Асимптотическое решение одной сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления методом интегрального многообразия

А. Ж. Жайнаков[1], Б. Ы. Аширбаев[2]
[1]*Национальная Академия Наук, Бишкек, Кыргызская Республика*
[2]*Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек*
e-mail: `Jainakov-41@mail.ru, Ashirbaev-58@mail.ru`

Предложен приближенный способ определения оптимального управления, основанный на разделении медленных и быстрых координат вектора состояния методом интегрального многообразия, что позволяет вместо исходной системы, имеющей более высокий порядок, ограничиваться рассмотрением “укороченной” системы меньшей размерности.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенная задача, интегральное многообразие, гамильтониан, сопряженная система, пограничный слой, быстрые и медленные движения.

Исследуемая задача оптимального управления состоит в следующем: требуется найти r-мерную непрерывную вектор-функцию $u(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = d^* x(T,\mu) + c^* z(T,\mu) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^*(t)Ru(t)dt \qquad (1)$$

на траекториях системы

$$\dot{y} = A(\mu)y + B(\mu)u, \quad y(0) = y_0, \qquad (2)$$

где $y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \dfrac{1}{\mu}A_3 & \dfrac{1}{\mu}A_4 \end{pmatrix}$, $B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dfrac{1}{\mu}B_2 \end{pmatrix}$, $x \in R^n,\ z \in R^m,\ \mu > 0$ — малый параметр, $T > 0$ — фиксированное число, $*$ — знак транспонирования, $d,\ c$ — векторы с размерностью $n,\ m,\ R$ — положительно определенная постоянная матрица с размерностью $m \times n,\ A_1 - (n \times n),\ A_2 - (n \times m),\ A_3 - (m \times n),\ A_4 - (m \times m)$, $B_1 - (n \times r),\ B_2 - (m \times r)$ — постоянные матрицы. Интеграл в формуле (1) оценивает энергии управляющего воздействия, затрачиваемого в процессе управления.

Предположим, что вещественные части корней матрицы A_4 отрицательные. Систему (2) можно переписать в виде

$$\dot{x} = A_1 x + A_2 z + B_1 u, \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n,$$

$$\mu\dot{z} = A_3 x + A_4 z + B_2 u, \quad z(0) = z_0, \quad z \in R^m. \qquad (3)$$

Гамильтониан для оптимальной задачи (1), (3) определяется как

$$H = \frac{1}{2}(u, Ru) + (p, A_1x + A_2z + B_1u) + (q, A_3x + A_4z + B_2u), \tag{4}$$

где векторы p и q являются решениями сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -A_1^*p - A_3^*q, \\ \mu\dot{q} &= -A_2^*p - A_4^*q \end{aligned} \tag{5}$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$p(T, \mu) = -d, \quad q(T, \mu) = -\frac{c}{\mu}. \tag{6}$$

Условие

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{7}$$

должно быть выполнено вдоль оптимальной траектории и означает [1]

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B_1^*p + B_2^*q = 0. \tag{8}$$

По предположению корни характеристического уравнения матрицы A_4 имеют отрицательные вещественные части. Тогда система (5) имеет пограничный слой и для нее существует интегральное многообразие [2] $q = h(\mu)p$, где $h(\mu)$ — $m \times n$-мерная матрица, элементы которой обычно зависят от μ. Матрица $h(\mu)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\mu h(A_1^* + A_3^*h) = A_2^* + A_4^*h. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) можно построить в виде сходящегося степенного ряда [2]

$$h(\mu) = h_0 + h_1\mu + h^2\mu^2 + \dots, \tag{10}$$

где

$$h_0 = -A_4^{*-1}A_2^*, \quad h_1 = A_4^{*-1}h_0(A_1^* + A_3^*h_0), \dots,$$
$$h_i = A_4^{*-1}\left(h_{i-1}A_1^* + \sum_{j=0}^{i-1} h_jA_3^*h_{-j-1+i}\right), \dots, \quad i = 1, 2, \dots$$

