\tau_1$ функция f является неотрицательной и ограниченной сверху единицей, $f\in C([0,\tau_1], C[0,\infty))$ и удовлетворяется интегральное тождество*

$$\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{q_1}^{q_2}\left\{q^9 f\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + 2\kappa_2\frac{2}{3}(1-f)^{3/2}\frac{\partial}{\partial q}\left(q^9\frac{\partial\phi}{\partial q}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{q}{\sigma+1} f\frac{\partial(q^9\phi)}{\partial q} - \frac{(\sigma+3)+2(\sigma+1)(\sigma+4)}{(\sigma+3)(\sigma+4)} f q^9\phi\right\} dq d\tau = 0 \tag{32}$$

для всех неотрицательных пробных функций $\phi\in C^{2,1}([q_1,q_2]\times[0,\tau])$ с компактным носителем в $(q_1,q_2)\times(0,\tau_1)$ для $0<q_1<q_2<\infty$, $0<\tau_1<\infty$ и, кроме того, выполняются начально-краевые условия (28)–(30).

Меняя знак равенства в интегральном тождестве на $\leq$ ($\geq$), определим слабое верхнее (нижнее) решение задачи.

Итак, будем предполагать, что $f_0(q)$ — непрерывная положительная функция такая, что для всех $q>0$ $f_0(q)<1$.

Лемма 1. *При выполнении вышеприведенных условий на $f_0(q)$ слабое решение задачи (26), (28)–(30) существует.*

Перепишем (26) в переменных $y=2r^{1/2}$ и $U=\overline{u'^2(t)}-B_{LL}(y,t)$, где для $U(y,t)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{2\kappa_2}{y^9}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^9 U^{1/2}\frac{\partial U}{\partial y}\right] + \frac{\partial \overline{u'^2(t)}}{\partial t}, \tag{33}$$

в котором $\overline{u'^2(t)}$ совпадает с автомодельным представлением, указанным выше. Уравнение дополняется следующими начально-краевыми условиями:

$$U(y,t_0) = U_0(y), \qquad y \ge 0, \tag{34}$$

$$U(0,t) = 0, \qquad t \ge t_0, \tag{35}$$

$$U(y,t) \to \overline{u'^2(t)}, \qquad y \to \infty. \tag{36}$$

Предположим, что $U_0(y) \in C[0,\infty)$ и $U_0(y) \ge U^s(y,t_0)$, $U_0(y) \le \overline{u'^2(t_0)}$. Здесь $U^s(y,t) \equiv \overline{u'^2(t)} - B^s_{LL}(y,t)$, где $B^s_{LL}(y,t) = \overline{u'^2(t)}\hat{f}(\xi)$ — автомодельное решение задачи (14), (15). Аппроксимируем (33)–(36) семейством задач

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{2\kappa_2}{y^9}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^9 U_n^{1/2}\frac{\partial U_n}{\partial y}\right] + \frac{\partial \overline{u'^2(t)}}{\partial t} \tag{37}$$

в $Q_n = (n^{-1},\infty)\times(0,T)$, $T>0$, $n = 2,3,\ldots$, с начально-краевыми условиями

