О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида*

Е. В. Чистякова, В. Ф. Чистяков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: elena.chistyakova@icc.ru, chist@icc.ru

Рассматриваются вырожденные системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка общего вида. Доказаны локальная и глобальная теоремы существования и предложен численный метод решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, вырожденные задачи, нелокальная разрешимость, разностный метод первого порядка.

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим векторное уравнение

$$A(t, x, V_0 x, \nu)\dot{x} + B(t, x, V x, \nu) = 0, \quad t \in [0, 1] = T, \tag{1}$$

с начальными данными

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t, v, y, \nu)$ — $(n \times n)$-матрица, $B(t, v, y, \nu)$ — n-мерная вектор-функция, определенные в области $\mathbf{W} = T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathcal{N}$, ν — числовой параметр из отрезка $\mathcal{N} = [-\nu_0, \nu_0] \subset \mathbf{R}^1$, $x \equiv x(t, \nu)$ — искомая вектор-функция, $V_0 x = \int\limits_0^t K_0(t, s, x(s))ds$, $Vx = \int\limits_0^t K(t, s, x(s))ds$ — операторы Вольтерра, $K_0(t, s, v)$, $K(t, s, v)$ — m-мерные вектор-функции, определенные в области $\mathbf{V} = T \times T \times \mathbf{R}^n$, x_0 — заданный вектор из $\mathbf{R}^n$.

Предполагается, что характер вырождения задается соотношением

$$\det A(t, v, y, \nu) \equiv 0 \ \forall \ (t, v, y, \nu) \in \mathbf{W}. \tag{3}$$

В частности, в виде системы (1) можно записать систему дифференциальных и алгебраических уравнений и интегральных уравнений Вольтерра (первого и второго рода), связанных по части переменных.

Под решением системы (1) на отрезке $T_\varepsilon = [0, \ \varepsilon] \subseteq T$ при значении параметра $\nu = \nu_*$ будем понимать любую вектор-функцию $x(t, \nu_*) \in \mathbf{C}^1(T_\varepsilon)$, которая обращает исходное уравнение в тождество на T_ε.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного проекта СО РАН № 107 и РФФИ (гранты № 09-08-00201 и 10-01-00571).

Интерес к уравнениям, описываемым в общем случае формулой (1), стимулируется проблемами математического моделирования в таких прикладных областях как теория электронных схем и электрических цепей, механика и химическая кинетика, гидродинамика и теплотехника [1 – 3]. Самым распространенным частным случаем этих уравнений являются дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ): системы $A(t,x)\dot{x} + B(t,x) = 0$, удовлетворяющие условию (3). Для данного случая построена достаточно обширная качественная теория и разработан целый класс численных методов (см., например, [4 – 9]).

Если исследуемый процесс обладает последействием, то наряду с ДАУ модель процесса может содержать интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. Ряд специальных случаев рассматривался в [10 – 15]. В работах [14, 15] существование решения постулируется и конструируются численные методы решения. Таким образом, вопрос о критериях разрешимости вырожденных задач вида (1), (2) достаточно актуален.

Основной задачей настоящей работы является получение достаточных условий сходимости численного метода для задачи (1), (2).

2. Вспомогательные результаты

Приведем ряд необходимых для дальнейших рассуждений сведений.

В работе используются нормы n-мерного вектора $v = (v_1\, v_2 \ldots v_n)^\top$ и $(\mu\times n)$-матрицы $V = (v_{ij},\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,\mu)$, вычисляемые по правилам

$$\|v\| = \max\{|v_i|,\ i = 1,2,\ldots,n\}, \quad \|V\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |v_{ij}|,\ i = 1,2,\ldots,\mu\right\}.$$

Под символами $\|v(w)\|$ и $\|V(w)\|$ понимаются нормы вектор-функции $v(w)$ и матрицы $V(w)$, вычисленные в точке $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$. Включения $v(w),\ V(w) \in \mathbf{C}^l(D)$ означают, что все частные производные элементов вектор-функции $v(w)$ или матрицы $V(w)$ имеют непрерывные частные производные порядка до l включительно по всем компонентам вектора w в любой точке области D. Непрерывности соответствуют включения $v(w),\ V(w) \in \mathbf{C}(D)$. Если $v(w),\ V(w) \in \mathbf{C}(D)$, то их нормы также непрерывны в D.

Лемма 1 (см., например, [16]). *Пусть для неотрицательных чисел $u_i,\ i = 2,3,\ldots$, выполнено неравенство*

$$u_i \le c + m\sum_{j=1}^{i-1} u_j, \quad u_1 \le c,$$

где $c,\ m$ — неотрицательные постоянные. Тогда справедлива оценка (разностный аналог леммы Гронуолла – Беллмана)

$$u_i \le c(1+m)^{i-1}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Рассмотрим задачу (1), (2) в нормальной форме $A(t,v,y,\nu) = E_n$ при некотором фиксированном значении параметра $\nu = \nu_*$

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t),Vx), \quad t \in T, \tag{4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $F(t, v, y) = -B(t, v, y, \nu_*)$, и докажем следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть для задачи (4), (5) выполнены условия гладкости*

$$F(t, v, y) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{W}), \quad \mathcal{W} = T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \quad K(t, s, v) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{V}). \tag{6}$$

Тогда существует отрезок $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, *на котором определено единственное решение задачи (4), (5).*

Доказательство основано на выделении некоторой окрестности (шара) с центром в точке $(0,\ x_0,\ 0)$ в области $\mathcal{W}$, переходе от задачи (4), (5) к системе интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s), Vx)ds$$

и применении к последней метода последовательных приближений (Пикара) с буквальным повторением рассуждений из [17, с. 139] с учетом многомерности.