Замена [3] $q = \eta + hp$ приводит систему (5) к виду

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -(A_1^* + A_3^*h)p - A_3^*\eta, \quad p(T, \mu) = -d, \\ \mu\dot{\eta} &= -(A_4^* - \mu hA_3^*)\eta, \quad \eta(T, \mu) = -\frac{c}{\mu} + hd = \eta_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда решения системы (11) с начальными условиями (6) записываются как

$$p(t) = \bar{p}(t) + m_1(\tau), \quad q(t) = h(\mu)\bar{p}(t) + m_2(\tau), \tag{12}$$

где $\bar{p}(t) = e^{-(A_1^*+A_3^*h)(t-T)}(-d + \Delta p_0)$ — решение системы

$$\dot{\bar{p}} = -(A_1^* + A_3^*h)\bar{p}, \quad \bar{p}(T, \mu) = -d + \Delta p_0, \tag{13}$$

$$\Delta p_0 = \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-(A_1^*+A_3^*h)(T-s)} A_3^* e^{-(A_4^*-\mu h A_3^*)\frac{s-T}{\mu}} \eta_0 ds,$$

$$m_1 = \mu \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-(A_1^*+A_3^*h)(\tau-\sigma)} A_3^* e^{-(A_4^*-\mu h A_3^*)\sigma} \eta_0 d\sigma, \quad m_2 = e^{-\left(A_4^*-\mu h A_3^*\right)\tau} \eta_0.$$

Функции m_1 и m_2 удовлетворяют неравенствам

$$\|m_1\| \le \mu C_1 \|\eta_0\| e^{\xi\tau}, \quad \|m_2\| \le C_2 \|\eta_0\| e^{\xi\tau}, \tag{14}$$

где C_1 , C_2, ξ — const, $\tau = \dfrac{t-T}{\mu} \le 0$.

Если выбрать начальную точку $\left(-d, -\dfrac{c}{\mu}\right)$, принадлежащую интегральному многообразию $q = h(\mu)p$, то $\eta_0 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ и, следовательно, $p = \bar{p}$, $q = h(\mu)\bar{p}$ — решение системы (5), траектория которого лежит на этом многообразии.

Таким образом, для произвольной точки (p_0, q_0) указана такая точка $(p_0 = \bar{p}_0 + \Delta p_0$, $\bar{q}_0 = h(\mu)\bar{p}_0)$, лежащая на интегральном многообразии $q = h(\mu)p$, что решение системы (5), выходящее из точки (p_0, q_0) при $t = T(\tau = 0)$, при $\tau \to -\infty$ неограниченно приближается к решению $p = \bar{p}$, $q = h(\mu)\bar{p}$, $p(T) = p_0$, лежащему на данном многообразии. С учетом соотношений (12) формула (8) записывается в виде

$$u(t,\mu) = -R^{-1}\left(\bar{B}_1^* e^{-A_0^*(t-T)}\alpha_1 + \frac{1}{\mu}\bar{B}_2^* e^{-A_4^*\tau}\alpha_2\right) = \Psi(t,\mu), \tag{15}$$

где

$$\bar{B}_1^* = B_1^* + B_2^* h, \quad \bar{B}_2^* = B_2^* + \mu B_1^* A_3^* (A_4^* - \mu h A_3^*)^{-1} + O\left(\mu^2 e^{\theta\tau}\right) \quad (\theta > 0),$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(\mu) = -d + \Delta p_0, \quad \alpha_2 = -C + \mu h d,\ \bar{A}_1^* = A_1^* + A_3^* h, \quad \bar{A}_4^* = A_4^* - \mu h A_3^*. \tag{16}$$

При $\mu \to 0$ имеем следующие предельные соотношения:

$$\lim \bar{B}_1 = B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \quad \lim \bar{B}_2 = B_2, \quad \lim \bar{A}_0 = A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3,$$

$$\lim \bar{A}_4 = A_4, \quad \lim \alpha_1 = -d + A_3^* A_4^{*-1} C, \quad \lim \alpha_2 = C.$$