$$U_n(y,t_0) = U_0(y), \qquad y \ge n^{-1}, \tag{38}$$

$$U_n(n^{-1},t) = U_0(n^{-1}), \qquad t \ge t_0, \tag{39}$$

$$U_n(y,t) \to \overline{u'^2(t)}, \qquad y \to \infty. \tag{40}$$

В силу предположений $\overline{u'^2(t_0)} \ge U_0(y) \ge U^s(y,t_0)$, где U^s — положительная функция, и теоремы сравнения получаем, что U^s является нижним решением для $U_n(y,t)$ при каждом n, соответственно $U_n(y,t) \le \overline{u'^2(t)}$, где $\overline{u'^2(t)}$ — верхнее решение. Существование и единственность приближенных решений $U_n(y,t) \in C^{2,1}(Q_n)\cap C(\bar{Q}_n)$ есть следствие классических результатов [15], которые гарантируют, что $U_n(y,t) \in C^{2,1}(Q_n)\cap C(\bar{Q}_n)$. Действительно, на боковой границе (n^{-1},t), $t \ge t_0$, где $U_n(n^{-1},t) = U_0(n^{-1}) \ge U^s(n^{-1},t_0)$, имеем $U_n(n^{-1},t) \ge U^s(n^{-1},t)$, так как $U^s(n^{-1},t) \le U^s(n^{-1},t_0)$. Отсюда в силу принципа максимума на $U_n(y,t)$ получаем оценку снизу, что гарантирует невырожденность уравнения и, следовательно, принадлежность $U_n(y,t)$ вышеуказанному классу. Внутренние шаудеровские оценки [14] решения обеспечивают ограниченность производных $U_{nt}(y,t)$ и $U_{nyy}(y,t)$ внутри Q_n. Следовательно, существует такая подпоследовательность $n_k \to \infty$, что $U_{n_k} \to U$ равномерно на каждом компактном подмножестве из Q. Более того, в окрестности любой точки $(y,t)\in Q$, где $U(y,t)>0$ (т. е. где уравнение не вырождается), имеем равномерную сходимость производных $U_{n_k t} \to U_t$, $U_{n_k y} \to U_y$ и $U_{n_k yy} \to U_{yy}$. По непрерывности можем продолжить полученную функцию $U(y,t)$ вплоть до $y=0$ и $y\to\infty$. Действительно, принимая во внимание, что $\lim_{n\to\infty} U_n(n^{-1},t) = 0$, получаем $U(0,t) = 0$, а $U(y,t) \to \overline{u'^2(t)}$ при $y\to\infty$, так как $U^s(y,t) \le U_n(y,t) \le \overline{u'^2(t)}$ и $\lim_{y\to\infty} U^s(y,t) = \overline{u'^2(t)}$. Определим $U(y,t)$ при $t=t_0$, выбирая диагональную последовательность $\{U_{n_k}(y,t_s)\}$, $t_s \to t_0$, которая сходится к $U_0(y)$. Следовательно, $U(y,t) \in C([0,T],C(R^+))$ для $T<\infty$, что позволяет найти функцию $f(q,\tau) \in C([0,\tau_1],C(R^+))$ согласно формуле $f(q,\tau) = 1 - \overline{u'^2(t)}^{-1}U(y,t)$. Полученные оценки на $U(y,t)$ означают, что $0 \le f(q,\tau) \le 1$. Проверка того, что $f(q,\tau)$ удовлетворяет интегральному тождеству, является элементарной.

Лемма 2. *Слабое решение задачи (26), (28)–(30) единственно.*

Доказательство единственности основывается на технике, разработанной для уравнений нелинейной фильтрации. Записывая интегральные тождества для слабых решений U_1 и U_2 и затем произведя их вычитание, приходим к интегральному соотношению для разности $U_1 - U_2$, которое имеет тот же вид при рассмотрении радиально-симметричных решений многомерного уравнения нелинейной фильтрации. Дальнейшие детали опускаются.

Лемма 3. *В условиях леммы 1 слабое решение задачи (26), (28)–(30) является классическим решением уравнения (26).*

Для доказательства достаточно установить неравенство $f(q,\tau) < 1$ при $q > 0$ или показать, что $U(y,t) > 0$ при $y > 0$. Предположим, что существует точка (y_0, t_0) такая, что $U(y_0, t_0) = 0$. Из леммы 2 следует, что решение $U(y,t)$ строится как предел последовательности $U_n(y,t)$, где $U_n(y,t)$ — решения соответствующей задачи (37)–(40). Тогда для любого достаточно малого ϵ, выбирая n достаточно большим, заключаем, что $U_n(y_0, t_0) < \epsilon$. Нижнее решение U^s для U_n в любой внутренней точки Q является положительной функцией, что означает $U^s(y_0, t_0) \geq \delta > 0$ для некоторого δ. Так как $U_n(y,t) \geq U^s(y,t)$ для всех n и ϵ является произвольно малым, приходим к противоречию.

