

О совместном движении бинарной смеси и вязкой жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе*

Н. Л. СОБАЧКИНА

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
e-mail: sobachkinanat@mail.ru*

Изучено инвариантное решение задачи о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе. Движение происходит под действием продольного градиента давления в смеси. Вязкая жидкость (смазка) и смесь не смешиваются и имеют общую поверхность раздела. Задача сводится к сопряженной начально-краевой задаче для параболических уравнений. Найдено стационарное решение задачи, в котором поля скоростей являются такими же, как у течения Пуайзеля, а температура и концентрация являются полиномами четвертого порядка по радиальной координате. Нестационарная задача решена методом преобразования Лапласа. Численные расчеты показали, что решение этой задачи сходится к стационарному распределению при $t \rightarrow \infty$, если градиент давления стабилизируется по времени на бесконечности.

Ключевые слова: бинарная смесь, цилиндрическая труба, стационарное решение.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению уравнений совместного движения бинарной смеси и вязкой жидкости с общей поверхностью раздела с учетом эффекта термодиффузии и нестационарного перепада давления. Эта подмодель возникает при изучении движений смесей в достаточно длинных цилиндрических слоях.

Термодиффузией называют молекулярный перенос вещества, связанный с наличием в среде (жидком растворе или газовой смеси) градиента температуры. При термодиффузии концентрация компонентов в областях повышенной и пониженной температуры различна.

В [1, 2] рассматривалось однонаправленное движение вязкой жидкости в круглой трубе. В данных работах определение поля скорости сводится к решению линейной начально-краевой задачи для параболического уравнения. При этом решение находится в виде конечных формул (например, стационарное течение Пуазейля) либо в виде рядов по функциям Бесселя. Движение бинарной смеси в слое между двумя коаксиальными цилиндрами с различной температурой с учетом эффекта термодиффузии (эффект Соре) изучалось в [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-299.2009.1 и РФФИ (грант № 08-01-00762).

В [4] приводится постановка начально-краевой задачи, описывающей движение двух несмешивающихся теплопроводных вязких жидкостей с общей поверхностью раздела. В основном эта работа посвящена изучению устойчивости соответствующих движений. В [5–7] дана постановка задачи и выведены уравнения малых возмущений произвольных гладких движений жидкости с общей поверхностью раздела. При этом учитывается эффект термодиффузии.

Сопряженная начально-краевая задача, возникающая при совместном движении двух бинарных смесей с общей границей раздела в плоских и цилиндрических слоях, анализировалась в ряде работ [8–14], где были найдены стационарные и нестационарные решения при заданной температуре твердой стенки, получены априорные оценки возмущений скорости, температуры и концентрации и показано, что при $t \rightarrow \infty$ эти возмущения выходят на стационарный режим.

В настоящей работе изучается сопряженная начально-краевая задача, возникающая при однонаправленном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости с общей поверхностью раздела в теплоизолированной цилиндрической трубе под действием градиента давления в смеси. Цель работы состоит в исследовании инвариантного решения поставленной задачи, построении точных решений, а также численном решении задачи.

1. Постановка задачи

Уравнения термодиффузионного движения при отсутствии массовых сил в цилиндрической системе координат r, φ, z имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + \frac{v}{r} u_\varphi + wu_z - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} p_r + \nu \left(\Delta u - \frac{2}{r^2} v_\varphi - \frac{u}{r^2} \right), \\ v_t + uv_r + \frac{v}{r} v_\varphi + wv_z + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} p_\varphi + \nu \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} u_\varphi - \frac{v}{r^2} \right), \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r} w_\varphi + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z + \nu \Delta w, \\ u_r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v_\varphi + w_z &= 0, \\ \theta_t + u\theta_r + \frac{v}{r} \theta_\varphi + w\theta_z &= \chi \Delta \theta, \\ c_t + uc_r + \frac{v}{r} c_\varphi + wc_z &= d \Delta c + \alpha d \Delta \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w — проекции вектора скорости на оси r, φ, z соответственно; p — давление; θ, c — отклонения температуры и концентрации от их равновесных значений θ_0, c_0 ; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; χ — температуропроводность; d — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии (нормальной термодиффузии соответствуют значения $\alpha < 0$, аномальной — $\alpha > 0$); $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial/\partial \varphi^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа.