Лемма 3. *Пусть для начальной задачи (4), (5) выполнено условие гладкости (6) и, кроме того,*

1) $\|F(t, v, y)\| \le \kappa_0 + \kappa_1\|v\| + \kappa_2\|y\|\ \forall (t, v, y) \in \mathcal{W}$,

2) $\|K(t, s, v)\| \le \eta_0 + \eta_1\|v\|\ \forall (t, s, v) \in \mathbf{V}$,

где $\kappa_i, \eta_j,\ i = 0, 1, 2,\ j = 0, 1,$ *— некоторые положительные постоянные.*

Тогда начальная задача (1), (2) имеет единственное решение из класса $\mathbf{C}^1(T)$.

Доказательство. Мы не предполагаем выполнения глобального условия Липшица для вектор-функций $F(t, v, y)$ и $K(t, s, v)$ и не можем воспользоваться методом последовательных приближений, как это делается, например, в работе [18, с. 393]. Введем сетку $\{t_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N\} \subset T,\ h = 1/N$.

Заменим в (4) производные конечными разностями $\dot{x}(t_i) \approx (x_{i+1} - x_i)/h$, а интегралы конечными суммами по формуле левых прямоугольников

$$x_{i+1} - x_i = hF\left(t_i, x_i, h\sum_{j=0}^{i} K(t_i, t_j, x_j)\right). \tag{7}$$

Сложив правые и левые части равенств (7), получим

$$x_{i+1} = x_0 + h\sum_{k=0}^{i} F\left(t_k, x_k, h\sum_{j=0}^{k} K(t_k, t_j, x_j)\right). \tag{8}$$

Учитывая условия 1 и 2 леммы, перейдем к нормам

$$\|x_{i+1}\| \le L_1 + hL_2\sum_{k=0}^{i}\|x_k\|,$$

где $L_1 = \|x_0\| + \kappa_0 + \kappa_2\eta_0,\ L_2 = \kappa_1 + \kappa_2\eta_1$. Отсюда по лемме 1

$$\|x_{i+1}\| \le L_1(1 + hL_2)^i \le L_1(1 + L_2/N)^N \le L_1 e^{L_2}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\|x_{i+1}\| + \|x_0\| \leq L_1 e^{L_2} + \|x_0\|,$$

$$\|x_{i+1} - x_0\| \leq \|x_{i+1}\| + \|x_0\| \leq L_1 e^{L_2} + \|x_0\| \leq 2L_1 e^{L_2}. \tag{9}$$

Таким образом, согласно неравенству (9) все значения x_{i+1} лежат в шаре радиуса $2L_1 e^{L_2}$ с центром в точке x_0. Соединим точки (t_i, x_i) отрезками. Получим семейство ломаных функций $\{\phi(t)\}$, которые целиком содержатся в цилиндре

$$\mathcal{C} = T \times \{z : \|z - x_0\| \leq 2L_1 e^{L_2}\}, \quad z \in \mathbf{R}^n,$$

в силу того что цилиндр является выпуклым множеством. По определению семейство функций $\{\phi(t)\}$ равномерно ограничено. Покажем, что оно равностепенно непрерывно.

В силу своей гладкости $F(t, x, y)$ также непрерывна, а значит, достигает на T своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. найдется такая постоянная $M > 0$, что $\|F(t, v, y)\| \leq M \ \forall t \in T, \forall v \in \mathbf{R}^n, \ y \in \mathbf{R}^m$. Следовательно, задав для аргумента t приращение Δt, для любой функции из семейства $\{\phi(t)\}$ можно записать

$$\|\phi(t + \Delta t) - \phi(t)\| \leq \Delta t M = \varepsilon.$$

Тогда, каким бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно принять $\Delta t = \varepsilon / M$ так, что $\|\phi(t + \Delta t) - \phi(t)\| \leq \varepsilon$. Таким образом, семейство функций $\{\phi(t)\}$ равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцеля [19] из этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся на T бесконечную подпоследовательность функций. Пусть это будут функции

$$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \ldots, \phi^{(l)}, \ldots \tag{10}$$

Предельную функцию обозначим через $\tilde{\phi}(t), \ t \in T$. Покажем, что она является решением начальной задачи (4), (5).

Согласно (8) подпоследовательности ломаных (10) соответствуют равенства

$$x_{i+1}^{\phi} = x_0 + h_l \sum_{k=0}^{i} F\left(t_k, x_k^{\phi}, h_l \sum_{j=0}^{k} K(t_k, t_j, x_j^{\phi})\right). \tag{11}$$

Перейдем в (11) к пределу при $l \to \infty$ $(h_l \to 0)$. Получим

$$\tilde{\phi}(t_{i+1}) = x_0 + \lim_{l \to \infty} h_l \sum_{k=0}^{i} F\left(t_k, \tilde{\phi}(t_k), h_l \sum_{j=0}^{k} K(t_k, t_j, \tilde{\phi}(t_j))\right).$$

В силу непрерывности вектор-функций $\tilde{\phi}(t)$, $F(t, v, y)$ и $K(t, s, v)$ их суперпозиции также непрерывны. Для произвольного t согласно определению интеграла Римана можно записать

$$\tilde{\phi}(t) = x_0 + \int_0^t F\left(t, \tilde{\phi}(s), \int_0^s K(s, \xi, \tilde{\phi}(\xi) d\xi\right) ds.$$

Сравним правую и левую части данного равенства. В правой части $\tilde{\phi}(t)$ стоит под знаком интеграла, следовательно, $\tilde{\phi}(t) \in \mathbf{C}^1(T)$. Таким образом, $\tilde{\phi}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению, эквивалентному начальной задаче (4), (5).