2.3. Асимптотические свойства решения

Прежде всего изучим поведение решения задачи (26), (28)–(30) при больших значениях времени. Отметим, что стационарные решения уравнения (26) удовлетворяют уравнению

$$\frac{2\kappa_2}{q^9}\frac{\partial}{\partial q}\left[q^9\sqrt{1-f}\frac{\partial f(q,\tau)}{\partial q}\right] + \frac{1}{\sigma+4}q\frac{\partial f}{\partial q} + 2\frac{\sigma+1}{\sigma+3}f = 0. \tag{41}$$

Слабое стационарное решение соответствующей задачи определяется так же, как в определении 1, в котором интегральное тождество заменяется на выражение

$$\int\limits_{q_1}^{q_2}\left\{2\kappa_2\frac{2}{3}(1-f)^{3/2}\frac{\partial}{\partial q}\left(q^9\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{q}{\sigma+1}f\frac{\partial(q^9\psi)}{\partial q} - \frac{(\sigma+3)+2(\sigma+1)(\sigma+4)}{(\sigma+3)(\sigma+4)}fq^9\psi\right\}dq = 0, \tag{42}$$

где $\psi \in C^2([q_1, q_2])$, с компактным носителем (q_1, q_2) для любых $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Отметим, что автомодельное решение $\breve{f}(q) = \hat{f}(\xi)$ является также слабым решением.

Лемма 4. *Полученное слабое решение f задачи (26), (28)–(30) сходится к стационарному решению (автомодельному решению $\hat{f}$) задачи при $t \to \infty$ в норме $L^1(q_1, q_2)$.*

Обозначим через $f(\tau) = f(\tau, \cdot)$ орбиту f. Орбита $f(\tau)$ является равномерно-ограниченной в $L^1(R^+) \cap L^\infty(R^+)$. Напомним, что уравнение (26) допускает группу переноса по τ. В силу этого интегральное тождество (2.2) перепишем в виде

$$\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{q_1}^{q_2}\left\{q^9 f(q,\tau+a_n)\frac{\partial\phi(q,\tau)}{\partial\tau} + 2\kappa_2\frac{2}{3}(1-f(q,\tau+a_n))^{3/2}\frac{\partial}{\partial q}\left(q^9\frac{\partial\phi(q,\tau)}{\partial q}\right) - \right.$$

$$-\frac{q}{\sigma+1}f(q,\tau+a_n)\frac{\partial(q^9\phi(q,\tau)}{\partial q} -$$

$$\left. -\frac{(\sigma+3)+2(\sigma+1)(\sigma+4)}{(\sigma+3)(\sigma+4)}f(q,\tau+a_n)q^9\phi(q,\tau)\right\}dqd\tau = 0, \tag{43}$$

где приняли $\phi(q,\tau) = \psi(q)\eta(\tau)$. Устремляя $a_n \to \infty$, получаем последовательность $f(\tau_n) = f(q, \tau + a_n)$, которая является относительно компактной в $L^1(R^+)$ и в $C_{loc}(R^+)$.

Последнее следует из соответствующих результатов [15], полученных для уравнения нелинейной фильтрации с учетом того, что в области Q справедливо неравенство

$$U_t \le \frac{2\kappa_2}{y^9}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^9 U^{1/2}\frac{\partial U}{\partial y}\right].$$

Следовательно, можно перейти к пределу и получить ω-предельное множество

$$\omega(f) = \{f^* \in L^1(R^+) \cap C_{loc}(R^+) \,:\, \exists \tau_{n_j} \to \infty \quad \text{такое, что} \quad f(\tau_{n_j}) \to f^*\}.$$

Далее, переходя к пределу в (43) при $a_{n_j} \to \infty$, убеждаемся, что справедливо равенство

$$\eta(\tau)\int\limits_{q_1}^{q_2}\left\{2\kappa_2\frac{2}{3}(1-f^*)^{3/2}\frac{\partial}{\partial q}\left(q^9\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{q}{\sigma+1}f^*\frac{\partial(q^9\psi)}{\partial q} - \frac{(\sigma+3)+2(\sigma+1)(\sigma+4)}{(\sigma+3)(\sigma+4)}f^*q^9\psi\right\}dq = 0. \tag{44}$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_{q_1}^{q_2}\{q^9 f(q,\tau+a_{n_j})\frac{\partial\phi(q,\tau)}{\partial\tau}\}dqd\tau \to 0 \quad \text{при } a_{n_j} \to \infty$$