Система (1) допускает двухпараметрическую подгруппу непрерывных преобразований, порождаемую операторами

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} + A \frac{\partial}{\partial \theta} + B \frac{\partial}{\partial c} - \rho f(t) \frac{\partial}{\partial p},$$

где A, B — постоянные, $f(t) \in C^\infty$ — произвольная функция [15]. Инвариантное решение надо искать в виде

$$u = u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad w = w(r, t), \quad p = -\rho f(t)z + \mathcal{D}(r, t), \\ \theta = Az + T(r, t), \quad c = Bz + K(r, t).$$

Из четвертого уравнения системы (1) следует, что $u(r, t) = g(t)/r$, где $g(t)$ — некоторая функция. Далее положим $g(t) = 0$. Кроме того, предположим, что и $v(r, t) \equiv 0$. Тогда из первого уравнения системы (1) видно, что \mathcal{D} есть функция только времени, $\mathcal{D}(r, t) \equiv \mathcal{D}(t)$, и представление решения в этом случае имеет вид

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(r, t), \quad p = -\rho f(t)z + \mathcal{D}(t), \\ \theta = Az + T(r, t), \quad c = Bz + K(r, t). \quad (2)$$

Применим решение (2) для описания однонаправленного движения бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в круглой цилиндрической трубе радиуса b . Пусть смесь занимает область $0 \leq r \leq a$, $|z| < \infty$, а вязкая жидкость — цилиндрический слой $a \leq r \leq b$, $|z| < \infty$, где $w_j(r, t)$ — осевая скорость ($j = 1, 2$), $p_j = -\rho_j f_j(t)z + \mathcal{D}_j(t)$ — давление, $\theta_j = A_j z + T_j(r, t)$ — распределение температуры, $c_1 = B_1 z + K(r, t)$ — распределение концентрации в смеси (рис. 1). Здесь $j = 1$ соответствует слою смеси, $j = 2$ — слою вязкой жидкости. Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела $r = a$ линейно зависит от температуры и концентрации

$$\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \sigma_\theta(\theta - \theta_0) - \sigma_c(c - c_0), \quad (3)$$

где $\sigma_\theta > 0$ — температурный коэффициент, σ_c — концентрационный коэффициент (обычно $\sigma_c < 0$, поскольку поверхностное натяжение увеличивается с ростом концентрации), θ_0, c_0 — некоторые постоянные средние значения.

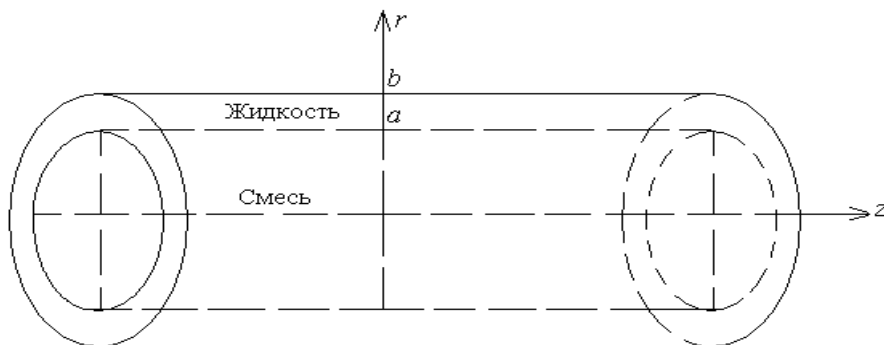


Рис. 1. Схема области течения

На поверхности раздела при $r = a$ выполнены следующие условия [4]:

$$\begin{aligned} w_1(a, t) = w_2(a, t), \quad T_1(a, t) = T_2(a, t), \\ k_1 T_{1r}(a, t) = k_2 T_{2r}(a, t), \quad K_r(a, t) + \alpha_1 T_{1r}(a, t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 \equiv A, \quad f_2(t) = \rho f_1(t) - \frac{h}{\rho_2 a}, \\ \mathcal{D}_2(t) = \mathcal{D}_1(t) + \frac{1}{a} [\sigma_0 - \sigma_\theta (T_1(a, t) - \theta_0) - \sigma_c (K(a, t) - c_0)], \\ h \equiv -\sigma_\theta A - \sigma_c B_1, \quad \rho = \rho_1 / \rho_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mu_2 w_{2r}(a, t) - \mu_1 w_{1r}(a, t) = h, \quad (6)$$

где k_j — коэффициенты теплопроводности смеси и жидкости.

