Каркасно-континуальные модели управляемой территориально распределенной социально-экономической активности

С. С. Замай[1], В. А. Охонин[2], В. В. Денисенко[3,4]
[1]*Сибирский государственный технологический университет, Красноярск, Россия*
[2]*Университет Оттавы, Канада*
[3]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*
[4]*Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*
e-mail: sergey-zamay@yandex.ru, denisen@icm.krasn.ru, okhonin@yandex.ru

Описан континуальный подход к математическому моделированию пространственно-временных распределений плотности населения. Рассмотрен случай, когда динамику социума в пространстве можно представить в виде стремления к стационарному состоянию, а установившиеся стационарные состояния описываются вариационными принципами по аналогии с теми, которые используются при решении эллиптических уравнений в физике. Источники, стоки, потенциалы, граничные условия и характеристики среды определяются пространственным каркасом региональной экономики, условиями расселения и жизнедеятельности. В общем случае структура и параметры производящих функционалов и соответствующих уравнений сложны и нуждаются в верификации по реальным данным. Приведены математические модели и результаты численного моделирования, иллюстрирующие конструктивность подхода на нескольких примерах анализа пространственных неоднородностей расселения.

Ключевые слова: динамика населения, математическая модель, вариационный принцип, численный метод.

Введение

Основной парадокс современной парадигмы управления состоит в том, что хотя развитие производства и инфраструктуры экономики номинируются для улучшения жизни людей, управление обществом строится на принципе отчуждения производства от социума. Эта оборотная сторона отказа государства от детерминации поведения людей является центральным пунктом современной демократической идеологии. В свою очередь в государственном управлении и регулировании данная ситуация проявляется в отсутствии практики применения методов анализа и планирования социально-экономических предпочтений поведения основных (системообразующих) социальных субъектов территории, а также мероприятий популяризации, внедрения социальных технологий и систем ценностей, обеспечивающих сбалансированное развитие.

Снизить уровень естественно возникающих при этом социально-экономических напряжений можно, моделируя и прогнозируя динамику “свободного поведения людей”, индуцируемую пространственными и структурно-функциональными изменениями производства и инфраструктуры экономики и жизнеобеспечения, что позволяет развивать систему управления производством и инфраструктурами, способствующую действительному улучшению жизни людей.

В современных условиях может формироваться следующий подход к решению вышеозначенных проблем управления:

— выделяются производства и инфраструктурные элементы экономики и жизнеобеспечения, управление которыми осуществляется технически в традиционном ключе, в практике территориального планирования называемые каркасом соответствующего административно-территориального образования;

— дополнительно производится прогноз изменения жизни людей на основе знания их самопроизвольной, не контролируемой прямо, реакции на пространственные и временные изменения "каркаса";

— цель модификации производств и инфраструктур формулируется таким образом, чтобы в итоге улучшились не только их показатели, но и жизнь людей.

Ключевыми факторами для реализации предлагаемого подхода являются:

— развитие средств прогноза реакции социальных субъектов на изменение "каркаса";

— принятие ясных и обоснованных критериев "улучшения жизни людей".

Предлагаемый подход в системе государственного управления может быть дополнен методами детерминации поведения социальных субъектов, основанными на внедрении социальных технологий и систем ценностей, обеспечивающих оптимальное использование каркаса в интересах личности и общества в целом. В современной рыночной экономике эти методы широко применяются, и потребности людей не столько удовлетворяются, сколько создаются на заказ. Именно этим заняты многочисленные дорогостоящие рекламные подразделения, существующие в любой крупной фирме. Существует даже рынок услуг по оценке "рентабельности" изменения потребностей людей в ту или иную сторону. Специалисты могут установить, каким способом дешевле изменить потребность в нужном направлении, и предоставить кампании экономически оптимальный план по изменению "свободных" (если верить идеологии) потребностей людей с наименьшими затратами. Однако в настоящей работе рассматривается в основном техническая сторона изложенного подхода, включающая методы прогноза реакций социума на модификации "каркаса" и формализм задач управления "каркасом" с учетом его воздействия на социум.

1. Методы описания социальных сообществ. Метод производящего функционала

Поскольку социум объединяет значительное число людей, для его описания естественно применять континуальные переменные (функции распределения в пространстве состояний). В настоящее время такого рода подходы довольно развиты не только в статистической физике и гидродинамике, но и в химии, в теории полимеров, в математическом моделировании биологических сообществ и др.