ввиду равенства нулю $\eta(\tau)$ при $\tau = 0$, $\tau = \tau_1$ и теоремы о повторных интегралах. Таким образом, неотрицательная ограниченная функция $f^*(q)$ удовлетворяет уравнению (41) в слабом смысле. Более того, предельная функция $u^*(q) = 1 - f^*(q)$ является положительной для $q > 0$. Последнее означает, что функция $f^*(q)$ дифференцируема при $q > 0$. Эта функция стремится к нулю на бесконечности в силу неравенства $f(q,\tau) \le \breve{f}(q)$ и равна единице при $q = 0$. Тогда из леммы 2 следует, что f^* совпадает с $\breve{f}$.

Теперь изучим поведение полученного решения $f(q,\tau)$ при $q \to \infty$. Учитывая, что $\breve{f}(q)$ — верхний барьер для $f(q,\tau)$, т. е. $f(q,\tau) \le \breve{f}(q)$, и принимая во внимание асимптотики

$$\breve{f}(q) = M_1 q^{-2(\sigma+1)} + \ldots, \quad q \gg 1 \quad \text{для } \sigma+1 \in (0,5),$$
$$\breve{f}(q) = M_2 e^{-q^2/4} + \ldots, \quad q \gg 1, \quad \breve{f}(q) = \hat{f}(\xi) \quad \text{для } \sigma+1 = 5,$$

где константы зависят только от κ_2, получаем скорость сходимости $f(q,\tau)$ к нулю при $q \to \infty$. Напомним, что физический интервал вариаций значений σ определяется замкнутым отрезком $[2,4]$. Функция f в переменных (ξ,τ) убывает по крайней мере как $\xi^{-(\sigma+1)}$ для $\sigma < 4$ и $\exp(-\xi)$ при $\xi \to \infty$ для $\sigma = 4$. Таким образом, для $\sigma \in [2,4]$ можно гарантировать, что функция $B_{LL}(r,t) = \overline{u'^2(t)}f(r,t)$ при каждом фиксированном значении момента времени $t = t^*$ убывает быстрее чем r^{-2} на бесконечности, что совпадает с физическими требованиями о поведении продольной корреляционной функции на больших масштабах.

Пусть $\sigma = 4$. Тогда соответствующее данному значению автомодельное решение $B^s_{LL}(r,t) = \overline{u'^2(t)}\hat{f}(\xi)$ обеспечивает сходимость интеграла Лойцянского Λ. Этот интеграл не зависит от времени, т. е. инвариантен. Нормализованная корреляционная функция $\hat{f}(\xi)$ является верхним барьером для функции f, построенной в лемме 1. Следовательно, интеграл

$$\Lambda = \overline{u'^2(t)}\int\limits_0^{\infty} r^4 f(r,t)dr \tag{45}$$

для данной функции существует и может зависеть от времени t. Докажем, что Λ является инвариантом. Сначала покажем монотонность полученного решения.

Лемма 5. *Пусть $B_{LL}(r,t)$ — решение, построенное в лемме 1. Предположим, что $\partial B_{LL}(r,t_0)/\partial r < 0$. Тогда $B_{LL}(r,t)$ является монотонно убывающей функцией по переменной r.*

Нетрудно проверить, что U_n принимает минимальное значение на боковой границе (n^{-1},t) прямоугольника Q_n. Так как уравнение

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{2\kappa_2}{y^9}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^9 U_n^{1/2}\frac{\partial U_n}{\partial y}\right] + \frac{\partial \overline{u'^2(t)}}{\partial t}$$

допускает дифференцирование по y, то применение принципа максимума для $U_{ny}(y,t)$ завершает доказательство леммы.