С учетом (15) система (3) примет вид

$$\dot{x} = A_1 x + A_2 z + \varphi_1, \quad x(0,\mu) = x_0,$$

$$\mu\dot{z} = A_3 x + A_4 z + \varphi_2, \quad z(0,\mu) = z_0, \tag{17}$$

где $\varphi_1 = B_1\Psi$, $\varphi_2 = B_2\Psi$, $\Psi(t,\mu)$ — известная функция, определенная формулой (15). В отличие от (5) система (17) имеет интегральное многообразие

$$z = K(\mu)x + \varpi(t,\mu), \tag{18}$$

движение по которому описывается системой

$$\dot{x} = (A_1 + A_2 K)x + A_3\varpi + \varphi_1. \tag{19}$$

Матрица K и вектор ϖ являются решениями уравнений

$$\mu K(A_1 + A_2 K) = A_3 + A_4 K, \quad \mu\frac{\partial\varpi}{\partial t} + \mu K(A_2\varpi + \varphi_1) = A_4\varpi + \varphi_2. \tag{20}$$

Аналогично вышеуказанному уравнения (20) также имеют решения, которые могут быть представлены в виде сходящихся степенных рядов

$$K = K_0 + \mu K_1 + \ldots + \mu^n K_n + \ldots,$$

$$\varpi(t,\mu) = \varpi_0(t) + \mu\varpi_1(t) + \ldots + \mu^n\varpi_n(t) + \ldots$$

Для функций, входящих в правые части системы (17), можно записать конечные асимптотические разложения по степеням μ, коэффициенты которых однозначно определяются из соотношения (20) путем приравнивания их при одинаковых степенях μ.

Произведя в системе (17) замену [4]

$$z = K(\mu)x + \varpi(t,\mu) + y, \tag{21}$$

быстрые и медленные движения можно разделить, перейдя к системе

$$\dot{x} = (A_1 + A_2 K)x + A_2\varpi + \varphi_1 + A_2 y, \quad x(0,\mu) = x_0,$$

$$\mu\dot{y} = (A_4 - \mu K A_2)y, \quad y(0\mu) = z_0 - Kx_0 - \varpi(0) = y_0. \tag{22}$$

Аналогично, как это делалось выше для системы (5), решение системы (22) можно записать в форме (12).

Пример. Объект управления описывается уравнением

$$T_1 T_2\frac{d^3x}{dt^3} + (T_1 + T_2)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku. \tag{23}$$

Обозначив $\dot{x} = x_2$, уравнение (23) запишем в виде системы

$$\dot{s} = A_1 s + A_2 z + B_1 u, \quad s\,(0) = s_0,$$

$$T_2\dot{z} = A_3 y + A_4 z, \quad z\,(0) = z_0, \tag{24}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = -1$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{T_1} \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$, $z = x_2$, $0 \le T_1 \le T_2 \le 1$. Требуется найти алгоритм управления $u(t)$, доставляющий минимум функционалу

$$J\,(u) = d_1 x\,(T) + d_2 x_1\,(T) + A x_2\,(T) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2\,(t)\,dt \tag{25}$$

на траекториях системы (24), где d_1, d_2, c, k — постоянные, $T \in [0,\,1]$ — время.

В системе (24) введем следующие обозначения:

$$\dot{x} = x_2 = f_1, \quad \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 + \frac{k}{T_1}u = f_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{T_2}x_1 - \frac{1}{T_2}x_2 = f_3. \tag{26}$$

Тогда уравнения для сопряженных переменных ψ имеют вид [1]

$$\dot{\psi}_1 = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x}\psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x}\psi_3\right] = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\psi_3\right] = \frac{1}{T_1}\psi_2 - \frac{1}{T_2}\psi_3,$$

$$\dot{\psi}_3 = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\psi_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\psi_3\right] = -\psi_1 + \frac{1}{T_2}\psi_3. \tag{27}$$