Наиболее подробное и точное описание предполагает либо задание плотностей вероятностей в пространстве состояний для каждого члена социума (дополненное заданием вероятности существования данной личности), либо эквивалентное "деперсонифицированное" описание на языке одночастичных и многочастичных функций распределения (совместных вероятностей по определению группы людей в пространстве состояний групп). В первом случае динамика сообщества как вариант описывалась бы марковскими уравнениями для плотностей вероятностей, во втором — цепочками Боголюбова, связывающими между собой функции распределения [1].

Довольно детальное приближенное описание может быть проведено на основе одночастичных функций распределения, приближенно подчиняющихся кинетическим уравнениям. Наконец, еще более приближенное описание может быть сделано в терминах пространственной плотности (возможно дополненных некоторыми средними от функций распределения).

Во всех случаях необходимо сделать предположения о динамике избранных переменных, содержательно восходящие, прямо или косвенно, к представлениям о поведении составляющих социум социальных субъектов, личностей. Ситуация осложняется тем, что о закономерностях поведения личностей известно очень немного.

В моделировании биологических сообществ иногда используются предположения о "целесообразности" поведения особей. Например, особи могут распределяться по пространству, пытаясь максимизировать свой коэффициент размножения [2]. В случае социума основные надежды следует возлагать на эмпирические и полуэмпирические методы описания, когда параметры описания верифицируются на основе реальных статистических данных.

В целях наших исследований примем целый ряд упрощающих предположений. Во-первых, ограничимся (в качестве первого шага, другие возможности будут обсуждаться вкратце ниже) рассмотрением только пространственных распределений людей, не учитывая динамику внутреннего состава социума. Иначе говоря, параметром описания социума будем считать плотность территориального распределения $\rho(r)$, зависящую также от времени t. Во-вторых, будем полагать, что данное пространственное распределение в постоянных внешних условиях стремится со временем к некоторому финальному значению, т. е. динамика пространственной плотности имеет релаксационный характер. В данном случае существует функция (функционал от плотности) Ляпунова [3], монотонно уменьшающаяся со временем. Предположим также, что известен явный вид данного функционала $H(\rho)$. Это означает, что динамика плотности представляет собой монотонное приближение к некоей цели, "общей для социума". Пример уравнения, соответствующего сделанным предположениям:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\mu(\rho,\mathbf{r},t)\frac{\delta H}{\delta\rho}, \tag{1}$$

где функция μ неотрицательна. Действительно, в силу (1) динамика функционала Ляпунова будет подчиняться соотношению

$$\frac{dH}{dt} = -\int \mu\left(\frac{\delta H}{\delta\rho}\right)^2 d\mathbf{r} \leq 0, \tag{2}$$

т. е. в силу (1), (2) функция Ляпунова не возрастает со временем. Кроме того *априори* известно, что если исходная плотность распределения неотрицательна, то она должна оставаться таковой и в дальнейшем, а также что функционал Ляпунова (именуемый далее производящим функционалом, задающим в силу (1) динамику плотности) должен иметь (при фиксированных граничных условиях) минимум. Последнему условию удовлетворяют, в частности, производящие функционалы вида

$$H = -\int F\left((\mathrm{grad}\rho)^2, \rho, \mathbf{r}\right) d\mathbf{r}, \tag{3}$$

где функция F ограничена снизу и монотонно растет с увеличением квадрата градиента плотности. В случае (3) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mu(\rho,\mathbf{r},t)\left(\mathrm{div}\left(\Phi\left((\mathrm{grad}\rho)^2,\rho,\mathbf{r}\right)\mathrm{grad}\rho\right) + \Psi\left((\mathrm{grad}\rho)^2,\rho,\mathbf{r}\right)\right), \tag{4}$$

где использованы обозначения

$$\Phi(A,B,\mathbf{r}) = 2\frac{\partial F(A,B,\mathbf{r})}{\partial A}, \quad \Psi(A,B,\mathbf{r}) = -\frac{\partial F(A,B,\mathbf{r})}{\partial B}. \tag{5}$$

При этом функция Φ неотрицательна всегда, а функция Ψ неотрицательна при $B = 0$. Если задача решается в области с заданной на границе плотностью ρ или с некоторыми другими условиями, то уравнение (4) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathrm{div}(\mu\Phi\mathrm{grad}\rho) - \mathrm{div}(\rho\Phi\mathrm{grad}\mu) + \rho\Phi\Delta\mu + (\mathrm{grad}\Phi\mathrm{grad}\mu)\rho + \mu\Psi =$$

$$= \mathrm{div}(D\mathrm{grad}\rho) - \mathrm{div}(\mathbf{V}\rho) + K\rho + J, \tag{6}$$

где использованы обозначения

$$D = \mu\Phi, \quad \mathbf{V} = \Phi\mathrm{grad}\mu, \quad K = \Phi\Delta\mu + (\mathrm{grad}\Phi\mathrm{grad}\mu + (\Psi(\rho) - \Psi(0))\mu/\rho, \quad J = \mu\Psi(0). \tag{7}$$