Докажем единственность решения $\tilde{\phi}(t)$. Пусть через точку $(t_0, \tilde{\phi}(t_0))$, $t_0 \in T$, проходит еще одно решение задачи (4), (5), являющееся решением начальной задачи

$$\dot{y}(t) = F\left(t, y(t), \psi(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s,y(s))ds\right),\ y(t_0) = \tilde{\phi}(t_0), \tag{12}$$

где $\psi(t) = \int\limits_{0}^{t_0} K(t,s,\tilde{\phi}(s))ds$. Начальная задача (12) согласно лемме 2 имеет единственное решение на отрезке $[t_0,\ t_0+\varepsilon]$. Получено противоречие. Лемма доказана.

Замечание 1. *Доказательство леммы не меняется, если под символом Vx понимать набор операторов Вольтерра $Vx = (V_1x,\ V_2x,\ \ldots, V_\sigma x)$ с линейным условием роста ядер.*

Определение 1 (см., например, [4]). *Матрица, обозначаемая в дальнейшем как S^-, называется полуобратной к матрице S, если она удовлетворяет уравнению $SS^-S = S$.*

Лемма 4 [4]. *Полуобратная матрица определена для произвольной матрицы S. Если выполнено условие Кронекера — Капелли $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S|u)$, то система уравнений $Sy = u$ разрешима и все ее решения описываются формулой*

$$y = S^-u + [E - S^-S]C,$$

где E — единичная матрица подходящей размерности, C — произвольный вектор.

Определение 2. *Пучок квадратных матриц $\lambda A(w) + B(w)$, $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$, где λ — скалярный параметр (в общем случае комплексный), удовлетворяет критерию "ранг-степень" в области D, если выполнены условия:*

1) $\max \operatorname{rank} A(w) = r$, $w \in D$,

2) $\det[\lambda A(w) + B(w)] = \lambda^r a_0(w) + \ldots$, *где* $a_0(w) \neq 0\ \forall w \in D$.

Лемма 5. *Пусть пучок постоянных матриц $\mathbf{A}(\lambda) = \lambda\overline{A} + \overline{B}$ регулярен $\det A(\lambda) \not\equiv 0$. Тогда справедливо неравенство $\operatorname{rank}\overline{A} \geq \deg\det\ \mathbf{A}(\lambda)$, где $\deg$ — символ степени многочлена.*

Доказательство. Если пучок матриц $\mathbf{A}(\lambda)$ регулярен, то существуют постоянные неособенные матрицы P, Q со свойством

$$P\mathbf{A}(\lambda)Q = \lambda\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \overline{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{J} & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix},$$

где $\overline{N}^k = 0$, $\overline{J}$ — некоторый блок размерности $(d \times d)$ [21, с. 354]. Отсюда

$$\deg\det\mathbf{A}(\lambda) = \deg\left[\det(\lambda E_d + \overline{J})\det(\lambda\overline{N} + E_{n-d})\right] = \deg\ \det(\lambda E_d + \overline{J}) \cdot 1 = d.$$

Следовательно, $d \leq \operatorname{rank}\overline{A}$, $d = \operatorname{rank}\overline{A}$ тогда и только тогда, когда $\overline{N} = 0$.

Следствие 1. *Для пучка матриц $\lambda A(w) + B(w)$, $w \in D$, удовлетворяющего критерию "ранг-степень", справедливо равенство $\operatorname{rank} A(w) = \mathrm{const} = r\ \forall\ w \in D$.*

Лемма 6 [20]. *Матричный пучок* $\mathcal{P}(\lambda;t) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(w) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(w) \\ B_2(w) \end{pmatrix}$, $w \in D$, *где блок* $A_1(w)$ *имеет полный ранг для любого* $w \in D$, *удовлетворяет критерию "ранг-степень" тогда и только тогда, когда*

$$\det\mathcal{P}(\lambda;w) = \lambda^r a_0(w) + ..., \ a_0(t) = \det \begin{pmatrix} A_1(w) \\ B_2(w) \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall \ w \in D.$$

3. Теоремы о разрешимости вырожденных систем

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (3), обладают сложной внутренней структурой. Мерой сложности является целочисленная характеристика, называемая индексом — минимально возможным порядком интегро-дифференциального оператора, действуя которым на (1) получаем систему с невырожденной в окрестности начальной точки матрицей при производной искомой вектор-функции.