Лемма 6. *Пусть* $\Lambda(0) = \int\limits_0^\infty r^4 B_{LL}(r,0)dr < \infty$. *Тогда* $\mathrm{d}\Lambda(t)/\mathrm{d}t = 0$ *для всех* $t \in [0,\infty)$.

Умножая уравнение

$$\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial t} = \frac{2\kappa_2}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4\left(r\sqrt{\overline{u'^2(t)} - B_{LL}(r,t)}\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r}\right)\right]$$

на r^4 и интегрируя его по r в Q, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^r s^4 B_{LL}(s,t)ds = s^5\sqrt{\overline{u'^2(t)} - B_{LL}(s,t)}\frac{\partial B_{LL}(s,t)}{\partial s}\bigg|_{s=r}.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что правая часть приведенной формулы сходится к нулю при $r \to \infty$. Далее воспользуемся соотношением

$$B_{LL}(r,t) = -\int\limits_r^\infty \frac{\partial B_{LL}(s,t)}{\partial s}ds,$$

которое определено в силу того, что $B_{LL}(r,t) \to 0$ при $r \to \infty$. Умножая это равенство на r^4, получим

$$r^4 B_{LL}(r,t) = -r^4\int\limits_r^\infty \frac{\partial B_{LL}(s,t)}{\partial s}ds \to 0 \quad \text{при } r \to \infty$$

равномерно по t. Поскольку $\partial B_{LL}(s,t)/\partial s \le 0$, получим оценку

$$-r^4\int\limits_r^{2r}\frac{\partial B_{LL}(s,t)}{\partial s}ds = -r^5\,\frac{\partial B_{LL}(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=s^*} < \epsilon$$

для произвольно малого ϵ, $r \gg 1$ и $s^* \in (r,2r)$. Кроме того имеем оценку

$$-(2r)^5\,\partial B_{LL}(r,t)/\partial r|_{r=s^*} < 2^5\epsilon.$$

Таким образом, принимая во внимание, что r произвольно большое, получаем сходимость

$$s^{*5}\,|\partial B_{LL}(s,t)/\partial s||_{s=s^*} \to 0$$

при $r \to \infty$ ($s^* \to \infty$) независимо от t. Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\infty r^4 B_{LL}(r,t)dr = 0.$$

Покажем, что поток $\Phi = U^{1/2}\partial U/\partial y$ является ограниченной функцией в $Q^T = [0,\infty) \times [0,T]$, $0 < T < \infty$.

2.4. Оценки на поток Φ

Пусть выполнены условия, сформулированные в леммах 1 и 6. Напомним, что поток $\Phi(y,t)$ определен в $Q^T \cap \{y > 0\}$ ввиду положительности $U(y,t)$. Слабое решение U задачи (33)–(36) допускает дифференцирование по y и t в Q. Следовательно, производная $\partial U/\partial y$ удовлетворяет уравнению, которое является невырожденным при $y > 0$. Ограниченность производной $\partial U/\partial y$ в каждой внутренней подобласти $Q^T_\delta = [\delta,\infty) \times [\delta,T]$, $\delta > 0$, есть следствие классических результатов [14]. Отметим, что оценка функции

$$\Phi(y,t) = \frac{3}{2}U^{1/2}\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{в } Q^T_\delta$$

зависит от расстояния до боковой границы $(0,t)$ множества Q^T и $\max \Phi(y,t_0)$, $y \in [0,\infty)$. Чтобы доказать ограниченность Φ вплоть до границы $(0,t)$, сначала установим, что поток определен в точках $(0,t)$. Затем оценим Φ на границе $(0,t)$. Прежде всего получим оценку на U вблизи границы $(0,t)$. Для этого вместо U рассмотрим функцию $V = 3U^{1/2}$, которая является аналогом “масштабированной” функции давления в теории уравнений нелинейной фильтрации. Обозначим через U^+ решение уравнения

$$\frac{\partial U^+}{\partial t} = \frac{2\kappa_2}{y^9}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^9 U^{+1/2}\frac{\partial U^+}{\partial y}\right]. \tag{46}$$