Граничные условия на твердой стенке при $r = b$

$$w_2(b, t) = 0, \quad T_{2r}(b, t) = 0, \quad (7)$$

т. е. твердая стенка является теплоизолированной.

На оси симметрии ставятся условия ограниченности

$$|w_1(0, t)| < \infty, \quad |T_1(0, t)| < \infty, \quad |K(0, t)| < \infty. \quad (8)$$

В начальный момент времени $t = 0$ в жидкости и смеси внезапно возникают распределения температур $\theta_j = A_j z$ и концентрации $c_1 = B_1 z$. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$w_j(r, 0) = 0, \quad T_j(r, 0) = 0, \quad K(r, 0) = 0. \quad (9)$$

Выпишем уравнения на искомые функции w_j, T_j, K :

$$w_{jt} = f_j(t) + \nu_j \left(w_{jrr} + \frac{1}{r} w_{jr} \right), \quad (10)$$

$$T_{jt} = \chi_j \left(T_{jrr} + \frac{1}{r} T_{jr} \right) - A w_j, \quad (11)$$

$$K_t = d_1 \left(K_{rr} + \frac{1}{r} K_r \right) + \alpha_1 d_1 \left(T_{1rr} + \frac{1}{r} T_{1r} \right) - B_1 w_1. \quad (12)$$

В (10)–(12) переменная r при $j = 1$ изменяется в пределах от 0 до a , а при $j = 2$ — от a до b . Таким образом, надо решить задачу (10)–(12) с граничными условиями (4), (6)–(8) и начальными условиями (9). В этом случае давление восстанавливается по формулам $p_j(r, t) = -\rho_j f_j(t) z + \mathcal{D}_j(t)$, причем функции $f_1(t), f_2(t)$ и $\mathcal{D}_1(t), \mathcal{D}_2(t)$ связаны равенствами (5) и должны задаваться $f_1(t)$ и $\mathcal{D}_1(t)$.

Замечание. Далее ищется классическое решение, т. е. при $f_j \in C[0, t_0]$ искомые функции $w_j, T_j, K \in C^1[0, t_0]$ по переменной t , $w_1, T_1, K \in C^2(0, a) \cap C^1(0, a)$, $w_2, T_2 \in C^2(a, b) \cap C^1(a, b) \cap C(a, b)$ по переменной r .

2. Стационарное решение

Для стационарного решения все искомые функции не зависят от времени; обозначим их через $w_j^0(r)$, $T_j^0(r)$, $K^0(r)$. Кроме того, $f_1(t) = f_1^0 = \text{const}$, $\mathcal{D}_1(t) = \mathcal{D}_1^0 = \text{const}$. Выпишем соответствующую краевую задачу:

при $0 < r < a$

$$w_1^{0''} + \frac{1}{r} w_1^{0'} = -\frac{f_1^0}{\nu_1}, \quad (13)$$

$$T_1^{0''} + \frac{1}{r} T_1^{0'} = \frac{A}{\chi_1} w_1^0, \quad (14)$$

$$K^{0''} + \frac{1}{r} K^{0'} = \left(\frac{B_1}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) w_1^0, \quad (15)$$

$$|w_1^0(0)| < \infty, \quad |T_1^0(0)| < \infty, \quad |K^0(0)| < \infty, \quad (16)$$