Систему (27) перепишем как

$$\dot{p} = -A_1^* p - A_3^* g, \quad \dot{q} = -A_2^* p - A_4^* q, \tag{28}$$

где

$$p = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad q = -\frac{1}{T_2}\psi_3, \quad A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_1} \end{pmatrix},$$

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4^* = -1. \tag{29}$$

Уравнения системы (28) удовлетворяют граничным условиям

$$p\,(T, T_2) = -\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad q\,(T, T_2) \ = -\frac{c}{T_2}. \tag{30}$$

Граничные условия (30) получены согласно условиям (6), где $T_2 = \mu$. Введем замену в виде $q = \eta + hp$, где матрица h удовлетворяет уравнению

$$T_2 h A_1^* + T_2 h A_3^* h = A_2^* + A_4^* h. \tag{31}$$

Это приводит систему (28) к виду

$$\dot{p} = -\left(A_1^* + A_3^* h\right) p - A_3^* \eta, \quad p\,(T, T_2) = -d,$$

$$T_2 \dot{\eta} = -\left(A_4^* - T_2 h A_3^*\right) \eta, \quad \eta\,(T, T_2) = -\frac{c}{T_2} + hd = \eta_0. \tag{32}$$

Решения системы (32) записываются как

$$p\,(t) = \bar{p}\,(t) + m_1\,(\tau)\,, \quad q\,(t) = h\,(T_2)\,\bar{p}\,(t) + m_2\,(\tau)\,, \tag{33}$$

где $\bar{p}\,(t) = e^{-\left(A_1^* + A_3^* h\right)(t-T)}\,(-d + \Delta p_0)$ — решение системы

$$\dot{\bar{p}} = -\left(A_1^* + A_3^*\right)\bar{p}, \quad \bar{p}\,(T, T_2) = -d + \Delta p_0, \tag{34}$$

здесь

$$\Delta p_0 = \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-\left(A_1^* + A_3^* h\right)(T-s)} A_3^* e^{-\left(A_4^* - T_2 h A_3^*\right)\left(\frac{s-T}{T_2}\right)} \eta_0 ds.$$

При $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0.5$ получаем

$$\Delta p_0 = \int\limits_{-\infty}^{T} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2(T-s)} \end{pmatrix} \cdot e^{6(s-T)} \cdot 15.2 ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 15.2 \int\limits_{-\infty}^{T} e^{-4T+4s} ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.8 \end{pmatrix},$$

$$m_1 = -T_2 \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\left(A_1^* + A_3^* h\right)(\tau-\sigma)} A_3^* e^{-\left(A_4^* - T_2 h A_3^*\right)\sigma} \eta_0 d\sigma =$$

$$= -0.5 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2(\tau-\sigma)} \end{pmatrix} e^{3\sigma} \cdot 15.2 d\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.6 \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{2\tau+\sigma} d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.6 e^{6(t-T)} \end{pmatrix},$$

$$\bar{p}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_1 - T_1 e^{\frac{1}{T_2}(t-T)} & e^{\frac{1}{T_2}(t-T)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1.8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -T_1 + T_2 e^{\frac{1}{T_2}(t-T)} + 1.8 e^{\frac{1}{T_2}(t-T)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 + 2.3 e^{2(t-T)} \end{pmatrix},$$

$$p(t) = \bar{p}(t) + m_1(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 + 2.3 e^{2(t-T)} - 7.6 e^{6(t-T)} \end{pmatrix},$$

$$m_2(\tau) = e^{-\left(A_4 - T_2 h A_3^*\right)\tau} \eta_0 = 15.2 e^{6(t-T)},$$

$$q(t) = h\bar{p}(t) + m_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0.2, 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 + 2.3 e^{2(t-T)} \end{pmatrix} + 15.2 e^{6(t-T)} =$$

$$= 0.2 - 0.8 + 18.4 e^{2(t-T)} + 15.2 e^6 (t-T). \tag{35}$$

Из условия (8) получим

$$U = -B_1^* p = \begin{pmatrix} 0, & -\dfrac{k}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.1 + 2.3 e^{2(t-T)} - 7.6 e^{6(t-T)} \end{pmatrix} =$$