Теорема 1. *Пусть для задачи (1), (2) при* $A(t,v,y,\nu) \equiv A(t)$, $\nu = 0$, *выполнены условия:*

1) $A(t) \in \mathbf{C}^2(T)$, $B(t,v,y,\nu) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{W})$, $K(t,s,v) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{V})$,

2) $\operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank}\left[A(0)|\ \tilde{b}\right]$, $\tilde{b} = -B(\zeta)$, $\zeta = (0, x_0, 0, 0)$,

3) $\|\partial B(t,v,y,\nu)/\partial v\| \leq L$, $\|\partial B(t,v,y,\nu)/\partial y\| \leq L \quad \forall (t,v,y,\nu) \in \mathbf{W}$,

4) $\|B(t,v,y,\nu)/\| \leq \kappa_0 + \kappa_1\|v\| + \kappa_2\|y\| \ \forall (t,v,y,\nu) \in \mathbf{W}$,

5) $\|K(t,s,v)\| + \|\partial K(t,s,v)/\partial t\| \leq \eta_0 + \eta_1\|v\| \ \forall (t,s,v) \in \mathbf{V}$, *где* L, κ_i, η_j, $i = 0,1,2$, $j = 0,1$ *— некоторые положительные постоянные,*

6) старший коэффициент многочлена

$$\det\left[\lambda A(t) + \frac{\partial}{\partial v} B(t,v,y,\nu)\right] = a_0(t,v,y,\nu)\lambda^r + \ldots,$$

где $r = \max\{\operatorname{rank} A(t),\ t \in T\}$, *удовлетворяет условию*

$$|a_0(t,v,y,\nu)| \geq c_0 \geq 0 \ \forall (t,v,y,\nu) \in \mathbf{W}.$$

Тогда

1) индекс системы равен 1,

2) начальная задача (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t,0)$ *из класса* $\mathbf{C}^1(T)$.

Доказательство. Согласно лемме 5 и условию 6 теоремы $\operatorname{rank} A(t) = \mathrm{const} = r \ \forall \ t \ \in \ T$. Тогда существует матрица $P(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ со свойствами

$$\det P(t) \neq 0 \ \forall t \in T, \quad P(t)A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где блок $A_1(t)$ имеет размерность $(r \times n)$ [20]. Формально подействуем на систему (1) оператором вида

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = P(t).$$

Получим новую систему

$$\mathcal{A}(\chi)\dot{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1(\chi) \\ \tilde{B}_2(t, x, Vx, V_1x, \nu) \end{pmatrix} = 0, \tag{13}$$

где $\chi = (t, x, Vx, 0)$,

$$\mathcal{A}(t, v, y, \nu) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ \dfrac{\partial B_2(t, v, y, \nu)}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad V_1x = \int\limits_0^t \frac{\partial K(t, s, x(s))}{\partial t} ds, \tag{14}$$

$$P_1(t)B(t, v, y, \nu) = B_1(t, v, y, \nu), \quad P_2(t)B(t, v, y, \nu) = B_2(t, v, y, \nu),$$

$$\tilde{B}_2(t, x, Vx, V_1x, \nu) = \frac{\partial B_2(\chi)}{\partial t} + \frac{\partial B_2(\chi)}{\partial y}\left[K(t, t, x) + V_1x\right]. \tag{15}$$

Покажем, что матрица, стоящая перед производной искомой вектор-функции в (13), обратима и

$$\|\mathcal{A}^{-1}(t, v, y, \nu)\| \le L_1, \quad \forall\ (t, v, y, \nu) \in \mathbf{W}, \quad L_1 = \mathrm{const}.$$

Согласно лемме 6 и условию 6

$$|\det \mathcal{A}(t, v, y, \nu)| = |\det P(t)a_0(t, v, y, \nu)| \ge c_0|\det P(t)|$$

и все элементы матрицы $\mathcal{A}(t, v, y, \nu)$ ограниченны на $\mathbf{W}$ (см. условие 3 теоремы). Из условий 3–6 следует, что правая часть системы по своим аргументам растет не быстрее, чем линейно.

Приведенная к нормальной форме система (13) удовлетворяет условиям леммы 3, и задача (13), (2) имеет единственное решение $x^*(t, 0) \in \mathbf{C}^1(T)$. Покажем, что оно удовлетворяет исходной задаче (1), (2). Подставим эту вектор-функцию в исходную задачу. Условие 2 теоремы удовлетворяется автоматически. Предположим, что

$$A(t)\dot{x}^* + B(t, x^*, Vx^*, 0) = \mu(t), \quad t \in T,$$

где $\mu(t) \ne 0$. В силу условия 2 вектор-функция $x^*(t, 0)$ удовлетворяет уравнению (1) в точке $t = 0$. Следовательно, $\mu(0) = 0$. Согласно формуле (13)

$$\Omega_0\mu = \left[\begin{pmatrix} P_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2(t) \end{pmatrix}\right]\mu = 0, \quad t \in T,$$

где $\det P(\chi) \ne 0\ \forall t \in T$. Произведем замену $\mu = P^{-1}(t)h(t)$. Получим на T систему вида

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \dot{h} = 0, \quad h(0) = 0. \tag{16}$$

Теорема доказана. □

Для общего случая доказана только локальная теорема существования.

Теорема 2. *Пусть для задачи (1), (2) при $\nu = 0$ выполнены условия:*
1) $A(t, v, y, \nu) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{W})$, $B(t, v, y, \nu) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{W})$, $K(t, s, v)$, $K_0(t, s, v) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{V})$,
2) $\mathrm{rank}\, A(t, v, y, \nu) = r = \mathrm{const}$ *в окрестности точки* $\zeta = (0, x_0, 0, 0)$,
3) $\mathrm{rank}\, A(\zeta) = \mathrm{rank}\left[A(\zeta)|\ \tilde{b}\right]$, $\tilde{b} = -B(\zeta)$,

4) $\operatorname{rank} A(\zeta) = \deg\det[\lambda A(\zeta) + \mathcal{B}(\zeta)]$, *где*

$$\mathcal{B}(\zeta) = \frac{\partial}{\partial v}\Big[B(t,v,y,\nu) + A(t,v,y,\nu)c\Big]\Big|_{(t,v,y,\nu)=\zeta}, \tag{17}$$

здесь c *— одно из решений системы* $A(\zeta)c = -B(\zeta)$.