В форме (6) обсуждаемые уравнения допускают следующую интерпретацию: D представляет собой коэффициент диффузии, $\mathbf{V}$ — скорость переноса плотности, K — скорость прироста на единицу имеющейся плотности, J — прирост плотности за счет миграции. Все искомые величины могут зависеть от пространственных координат, от квадрата величины градиента плотности, а также от самой плотности. Здесь логичны и некоторые обобщения — например, в производящем функционале (3) может фигурировать не квадрат градиента плотности, а положительно определенная квадратичная форма градиента плотности.

Важное в контексте данной работы влияние каркаса выразим через зависимость функций, задающих вид производящего функционала, от параметров "каркаса" и расположения рассматриваемой точки пространства относительно элементов "каркаса".

Подчеркнем, что ограничение исследования рамками типов динамики, допускающих рассмотрение в терминах производящего функционала, является достаточно грубым допущением. Однако, как будет видно ниже, уже в этих рамках можно дать некое количественное описание ряда процессов территориального распределения. Наконец, произвольный вид функций, входящих в производящий функционал, делает соответствующие уравнения довольно гибкими и позволяет надеяться, что в некоторых случаях эмпирическая подгонка параметров производящего функционала под реальные данные может порождать эффективные эмпирические модели.

Наиболее интересной особенностью моделей социума, основанных на явном введении производящего функционала, является то, что в этом (и возможно только в этом) случае рассуждения о "реконструируемых по действиям внутренних целях социума" приобретают простой формализованный смысл. Тем самым в данных рамках некоторые принципиальные вопросы прогнозирования и регулирования поведения социума приобретают простой вид.

2. Простейшие примеры описания в терминах производящего функционала

Рассмотрим производящий функционал (для случая одномерного пространства) вида

$$H = -\int \left(\frac{1}{2} D \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - a\rho^2(\rho_0/2 - \rho/3) \right) dx. \tag{8}$$

Данному производящему функционалу при $\mu = 1$ и постоянных D, a, ρ соответствует уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + a\rho(\rho_0 - \rho). \tag{9}$$

Это уравнение описывает динамику распространения плотности, максимальное стационарное значение которой равно ρ_0. В частности, существует автомодельное решение $\rho(x - Vt)$, описывающее фронт распространения плотности, имеющий стабильную форму. Это решение может быть выражено через функцию Вейерштрасса [4] (не будем останавливаться подробнее на известных свойствах уравнения (9)).

Если рассматривать однородные по пространству процессы, диффузионный член в (9) обращается в ноль. В этом случае (9) представляет собой хорошо известное уравнение логистической кривой, описывающее множество процессов как в популяционной биологии (где оно впервые и было введено Ферхюльстом), так и в экономике и социологии. Это уравнение характеризует “динамику экспансии нового фактора”, изначально имеющего почти нулевую величину, а затем асимптотически достигающего стационарного значения (природа фактора может быть самой различной). С одной стороны, уравнение Ферхюльста является самым простым из уравнений такого рода, с другой — известно, что если “новый фактор” достаточно мало отличается от того старого, который он вытесняет, то это уравнение является строгим [5], с третьей — оно нередко хорошо аппроксимирует реальную динамику. Уравнение (9) представляет собой уравнение Ферхюльста, дополненное диффузионными переносами. Возможно и обобщение уравнения Ферхюльста на случай, когда пространство неоднородно:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathrm{div}(D(\mathbf{r})\mathrm{grad}\rho(\mathbf{r}, t)) + a(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}, t)(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r}, t)). \tag{10}$$

Уравнение (10) соответствует тому же производящему функционалу (8) при заданных функциях $D(\mathbf{r})$, $a(\mathbf{r})$ и $\mu = 1$.

Следующий пример явно включает элемент “каркаса”, а именно, является простейшей моделью формирования города на базе железнодорожной станции. Пусть железная дорога проходит по оси x декартовых координат x, y и станция расположена в начале координат.

Определим “цену” поселения одного человека $f(x, y, \rho)$ как функцию координат x, y и плотности населения ρ. Данный параметр является суммой материальных и каким-то образом оцененных в рублях на человека нематериальных затрат. В нашем примере учтем четыре фактора формирования этой цены:

$$f(x, y, \rho) = -a + e\rho/2 + \frac{b}{\sqrt{1 + (y/y_0)^2}} - \frac{c}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)/r_0^2}} = e\rho/2 - g(x, y), \tag{11}$$

где коэффициенты a, b, c, e и геометрические параметры y_0, r_0 — заданные положительные константы. Функция $g(x, y)$ введена, чтобы выделить член, зависящий только от координат, но не от ρ.