Тогда $U^+ \geq U$ (следовательно $V^+ \geq V$) в силу теоремы сравнения при соответствующих начально-краевых условиях для U^+. Функция V^+ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V^+}{\partial t} = \kappa_2 V^+\left(\frac{\partial^2 V^+}{\partial y^2} + \frac{9}{y}\right) + \left(\frac{\partial V^+}{\partial y}\right)^2, \tag{47}$$

которое в Q^T имеет следующее семейство автомодельных решений $\{g_c(y,t)\}$ [16]:

$$g_c(y,t) = y^2\varphi(c\eta)/(T-t), \quad \eta = (T-t)y^\alpha, \quad 0 < t < T.$$

Здесь c — произвольная положительная константа, функция $\varphi = \varphi(\eta)$ — решение нелинейного вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2}\varphi\varphi'' + \alpha^2(\varphi')^2 - \frac{\alpha}{2}(20-\alpha)\eta^{-1}\varphi\varphi' + 14\eta^{-2}\varphi^2 - \eta^{-2}\varphi + \eta^{-1}\varphi' = 0$$

с начальными условиями $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 1$, где α — положительный параметр такой, что $g_c(y,t)$ является возрастающей функцией. В работе [16] доказано, что существует α^* такое, что $\varphi(\eta) > 0$, $\eta > 0$ для $\alpha < \alpha^*$, где α^* удовлетворяет неравенству $7/5 < \alpha^* < 2$. Отсюда получаем $0 < 2 - \alpha^* < 3/5$. Таким образом, $g_c(0,t) = 0$ для $t \in [0,T]$ и

$g_c(y,T) = cy^{2-\alpha}$ ввиду граничных условий для $\varphi(\eta)$ при $\eta = 0$. Более того, $g_c(y,t_0) = c_{t_0} y^{2-\alpha}\{1+o(1)\}$ при $y \to 0$. Отметим, что автомодельное решение $U^s(y,t)$ при $\sigma = 4$, переписанное в терминах функции V^s, ведет себя как $Cy^{2/3}$ вблизи $y = 0$ (C — некоторая положительная константа). Принимая значения α по крайней мере в интервале $[7/5, \alpha^*)$, получаем, что существует c^* такое, что $g_{c^*}(y,t_0) \geq V^s(y,t_0)$ для $y \ll 1$. Так как V^s — ограниченная функция ($V^s \leq 3\sqrt{u'^2(t)}$), а $g_c(y,t_0) \to \infty$ при $y \to \infty$, то существует $c^{**} \geq c^*$ такое, что $g_{c^{**}}(y,t_0) \geq V^s(y,t_0)$ для $y \in [0,\infty)$. Выберем функцию $g_{c^{**}}(y,t)$ для оценки $V(y,t)$ вблизи $y = 0$. Для этого в дополнение условиям леммы 1 предполагаем, что $V(y,t_0) \leq g_{c^{**}}(y,t_0)$ для $y \in [0,\infty)$. Отметим, что в силу вышеприведенных рассуждений это неравенство является совместным с неравенством $V(y,t_0) \geq V^s(y,t_0)$. Установим оценку $V(y,t) \leq g_{c^{**}}(y,t)$ для $t \in (t_0,T]$ и $y \ll 1$. Применение теоремы сравнения дает требуемый результат.

Итак, получаем

$$V \leq c^{**} y^{2-\alpha} \leq c^{**} y^{3/5} \quad \text{и} \quad 0 \leq U \leq \frac{c^{**2}}{9} y^{6/5}. \tag{48}$$

Отсюда следует, что производная $\partial U/\partial y$ определена для $y = 0$ и $\partial U/\partial y \leq \text{const} \cdot y^{1/5}$ в окрестности $(0,t)$, а для потока Φ верна оценка

$$0 \leq \Phi(y,t) \leq \text{const} \cdot y^{4/5}$$

для $y \ll 1$ и $\Phi(0,t) = 0$.