Тогда

1) индекс системы равен 1,

2) существует отрезок $[0,\varepsilon] \subseteq T$, *на котором определено единственное решение* $x^*(t,0)$ *задачи (1), (2).*

Доказательство. В силу условий 1, 2 теоремы в окрестности $\mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}$ точки ζ найдется неособенная матрица $P(t,v,y,\nu) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{W}_0)$ такая, что

$$P(t,v,y,\nu)A(t,v,y,\nu) = \begin{pmatrix} A_1(t,v,y,\nu) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Формально подействуем на систему (1) оператором вида

$$\tilde{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} P_1(\chi) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2(\chi) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} P_1(t,v,y,\nu) \\ P_2(t,v,y,\nu) \end{pmatrix} = P(t,v,y,\nu),$$

здесь $\chi = (t,x,Vx,0)$. Получим новую систему

$$\mathcal{A}(\chi)\dot{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1(\chi) \\ \tilde{B}_2(t,x,Vx,V_1x,\nu) \end{pmatrix} = 0, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{A}(t,v,y,\nu) = \begin{pmatrix} A_1(t,v,y,\nu) \\ \dfrac{\partial B_2(t,v,y,\nu)}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$P_1(t,v,y,\nu)B(t,v,y,\nu) = B_1(t,v,y,\nu), \quad P_2(t,v,y,\nu)B(t,v,y,\nu) = B_2(t,v,y,\nu).$$

(Обозначения для символов V_1, $\tilde{B}_2(t,x,Vx,V_1x,\nu)$ смотри в формулах (14), (15).) Покажем, что матрица, стоящая перед производной искомой вектор-функции в (18), невырожденна в начальной точке ζ. Учитывая, что $P_2B = B_2$, имеем

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial v}B + P_2\dfrac{\partial B}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что

$$\mathcal{A}(\zeta) = \mathcal{R}(\zeta),\ \mathcal{R} = \begin{pmatrix} A_1 \\ P_2\dfrac{\partial B}{\partial v} + P_2\dfrac{\partial}{\partial v}(A\dot{x}) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Для упрощения записи указание зависимости от t,v,y,ν здесь и ниже опущено. Рассмотрим равенство

$$P(\lambda A + \mathcal{B}) = \lambda\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ P_2\dfrac{\partial B}{\partial v} + P_2\dfrac{\partial}{\partial v}(A\dot{x}) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Для выполнения (19) необходимо показать, что

$$\frac{\partial P_2}{\partial v}B = P_2\frac{\partial}{\partial v}(A\dot{x})$$

в начальной точке ζ. Заметим, что $P_2(A\dot{x}) = 0\ \forall(t, v, y, \nu) \in \mathbf{W}_0$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[P_2 A\dot{x}\right] = \frac{\partial P_2}{\partial v}A\dot{x} + P_2\frac{\partial}{\partial v}(A\dot{x}) = 0,\ \frac{\partial P_2}{\partial v}A\dot{x} = -P_2\frac{\partial}{\partial v}(A\dot{x}).$$

В начальной точке ζ произведение $\dfrac{\partial P_2}{\partial v}A\dot{x}$ не меняется, если вектор $\dot{x}(0,0)$ заменим произвольным решением уравнения $A(\zeta)c+B(\zeta) = 0$, которое в силу условия 3 теоремы разрешимо. Тогда в точке ζ справедливо равенство

$$\frac{\partial P_2}{\partial v}B = P_2\frac{\partial}{\partial v}(Ac).$$

Согласно условию 4 теоремы пучок из (20), имеющий в начальной точке вид $\lambda A(\zeta) + \mathcal{B}(\zeta)$, удовлетворяет критерию "ранг-степень", и из леммы 2 следует, что $\det\mathcal{A}(\zeta) \neq 0$. Следовательно, по непрерывности существует окрестность точки ζ, в которой матрица $\mathcal{A}$ обратима, дифференцируема и согласно лемме 5 на некотором отрезке $[0, \varepsilon] \subseteq [0, 1]$ существует решение начальной задачи (18), (2) $x^*(t, 0)$.

Докажем, что $x^*(t, 0)$ является решением задачи (1), (2). Подставим эту вектор-функцию в исходную задачу. Условие (2) удовлетворяется автоматически. Предположим, что

$$A(t, x^*, Vx^*, 0)\dot{x}^* + B(t, x^*, Vx^*, 0) = \mu(t),\ t \in [0, \varepsilon],$$

где $\mu(t) \neq 0$. В силу условия 3 теоремы вектор-функция $x^*(t, 0)$ удовлетворяет уравнению (1) в точке $t = 0$. Следовательно, $\mu(0) = 0$. Согласно формуле (18)

$$\tilde{\Omega}_0\mu = \left[\begin{pmatrix} P_1(\chi^*) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2(\chi^*) \end{pmatrix}\right]\mu = 0,\ t \in [0, \varepsilon],$$

где $\chi^* = (t, x^*, Vx^*, 0)$, $\det P(t) \neq 0\ \forall t \in [0, \varepsilon]$. Произведем замену $\mu = P^{-1}(\chi^*)h(t)$. Получим на отрезке $[0, \varepsilon]$ задачу вида (16). Теорема доказана. □

Замечание 2. *Если условие 4 выполнено для одного* $c:\ A(\zeta)c+B(\zeta) = 0$, *то оно выполнено и для всех других* c. *Согласно лемме 4 в (17) можно принять* $c = -A^-(\zeta)B(\zeta)$. *Частным случаем* S^- *является псевдообратная матрица* S^+ [21], *которую можно вычислить как предел* $G(\delta) = (\delta^2 E + S^\top S)^{-1}S^\top,\ \delta \to 0$, *где* $\|G(\delta) - S^+\| = O(\delta^2)$ [4].