Первый член (11) описывает “цену” обычного поселения, которая должна быть отрицательна, чтобы люди селились в этом месте. Иначе говоря, достоинства поселения должны превышать затраты. Второй член — увеличение “цены” с ростом плотности населения, например, из-за перехода к многоэтажному строительству и психологического дискомфорта тесноты. Третий член (11) описывает дискомфорт близости железной дороги, y_0 — характерное расстояние влияния дороги, b — “цена” этого дискомфорта при поселении вблизи дороги. Поскольку близость к станции является положительным фактором, описывающий ее последний член в (11) отрицателен, r_0 — характерное расстояние положительного влияния станции, c — “цена” этого выигрыша при поселении вблизи станции.

Для цены поселения вида (11) функционал имеет вид

$$H = \int (D(\mathrm{grad}\rho)^2/2 + e\rho^2/2 - g(x,y)\rho)\, dxdy \tag{12}$$

и условием стационарности $\delta H = 0$ является уравнение

$$-\mathrm{div}(D\mathrm{grad}\rho) + e\rho = g(x,y). \tag{13}$$

Вообще говоря, нет гарантий, что решением будет неотрицательная функция $\rho(x,y)$, и поэтому к (13) необходимо добавить условие

$$\rho(x,y) > 0. \tag{14}$$

Если значения функции $f(x,y,\rho)$ в некоторой области положительны и на ее границе $\rho > 0$, то положительность решения следует из принципа максимума для уравнения (13). В частном случае при $D = \mathrm{const}$ имеем $\Delta\rho \le 0$, в силу чего положительность ρ следует из невозможности минимума решения уравнения Пуассона внутри области при отрицательной правой части (12). Отметим, что при достаточно больших отрицательных e, что соответствует желанию жить среди людей, будут возникать локальные максимумы плотности населения даже на однородной территории.

При однородном расселении, возможном в случае $g(x,y) = a$ — константа, диффузионный член в (13) обращается в нуль. Тогда решением уравнения (13) является константа

$$\rho_0 = g/e,$$

которая в нашем примере имеет смысл плотности населения вдали от дороги.

Если удалиться от станции, остается лишь зависимость от координаты y, и задача становится одномерной. Тогда уравнение (13) принимает вид

$$-\frac{d}{dy}\left(D\frac{d\rho}{dy}\right) + e\rho = a - \frac{b}{\sqrt{1+(y/y_0)^2}}. \tag{15}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием

$$\rho\,|_{|y|\to\infty} = \rho_0 \tag{16}$$

несложно решить численно.

Поскольку нами не ставится цель решать задачу для всей Земли, выделим некоторую область, поставим на ее границе некоторые условия или сформулируем условия, выполняющиеся на больших расстояниях, например,

$$\rho\,|_{x^2+y^2\to\infty} = \rho_1(y), \tag{17}$$

где $\rho_1(y)$ — построенное выше решение одномерной задачи (15), (16). Использование на бесконечности данной, а не произвольной функции, например константы ρ_0, обеспечивает гладкость решения. Задача вида (13), (17) имеет единственное решение, которое можно найти минимизацией функционала (12) на произвольных функциях, удовлетворяющих (17). Минимум функционала существует и единствен при положительных D, e. Следует оговориться, что в (11) может быть нелинейная и даже немонотонная функция от ρ. Например, при очень малой плотности населения наличие соседей становится положительным фактором, и значит, в (11) должна быть функция, возрастающая не только при больших ρ, но и при малых. При таких зависимостях решение не является единственным.

Мы используем многосеточный метод численного решения, основанный на минимизации функционала (12) [11, 12]. Для иллюстрации проведены расчеты в области $|x| < 3$, $|y| < 3$ при следующих значениях параметров: $a = e = 1$, $b = c = 10$, $y_0 = 0.1$, $r_0 = 0.5$. Заданные значения $a = e = 1$ соответствуют единичной плотности населения вдали от дороги $\rho_0 = 1$, условие $b = c = 10$ означает сильное влияние дороги и станции, которые уравновешивают друг друга в точке станции, расположенной в центре рассматриваемого квадрата. Построенные решения представлены на рис. 1. Поскольку картина симметрична относительно осей, показана только ее верхняя половина. Приведены изолинии с интервалом $\delta\rho$, равным $\rho_0 = 1$ (вдали от дороги). Использовались разные значения коэффициента диффузии D. При $D < 10^{-5}$ решения практически не отличаются от решений без учета диффузии. Приведены также результаты при $D = 0.01$, когда диффузия существенна. Из рисунка видна структура, качественно родственная часто наблюдаемой для реальных городов: высокая плотность вблизи железнодорожной станции, при этом максимум плотности находится на некотором расстоянии от станции, падение плотности населения к окраинам и у железной дороги, особенно вдали от станции.