$$= -1 + 23 e^{2(t-T)} - 76 e^{6(t-T)}. \tag{36}$$

Теперь (24) примет вид

$$\dot{s} = A_1 s + A_2 z - B_1 B_1^* p, s(0, T_2) = s_0,$$

$$T_2 \dot{z} = A_3 y + A_4 z, z(0, T_2) = z_0. \tag{37}$$

Система (37) имеет интегральное многообразие $z = K(T_2) s + \omega(t, T_2)$, движение по которому описывается системой

$$\dot{s} = (A_1 + A_2 k) s + A_2 \omega - B_1 B_1^* P,$$

где матрицы K и ω являются решениями уравнений

$$T_2 K (A_1 + A_2 K) = A_3 + A_4 K, \tag{38}$$

$$T_2 \dot{\omega} + T_2 K A_2 \omega - T_2 K B_1 B_1^* p = A_4 \omega. \tag{39}$$

Нас интересуют те решения уравнения (38), которые при $T_2 \to 0$ стремятся к $K = -A_4^{-1}A_3$. Произведя в системе (37) замену

$$z = k\left(T_2\right)s + \omega\left(t, T_2\right) + \varphi, \tag{40}$$

получим систему с разделенными переменными состояния

$$\begin{gathered} \dot{s} = \left(A_1 + A_2K\right)s + A_2\omega - B_1B_1^*p + A_2\varphi, \quad s\left(0, T_2\right) = s_0, \\ T_2\dot{\varphi} = \left(A_4 - T_2KA_2\right)\varphi, \quad \varphi\left(0, T_2\right) = z_0 - Ks_0 - \omega\left(0\right) = \varphi_0. \end{gathered} \tag{41}$$

Решения уравнений (38) и (39) имеют вид

$$K = \left(K_1\ K_2\right) = \left(0,\ 6\right),$$

$$\begin{gathered} \omega\left(t, T_2\right) = e^{\frac{A_4 - T_2KA_2}{T_2}t}\omega\left(0\right) + \int\limits_0^t e^{\frac{A_4 - T_2KA_2}{T_2}\left(t - S\right)}T_2KB_1B_1^*p\left(S\right)dS = \\ = -15\left(1 - e^{-2t}\right) + 172.5\left(1 - e^{-4t}\right) + 285e^{-2t-6t}\left(1 - e^{8t}\right). \end{gathered} \tag{42}$$

С учетом (42) получим решение второго уравнения системы (41)

$$\varphi\left(t, T_2\right) = e^{\frac{A_4 - T_2kA_2}{T_2}t}\varphi_0 = 7e^{-2t}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} x\left(t, T\right) = -0.525 + 163.5t - 45.6e^{-10t} + 4e^{-2t} + 43.125e^{-4t} + 285.5e^{-2t-6t}t - \\ -36.625\left(e^{-2t-6t} - e^{-8t-2t}\right) - 138e^{2(t-T)}t + \\ +13.8\left(e^{2(t-T)} - e^{-8t-2t}\right) - 45.6\left(e^{6(t-T)} - e^{-4t-6t}\right), \\ x_1\left(t, T\right) = 1 - 23\left(e^{-2(t-T)} - e^{-8t-2t}\right) + 76(e^{6(t-T)} - e^{-4t-6t}). \end{gathered} \tag{43}$$

Таким образом, оптимальные траектории системы (24), доставляющие минимум функционалу (25), определяются функциями в (43).

Список литературы

[1] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое упрвление. М.: Наука, 1978. 552 с.

[2] Иманалиев З.К. Метод интегральных многообразий в линейной сингулярно-возмущенной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом // Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики. Материалы IV Республ. научно-метод. конф. Бишкек, 1996. Ч. 2. С. 191–196.

[3] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.

[4] Геращенко Е.И., Геращенко С.И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975. 295 с.

Поступила в редакцию 23 июня 2011 г.