Следствие 2. *Если на* T *существует решение* $x^*(t, 0)$ *системы (1), (2) и выполнено условие*

$$\operatorname{rank} A(\chi^*) = \deg\Psi(\lambda; t) = \mathrm{const}\ \forall\ t \in T,$$

где $\chi^* = (t, x^*, Vx^*, 0)$, *в качестве* c *принято* $\dot{x}^*(t, 0)$,

$$\Psi(\lambda; t) = \det\left[\lambda A(\chi^*) + \mathcal{B}(\chi^*)\right], \tag{21}$$

то существует окрестность начального данного $\mathcal{Q} = \{w : \|x_0 - w)\| \leq \varrho\}$ *такая, что при достаточно малом* ϱ *на* T *найдется решение системы (1)* $\tilde{x}^*(t, 0) : \tilde{x}^*(0, 0) \in \mathcal{Q}$. *Здесь* $\|.\|$ *— равномерная норма в* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Докажем вначале локальный вариант следствия. Из (21) и рассуждений при доказательстве теоремы следует, что определитель (18) не равен нулю для любой точки $t \in T$. Следовательно, по непрерывности существует окрестность точки χ^*, в которой матрица $\mathcal{A}$ невырожденна. Таким образом, в этой окрестности систему (1) можно привести к нормальной форме и для нее применить схему доказательства теоремы о погружении [22, с. 36].

Следствие 3. *Пусть на отрезке T определено решение $x^*(t,0)$ задачи (1), (2) при значении параметра $\nu = 0$. Тогда при достаточно малом значении величины $|\nu|$ в окрестности $x^*(t,0)$ определено решение задачи (1), (2).*

Отметим еще одно обстоятельство. Пусть на T существует решение $x^*(t,0)$ системы (1), (2) и многочлен из (21) имеет вид

$$\Psi(\lambda; t) = a_0(t)\lambda^r + \ldots, \ t \in T, \tag{22}$$

где $r = \max\{\mathrm{rank} A(\chi^*), \ t \in T\}$. Если уравнение $a_0(t) = 0$ имеет изолированное решение $t^* : a_0(t^*) = 0$, то t^* может являться особой точкой системы (1). Поясним сказанное. Уравнение

$$A(t, z, V^0 z + \phi, \nu)\dot{z} + B(t, z, V^0 z + \phi, \nu) = 0, \ t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

с начальными данными $x(0) = x(t_0)$, где

$$\phi \equiv \phi(t) = \int_0^{t_0} K(t, s, x^*(s,0))ds, \quad V^0 z = \int_{t_0}^{t} K(t, s, z(s))ds,$$

при достаточно малом $\delta > 0$ имеет решение, совпадающее с $x^*(t,0)$ на отрезке $[t_0, t_0+\delta]$, и удовлетворяет условиям теоремы 1. При $t_0 \to t^*$ видим, что $t_0+\delta \to t^*$. Следовательно, в формуле (18) $\det \mathcal{A}(\chi^*)|_{t_0+\delta \to t^*} \to 0$, где $\chi^* = (t, x^*, Vx^*, 0)$, и

$$\det \mathcal{A}(\chi^*)|_{t^*} = 0, \quad \det \mathcal{A}(\chi^*) \neq 0, \quad t \neq t^*.$$

Численные способы поиска особых точек обсуждаются ниже.

Класс систем, описываемый теоремами 1, 2, не исчерпывает всего класса систем, имеющих индекс 1.

Пример 1. *Рассмотрим задачу*

$$F(t, x, \dot{x}, Vx) = \begin{pmatrix} x_2 V_1 x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 + V_2 x \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \ x(0) = 0,$$

где $V_1 x = \int_0^t x_1(s)ds, \ V_2 x = \int_0^t x_2(s)ds$, *которая имеет единственное решение* $x^*(t) = 0$.

Для любой вектор-функции $x \in \mathbf{C}^2(T)$ *имеем*

$$\Lambda_1 \circ F(t, x, \dot{x}, Vx) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & -(\ddot{x}_1 V_1 x + x_1 \dot{x}_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\dot{x}_1 V_1 x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}.$$

Отметим, что широко используемый метод дифференцирования конечных связей, в частности в механике, здесь не дает результата: после первого шага процесса получим систему

$$\begin{pmatrix} x_2V_1x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 + V_2x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

с особенной в начальной точке матрицей при $\dot{x}$. Как обратить эту матрицу, так и сделать новый шаг процесса мы не можем.

4. Выбор численного метода

Отметим, что применение явных схем (предпочтительных здесь в силу простоты их реализации) для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений в настоящее время представляется затруднительным.