Рассмотрим более сложный пример, когда рядом со станцией есть некоторая закрытая для поселения зона, пусть круглой формы. Отсутствие потоков населения сквозь эту границу Г соответствует граничному условию

$$-\frac{\partial\rho}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{18}$$

где n — направление по нормали. Если эта зона нейтральна, то она мало влияет на плотность населения в ее окрестности, т. е. проживание вблизи нее не имеет ни пре-

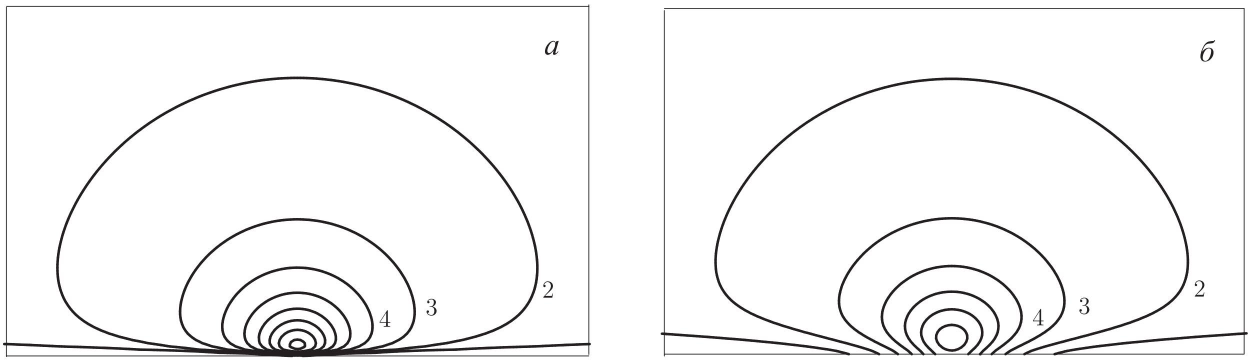

Рис. 1. Распределение плотности населения вокруг станции: *а* — решение без учета диффузии, *б* — решение с учетом диффузии; интервал между изолиниями $\delta\rho$ равен $\rho_0 = 1$ (вдали от дороги)

имуществ, ни недостатков. Если рассматриваемая зона является, например, озером, привлекательным для жителей, то это качество можно учесть, добавив в (11) функцию

$$-\frac{8h}{(1+((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)/r_1^2)^3},$$

где h — "цена" выигрыша при поселении на берегу, r — расстояние от центра озера, имеющего координаты x_1, y_1, r_1 — радиус озера. Показатель степени 3 дает быстрое убывание положительного влияния озера. Следует добавить, что эта функция используется только внутри расчетной области, т. е. вне озера, и поэтому ее максимальное значение равно h. Пусть $h = 2$, $r_1 = 0.5$, а остальные параметры имеют те же значения, что и в предыдущем примере. Краевая задача (13), (16), (18) решалась численно. Полученное распределение плотности населения показано на рис. 2, *а* при малой диффузии $D = 10^{-5}$ и на рис. 2, *б* при том же коэффициенте диффузии $D = 0.01$, что на рис. 1, *б*. Естественно, плотность населения на побережье возрастает.

Можно рассмотреть задачу о распределении населения в городе с фиксированным числом жителей

$$\int \rho(x,y)\ dxdy = N \tag{19}$$

на неограниченной незаселенной территории. В данном случае условием минимума функционала (12) будет уравнение (13) с добавлением произвольной константы в его правой части. Этот произвол устраняется условием (19).

Аналогичный, но более обоснованный анализ, по-видимому, может быть проведен в случае реального влияния инфраструктуры и производств на структуру формирующегося на их базе социума. При этом реальные параметры, входящие в производящий функционал, могут быть верифицированы статистическими методами с учетом реальных данных по эволюции социльно-экономических структур.

Если коэффициенты обживаемости/проницаемости среды переменны по пространству (склоны, лес, водоемы, градостроительные ограничения), то картину можно сделать более реалистичной, а численное моделирование в этом случае (например, если коэффициенты увязаны с картами градостроительного зонирования) дает более полезные результаты.