Таким образом доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия лемм 1 и 6. Предположим, что в начальный момент времени* $\Phi(y,t_0) < \infty$ *для* $y \in [0,\infty)$ *и* $V(y,t_0) \leq g_{c^{**}}(y,t_0)$, $y \in [0,\infty)$, $\sigma = 4$. *Тогда* $0 \leq \Phi(y,t) \leq K < \infty$ *для* $(y,t) \in Q_T$, *где* K *зависит только от* $\max\limits_{y\geq 0} \Phi(y,t_0)$. *Кроме того,* $\Phi(y,t) \leq const \cdot y^{4/5}$ *для* $y \ll 1$ *и* $\Phi(0,t) = 0$.

Замечание 2. Физически допустимые значения σ принадлежат интервалу $[2,4]$. Обозначим через f_σ семейство решений начально-краевой задачи (26),(28)–(30) для $\sigma \in [2,4]$. Применяя теорему сравнения к решениям $f_{\sigma'}$ и $f_{\sigma''}$, получаем, что $f_{\sigma'}(y,t) \leq f_{\sigma''}(y,t)$, $\sigma' \leq \sigma''$ при соответствующих начально-краевых условиях, что позволяет получить оценку $U_\sigma(y,t)$ для $\sigma < 4$ вблизи границы (подобную (48)), используя результаты леммы 7.

Заключение

В работе дано обоснование замкнутой модели (параметризованной параметром σ) для уравнения Кармана—Ховарта в пределе больших чисел Рейнольдса. Показана корректность постановки изучаемой начально-краевой задачи. Дана геометрическая интерпретация автомодельного решения задачи в случае $\sigma = 4$, которое формирует в корреляционном пространстве векторов каноническую поверхность вращения отрицательной кривизны. Исследованы асимптотические свойства поведения решения задачи как для $t \to \infty$, так и при $r \to \infty$. Получены достаточные условия сходимости интеграла Лойцянского и его инвариантности.

Автор выражает благодарность проф. Г.Г. Черных за полезные дискуссии на предмет настоящей работы.

Список литературы

[1] Костомаха В.А. Экспериментальное моделирование изотропной турбулентности // Динамика сплошной среды. 1985. Т. 70. С. 92–104.

[2] Chernykh G.G., Korobitsina Z.L., Kostomakha V.A. Numerical simulation of isotropic turbulence dynamics // IJCFD. 1998. Vol. 10. P. 173–182.

[3] Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Об одном способе замыкания уравнения Кармана — Ховарта // Динамика сплошной среды. 1976. Т. 27. С. 124–130.

[4] Oberlack M., Peters N. Closure of the two-point correlation equation as a basis for Reynolds stress models // Appl. Sci. Res. 1993. Vol. 55. P. 533–538.

[5] Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.

[6] Миллионщиков М.Д. Изотропная турбулентность в поле турбулентной вязкости // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10. С. 406–411.

[7] Oberlack M. On the decay exponent of isotropic turbulence // PAMM. 2000. Vol. 1. P. 101–104.

[8] Grebenev V.N., Oberlack M. A geometric interpretation of the second-order structure function arising in turbulence // Math. Phys. Anal. Geom. 2009. Vol. 12, No. 1. P. 1–18.

[9] Rotta J.C. Turbulente Strömungen. Teubner, 1972.

[10] Liu Z., Oberlack M., Grebenev V.N., Liao S. Explicit series solution of a closure model for the von Karman — Howarth equation by means of the homotopy analysis method // ANZIAM J. 2010. Vol. 52. P. 179–202.

[11] Liao S. Beyond of Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method. Boce Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2002.

[12] Michenko A.S., Fomenko A.T. Lectures on Differential Geometry and Topology. Moscow: Factorial Press, 2000.

[13] Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.D. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equation. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1995.

[14] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1968.

[15] Vazquez J.L. Porous Medium Equation. Oxford: Oxford Sci. Publ., 2007.

[16] Aronson D.G., Graveleau J.A. Self-similar solution to the focusing problem for the porous medium equation // Europ. J. Appl. Math. 1993. Vol. 4, No. 1. P. 65–81.

Поступила в редакцию 9 февраля 2011 г.,
с доработки — 1 марта 2011 г.