Пример 2. *Рассмотрим задачу*

$$A\dot{x} + Bx = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dot{f}_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \tag{23}$$

где $\begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} c & f_2(0) \end{pmatrix}^\top$, c — произвольное число.

Явная схема Эйлера $A(x_{i+1} - x_i)/h + Bx_i = f(t_i)$, где x_i — значения сеточной функции, $h = 1/N,\ t_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$, после простого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1,i+1} \\ x_{2,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,i} \\ g_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,i} + x_{2,i} - h[x_{1,i} + x_{2,i} - f_1(t_i)] \\ x_{2,i} - f_2(t_i) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Система (24) имеет множество решений, и не известно, как в нем выбирать решение, нужное для сходимости. Попытаемся выбрать какое-то обобщенное решение, например нормальное псевдорешение

$$x_{i+1} = A^+\begin{pmatrix} g_{1,i} \\ g_{2,i} \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где A^+ — псевдообратная матрица (см. замечание 2). В выражении (25) обе компоненты вектора x_{i+1} совпадают, а в системе (23) они в общем случае различны.

Здесь можно воспользоваться следующим обстоятельством. Система (23) имеет явную алгебраическую связь $x_2 = f_2(t)$. Учитывая, что $x_{2,i} = f_2(t_i)$, $(x_{2,i+1} - x_{2,i})/h \approx [f_2(t_i) - f_2(t_{i-i})]/h,\ i \geq 1$, получим сходимость. В общем случае системы (1) такой подход не всегда возможен.

При применении неявных схем при каждом i необходимо решать сложную нелинейную систему. Для упрощения используют прием линеаризации. Известно (см., например, [23]), что для задачи в нормальной форме $\dot{x} + B(t,x) = 0$ неявную схему Эйлера $(x_{i+1} - x_i)/h + B(t_{i+1}, x_{i+1}) = 0$ можно заменить сходящейся с первым порядком схемой $(x_{i+1} - x_i)/h + B(t_{i+1}, x_i) + J(t_{i+1}, x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0,\ J(x,t) = \partial B(t,x)/\partial x$, где при каждом i нужно один раз решить линейную систему.

Аналогично на отрезке $[0, \varepsilon]$ из теоремы 1 для задачи (1), (2) введем сетку $t_i = ih$, $h = \varepsilon/N$, N — число узлов сетки. Запишем неявную схему

$$A(Y_{i+1})\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + B(Y_{i+1}) = 0, \quad Y_{i+1} = \left(t_{i+1}, x_{i+1}, h\sum_{j=1}^{i+1} K(t_i, s_j, x_j), \nu\right),$$

в которой проведем разложение входных данных в ряд Тейлора по x с удержанием первого члена разложения. Интеграл будем считать не по формуле правых прямоугольников, а по формуле левых прямоугольников. Получим схему следующего вида:

$$\left[A_i + h(\tilde{B}_i + \tilde{A}_i)\right](x_{i+1} - x_i) = -hB_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{26}$$

где

$$A_i = A(Z_i), \quad B_i = B(Z_i), \quad Z_i = \left(t_i, x_i, h\sum_{j=0}^{i} K(t_i, s_j, x_j), \nu\right),$$

$$\tilde{B}_i = \left.\frac{\partial B(t,v,y,\nu)}{\partial v}\right|_{(t,v,y,\nu)=Z_i}, \quad \tilde{A}_i = \left.\frac{\partial [A(t,v,y,\nu)P_i]}{\partial v}\right|_{(t,v,y,\nu)=Z_i}, \quad P_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{h},$$

и при каждом i нужно один раз решить линейную систему.

Теорема 3. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 2,
2) известны начальные значения $x(0) = x_0$ и $x(h) = x_1$.
Тогда для схемы (26) равномерно по i справедлива оценка $\|x_i - x(t_i)\| = O(h)$.

Кратко изложим общую схему доказательства. Действуя на (26) оператором вида

$$\tilde{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} P_1(Z_i) \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ P_2(Z_i) \end{pmatrix},$$

где Δ — разностный оператор: $\Delta g_i = (g_{i+1} - g_i)/h$, получим разностную схему, с точностью $O(h)$ аппроксимирующую систему (18), у которой матрица перед производной обратима в условиях теоремы 1 в окрестности начальной точки. Несложные, но громоздкие вычисления показывают, что для невырожденной задачи разностный метод сходится, а следовательно, сходится и для вырожденной.

Пример 3. *Рассмотрим тестовую задачу вида (1), (2)*

$$\begin{pmatrix} e^{-t}x_1(t) & e^{-t}(x_2(t) + \int\limits_0^t x_1(s)x_2(s)ds) \\ x_1(t)x_2(t) & x_2^2(t) + x_2(t)\int\limits_0^t x_1(s)x_2(s)ds \end{pmatrix}\dot{x}(t) -$$

$$-\begin{pmatrix} 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}x_1^4(t) + \nu \\ 2e^{2t}x_2^2(t) + e^{3t}x_1(t) + 2e^{2t}x_2(t)\int\limits_0^t e^{2s}x_1(s)ds \end{pmatrix} = 0, \quad T = [0,1],$$