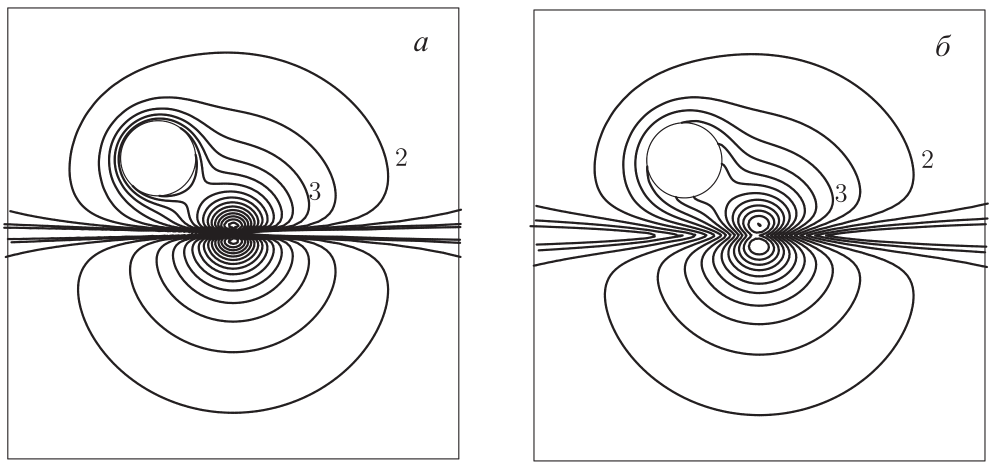

Рис. 2. Распределение плотности населения вокруг станции и озера: *а* — без учета диффузии, *б* — с учетом диффузии; интервал между изолиниями $\delta\rho$ равен $\rho_0/2$

Приведем пример моделирования пространственной структуры, возникающей спонтанно, без "каркаса". Представим себе, что высокая плотность сама по себе невыгодна, однако выгодна доступность соседей. Простейший способ отразить это в терминах производящего функционала — принять для описания невыгодности высокой плотности форму

$$H_1 = -\varepsilon \int \rho(\mathbf{r})^2 d\mathbf{r}, \tag{20}$$

а для описания выгодности доступности соседей — форму

$$H_2 = -\varepsilon \int \rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')(1 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{r_{cr}})d\mathbf{r}d\mathbf{r}'. \tag{21}$$

Согласно (21) выгодность доступности двух точек пропорциональна произведению плотностей в этих точках и линейно падает с ростом расстояния между ними, становясь отрицательной начиная с некоторого критического r_{cr}. Полный функционал будет суммой функционалов (20) и (21) (при минимизации следует задавать также полное количество населения). Его исследование (например, при дополнительном предположении о радиальной симметрии распределения) может быть проведено численными методами. Не рассматривая данный вопрос более подробно, отметим, что при этом максимизация данного функционала "выгодности плотности распределения" дает радиальные структуры с падением плотности к краю и без "каркаса", индуцирующего неоднородность. Минимум данного функционала может быть исследован аналитически в одномерном случае, который соответствует моделям поселений, вытянутых в линию в силу природных или инфраструктурных факторов — реки, дороги и т. п. Соответствующее одномерное распределение имеет форму гауссова пика.

Производящие функционалы позволяют описывать не только влияние природных условий местообитания, но и "эффекты обжитого места". Простейший пример такого учета — функционал вида

$$H(\rho(\mathbf{r}), \rho_0(\mathbf{r})), \tag{22}$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — текущая плотность, а $\rho_0(\mathbf{r})$ — некоторая "предыдущая" плотность. Выбрав явный вид функционала (22) в форме

$$H = \int (\rho(\mathbf{r}) - \rho_0(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r}, \tag{23}$$

получим оценку, которая минимальна в случае совпадения предыдущей и текущей плотностей; при этом при небольших отклонениях оценка растет слабо (появление даже небольших дополнительных факторов, стимулирующих "переселение", вызовет некоторое перераспределение). В случае (23) можно говорить о моделировании "мягкой" привязки к прошлому. Несколько другая форма оценки

$$H = \int |\rho(\mathbf{r}) - \rho_0(\mathbf{r})|\, d\mathbf{r} \tag{24}$$

описывает ситуацию, когда ряд вариантов небольших дополнительных факторов неспособен вызвать какое-либо переселение — в случае (24) имеется "жесткая" привязка к прошлому, когда для индуцирования переселения требуется воздействие, превышающее пороговое.

Метод производящего функционала позволяет комбинировать различные факторы. В простейших случаях это может быть описано линейной суперпозицией частных производящих функционалов.