где при $\nu = 0$ $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, $x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Убедимся в выполнении условий теоремы 2. Имеем* $v = (v_1\ v_2)^\top$, $y = (y_1\ y_2)^\top \in \mathbf{R}^2$,

$$A(t,v,y,\nu) = \begin{pmatrix} e^{-t}v_1 & e^{-t}(v_2 + y_1) \\ v_1v_2 & v_2^2 + v_2y_1 \end{pmatrix}, \quad B(t,v,y,\nu) = \begin{pmatrix} 2v_1v_2 + e^t/3 + 2v_1^4/3 + \nu \\ 2e^{2t}v_2^2 + e^{3t}v_1 + 2e^{2t}v_2y_2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что первое условие выполнено. Далее

$$\det A(t,v,y,\nu) = 0 \ \forall \ (t,v,y,\nu), \quad \operatorname{rank} A(t,v,y,\nu) = 1$$

в окрестности точки $\zeta = (0, x_0, 0, 0)$. Условие 3 теоремы 2 выполнено:

$$\operatorname{rank} A(\zeta) = \operatorname{rank}\,[A(\zeta)|\ \tilde b] = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Уравнение для вектора c из (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ 3 - c_1 \end{pmatrix},$$

где c_1 — произвольное число из $\mathbf{R}^1$. Условие 4 также выполнено:

$$\deg\det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14/3 + c_1 & 1 - c_1 \\ 1 & 1 - 2c_1 \end{pmatrix}\right] = \deg\,[(-17/3)\lambda + ...] = 1 \ \forall \ c_1.$$

Таким образом, существует окрестность нуля, в которой определено решение нашего примера. Проверим задачу на наличие особых точек. Выпишем многочлен из (21):

$$\Psi(\lambda;t) = \det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & (3\theta^2+\theta^3-1)/3\theta \\ \theta^3 & \theta^2(3\theta^2+\theta^3-1)/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 2\theta^2 - \frac{8}{3}\theta^3 & 0 \\ 2\theta^3 & 0 \end{pmatrix}\right] = a_0(t)\lambda + \ldots,$$

где

$$a_0(t) = -\frac{\theta^3(3\theta^2+\theta^3-1)}{3}\left(2\theta^2 + \frac{14}{3}\theta^3 - 1\right), \quad \theta = e^t.$$

Очевидно, что старший коэффициент $a_0(t) \neq 0 \ \forall \ t \in T$ и условия следствий 2 и 3 выполнены.

Были произведены расчеты по схеме (26). Результаты приведены в таблице (здесь $Err = \max\limits_i \|x_i - x(t_i)\|$ — глобальная погрешность).

N	Err ($\nu = 0$)	Err ($\nu = 0.2$)
100	0.11	0.11
1000	0.011	0.077
10000	0.0011	0.075

В заключение сделаем замечания о поиске особых точек. При аномалиях счета (например, авосте) для систем небольшой размерности можно попытаться определить наличие особых точек решения на T. Для этого следует по точкам x_i, $i = 0, 1, \ldots j$, которые удалось вычислить, построить многочлен $L(t)$, подставить его в многочлен (21) и вычислить $\tilde a_r(t)$ — приближение для $a_r(t)$ из (22).

Пусть $L(t)$ близок к решению задачи (1), (2) в $\mathbf{C}^1[0, jh + \epsilon]$, ϵ — некоторое число, большее h. Если нули у $a_r(t)$ простые, то у функции $\tilde a_r(t)$ при достаточной малости нормы $\|a_r(t) - \tilde a_r(t)\|_{\mathbf{C}^1[0,jh+\epsilon]}$ существуют близкие нули. Нулям функции $a_r(t)$ соответствуют особые точки решений.

Список литературы

[1] Ушаков Е.И. Статическая устойчивость электрических систем. Новосибирск: Наука, 1988.

[2] Серов Е.П., Корольков Б.П. Динамика парогенераторов. М.: Энергоиздат, 1981.

[3] Muller P.C.: Aspects of modeling dynamical systems by differential-algebraic equations // Math. and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2001. Vol. 7. P. 133–143.

[4] Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.

[5] Griepentrog E., Maerz R. Differential-Algebriac Equations and Their Numerical Treatment. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlags gesellschaft, 1986. 220 p.

[6] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations (Classics in Applied Mathematics; 14). Philadelphia: SIAM, 1996.

[7] Rheinboldt W.C., Raiber P.T. Theoretical and Numerical Analysis of Differential-Algebaric Equations. Handbook of Numerical Analysis: Vol. VIII. Amsterdam, 2002.

[8] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

[9] Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. Europ. Math. Soc., 2006. 337 p.

[10] Булатов М.В. Об интегро-дифференциальнызх системах с вырожденной матрицей перед производной // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 692–697.

[11] Булатов М.В., Чистякова Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами // Там же. 2006. Т. 42, № 9. С. 1248–1255.

[12] Bulatov M.V., Chistyakova E.V. Numerical solution of singualr systems of integral differential equations // Proc. Intern. Conf. on Comput. Math. Novosibirsk, 2004. Vol. 2. P. 813–817.

[13] Горбунов В.К. Метод нормальной сплайн-коллокации // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1989. Т. 29, № 2. С. 212–224.

[14] Gorbunov V.K., Perischev V.V., Sviridov V.Y. Development of the normal spilne method for linear intego-differential equations // Proc. ICCS-2003. Part II. Springer, 2003.

[15] Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б. Численное решение интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2008. Т. 48, № 3. С. 430–414.

[16] Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: Теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1999.

[17] Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1989.

[18] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1972. 534 с.

[19] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с.

[20] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.

[21] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

[22] Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гос. изд-во технико-теор. литры, 1956.

[23] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Поступила в редакцию 2 июля 2010 г.