3. Производящие функционалы на дискретных пространствах. Дополнительные по отношению к плотности расселения переменные

Производящие функционалы могут задаваться не только на непрерывных, но и на дискретных пространствах. Возможны и смешанные случаи. Приведем простейший пример функционала на чисто дискретном пространстве. Пусть имеется N населенных пунктов, характеризуемых численностями населения $P_i, i = 1, \ldots, N$. Обозначим такой набор N чисел как $\{P_i\}$. Наилучшее "с точки зрения социума" распределение численностей может соответствовать минимуму определенной функции численностей

$$H(P_1, ..., P_N) = H(\{P_i\}), \tag{25}$$

играющей в данном случае роль производящего функционала. Следующее обобщение состоит во введении в дополнение к численностям населения переменных, определяющих потоки (различной природы) между населенными пунктами. Величины этих потоков могут характеризоваться переменными $\{X_{ij}^a\}$, описывающими потоки типа a из пункта j в пункт i. Обобщение (25) на случай наличия потоковых переменных ведет к функциям вида

$$H(\{P_i\}, \{X_{ij}^a\}). \tag{26}$$

При этом необходимо иметь зависимости потоков от численностей. Не будем здесь рассматривать возможные интерпретации указанных обобщений, отметим лишь, что варианты ресурсо-потоковых моделей на дискретных пространствах (вне контекста наличия производящих функций) обсуждались в [6].

4. Случаи динамического поведения экономических субъектов без релаксации к стационарному состоянию

Согласно теореме Ляпунова любому движению динамической системы к стационарному состоянию можно сопоставить монотонную минимизацию некоторой функции в пространстве описания системы [3]. Поэтому с принципиальной точки зрения во всех случаях, когда компонента социума имеет тенденцию перехода в устойчивое стационарное состояние, ее поведение (по крайнем мере, структура стационарного состояния) можно описать в терминах производящего функционала. Такой функционал может трактоваться как описывающий "степень близости к социально-экономическому оптимуму".

Однако не все реальные экономические ситуации соответствуют стремлению к стационару. Простейший пример — периодическая схема ресурсопользования, когда в сельском хозяйстве используют смену культур, включая и периоды "отдыха" посевных площадей. Нестационарные ситуации без учета дополнительных факторов (например, рассмотрения в терминах динамической задачи оптимального управления [7]) не допускают естественной формулировки в терминах производящего функционала.

5. Задача оптимального управления при описании самоорганизации элементов социума в терминах производящего функционала

При наличии целевого функционала задача оптимального управления стандартным образом сводится к решению двойственной задачи с последующим определением на базе найденных множителей Лагранжа направления наилучших изменений управляемых параметров (роль которых в нашем случае играют переменные, описывающие "каркас"). Такого рода подходы известны, например, в задаче оптимального расселения людей с учетом экологических факторов [7]. Интересная особенность динамики, допускающей описание в терминах производящего функционала, возникает при двух допущениях:

— рассматриваются только стационарные состояния социума;

— целевой функционал и производящий функционал взаимномонотонны.

В данном случае, как нетрудно показать, множители Лагранжа (переменные двойственной задачи поиска оптимума целевого функционала при условии экстремума производящего функционала) обращаются в ноль. Тем самым можно определять направление улучшения управления, не анализируя сложные косвенные последствия каждой модификации. Это означает, что если цели управления и самопроизвольные цели социума совпадают (т. е. взаимномонотонны), то управление инфраструктурами и схемой размещения производства существенно упрощается. Возможно, именно данное обстоятельство лежит в основе известной идеи замены части процедур управления "воспитанием", меняющим собственные тенденции поведения социума. Аналогичное упрощение имеет место и при наличии нескольких производящих функционалов в случае, если целевой функционал является произвольной монотонной функцией их всех. По-видимому, именно в данном обстоятельстве лежат корни представлений, согласно которым "управление на основе мнений частных субъектов управления" бывает проще и эффективнее.

Возможность формальной интеграции частных предпочтений в общее рассматривалась рядом авторов (включая классическую теорему Эрроу [8]). Не будем воспроизводить соответствующие выводы о том, что не всегда такая интеграция может быть произведена логически оправданным образом. В контексте данной публикации такого рода сложности означают, что в ситуациях управления экономикой следует ориентироваться на случай, когда возможно представление целевого функционала как формальной функции от производящих функционалов подсистем. Естественные условия такой интеграции задает "каркас", определяющий общие для всех субъектов территории направления наилучших изменений управляемых параметров их поведения. Это условия самоорганизации и соорганизации в функциональные (саморазвивающиеся) системы.

С точки зрения формирования механизмов управления долгосрочными стратегиями поведения социальных субъектов представляет интерес предложенная В.Д. Адриановым [9] теория саморегуляции и функциональных экономических систем (ФЭС). По этой теории "В современном рыночном хозяйстве именно государство превращается фактически в мозговой центр, который путем создания ФЭС на различных уровнях регулирует формирование рыночной среды и обеспечивает динамизм и устойчивость экономического развития". Согласно [9] функциональные экономические системы возникают в процессе эволюции социальных институтов. В соответствии с теорией институциональных матриц, предложенных С.Г. Кирдиной [10], для России определяющим фактором саморазвития институциональных форм развития является коммунальный характер материально-технологической среды. В физико-географических и природно-климатических условиях нашей страны, определяющих высокий уровень издержек, поведение социальных субъектов рыночной и редистрибутивной (государственной) экономики решающим образом зависит от уровня развития инфраструктуры производства и жизнеобеспечения и существенно влияет на выбор оптимальных социальных и экономических технологий и управляющих решений. Таким образом, коммунальный характер материально-технологической среды создает условия формальной интеграции производящих функционалов субъектов, которые в соответствии с теоремой Эрроу не являются совершенно произвольными, поскольку содержат общие элементы оптимальной стратегии поведения, опирающейся на использование регионального "каркаса".

На практике часто имеют место ситуации, когда спонтанные ориентиры социума не учитывают стратегический аспект регионального развития, возможности и ограничения регионального "каркаса". К сожалению, данный аспект далеко не всегда удается учесть методами централизованного управления. Ведомственное планирование преобладает над комплексным, а вертикально-интегрированные командно-административные методы управления — над сетевыми и рамочными механизмами соорганизации и регулирования.

Рассмотренные каркасно-континуальные модели в принципе позволяют решать задачи анализа и планирования территориально-распределенной социально-экономической активности, т. е. задачи стратегического, территориального и комплексного планирования регионального развития. В практике регионального управления легитимной основой решения пространственных аспектов данных задач служат схемы территориального планирования регионального и муниципального уровней. При этом соответствующие информационные модели регионального и муниципального "каркасов" систем экономики и жизнеобеспечения совместно с пространственными характеристиками ресурсов развития, ограничений и обременений создаются с использованием геоинформационных систем. В государственном управлении развиваются системы показателей бюджетирования, ориентированного на результат, и индикативного планирования, которые формализуют числовые характеристики элементов регионального каркаса и основных субъектов социально-экономической действительности. Все это создает предпосылки для переноса существующих математических моделей и численных методов исследования процессов развития популяций, переноса-диффузии примесей и др. в область новых актуальных задач согласованного стратегического (социально-экономического) и территориального (градостроительного, каркасного) планирования регионального развития с учетом пространственного анализа предпочтений социальных субъектов территории.

Таким образом, предложенные каркасно-континуальные модели представляют интерес для исследования функциональных экономических систем, обеспечивающих поддержание и развитие регионального "каркаса", соответствующих институтов отраслевого и комплексного планирования, задач территориального планирования, стратегического управления и регулирования деятельности субъектов регионального развития.

Список литературы

[1] Охонин В.А. Метод кинетических уравнений в динамике популяций // Математическое моделирование в биологии и химии. Новые подходы. Новосибирск: Наука, 1992. С. 3–36.

[2] Горбань А.Н., Садовский М.Г. Оптимизационные модели пространственного распределения: Эффект Олли // Журнал общей биологии. 1989. Т. 50, № 1. С. 66.

[3] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Непрерывные и дискретные детерминированные системы // Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.

[4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Лань, 2006. 590 с.

[5] Горбань А.Н., Хлебопрос Р.Г. Демон Дарвина: Идея оптимальности и естественный отбор. М.: Наука, 1988. 208 с.

[6] Елгин Б.А. Модели потокораспределения на графах: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, ИВМ СО РАН, 2000. 24 с.

[7] Понтрягин Л.С. Принцип максимума. М.: Наука, 1998. 70 с.

[8] Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. N.Y.: Wiley, 1951.

[9] Адрианов В.Д. Эволюция основных концепций государственного регулирования экономики (от теории меркантилизма до теории функциональных экономических систем). http://viperson.ru/wind.php?ID=269185&soch=1

[10] Кирдина С.Г. Модели экономики в теории институциональных матриц // Экономическая наука современной России. 2007. № 2(37). С. 34–51.
http://kirdina.ru/doc/20jul07/1.doc

[11] Denisenko V.V., Zamay S.S. Electric field in the equatorial ionosphere // Planetary and Space Sci. 1992. Vol. 40, No. 7. P. 941–952.

[12] Замай С.С., Якубайлик О.Э. Модели оценки и прогноза загрязнений атмосферы промышленными выбросами в информационно-аналитической системе природоохранных служб крупного города. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1998. 168 с.

[13] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.

Поступила в редакцию 5 июля 2010 г.,
с доработки — 28 апреля 2011 г.