при $a < r < b$

$$w_2^{0''} + \frac{1}{r} w_2^{0'} = -\frac{f_2^0}{\nu_2}, \quad (17)$$

$$T_2^{0''} + \frac{1}{r} T_2^{0'} = \frac{A}{\chi_2} w_2^0, \quad (18)$$

$$w_2^0(b) = 0, \quad T_2^{0'}(b) = 0, \quad (19)$$

$$\mu_2 w_2^0(a) - \mu_1 w_1^0(a) = h, \quad w_1^0(a) = w_2^0(a),$$

$$T_1^0(a) = T_2^0(a), \quad k_1 T_1^{0'}(a) = k_2 T_2^{0'}(a),$$

$$K^0(a) + \alpha_1 T_1^{0'}(a) = 0, \quad (20)$$

причем согласно (5)

$$f_2^0 = \rho f_1^0 - \frac{h}{\rho_2 a}, \quad (21)$$

$$\mathcal{D}_2^0 = \mathcal{D}_1^0 + \frac{1}{a} [\sigma_0 - \sigma_\theta (T_1^0(a) - \theta_0) - \sigma_c (K^0(a) - c_0)]. \quad (22)$$

Общие решения систем (13)–(18) легко находятся (учтены условия ограниченности (16)) в виде

$$w_1^0 = C_1 - \frac{f_1^0 r^2}{4\nu_1}, \quad T_1^0 = \frac{A}{\chi_1} \left(\frac{C_1 r^2}{4} - \frac{f_1^0 r^4}{64\nu_1} \right) + C_2,$$

$$K^0 = \left(\frac{B_1}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) \left(\frac{C_1 r^2}{4} - \frac{f_1^0 r^4}{64\nu_1} \right) + C_3,$$

$$w_2^0 = -\frac{f_2^0 r^2}{4\nu_2} + C_4 \ln r + C_5,$$

$$T_2^0 = \frac{A}{\chi_2} \left[\frac{C_4 r^2}{4} (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4} - \frac{f_2^0 r^4}{64\nu_2} \right] + C_6 \ln r + C_7$$

с постоянными C_1, \dots, C_7 , которые определяются из граничных условий (19), (20) и имеют следующие представления:

$$C_1 = C_4 \ln a + C_5 + \frac{a^2}{4} \left(\frac{f_1^0}{\nu_1} - \frac{f_2^0}{\nu_2} \right) = \frac{ah}{2\mu_2} \ln \frac{a}{b} + \frac{1}{4} \left[\frac{a^2 f_1^0}{\nu_1} + \frac{(b^2 - a^2) f_2^0}{\nu_2} \right], \quad (23)$$

$$C_2 = C_7 + C_6 \ln a + \frac{Aa^2}{4\chi_1} \left\{ \frac{a^2 f_1^0}{16\nu_1} - C_1 + \chi \left[C_4 (\ln a - 1) + C_5 - \frac{a^2 f_2^0}{16\nu_2} \right] \right\}, \quad (24)$$

$$C_4 = \frac{ah}{2\mu_2}, \quad C_5 = \frac{b^2 f_2^0}{4\nu_2} - \frac{ah}{2\mu_2} \ln b, \quad (25)$$

$$C_6 = \frac{Ab^2}{8\chi_2} \left(\frac{ah}{\mu_2} - \frac{b^2 f_2^0}{2\nu_2} \right). \quad (26)$$

Граничное условие $K^{0'}(a) + \alpha_1 T_1^{0'}(a) = 0$ эквивалентно соотношению

$$B_1 \left(C_1 - \frac{a^2 f_1^0}{8\nu_1} \right) = 0. \quad (27)$$

Заметим, что из (23) $C_1 \neq a^2 f_1^0 / 8\nu_1$, поэтому из (27) следует, что $B_1 = 0$. *Итак, стационарное распределение возмущения концентрации имеет место только при отсутствии ее градиента вдоль оси цилиндра.*

Постоянную C_3 можно найти, если задать среднюю концентрацию в сечении $z = 0$, т. е. $\int_0^a r K^0(r) dr = 0$. Отсюда при $B_1 = 0$

$$C_3 = \frac{\alpha_1 f_1^0 a^2 A}{192\chi_1 \nu_1} [6\mu(b^2 - a^2) + 5a^2]. \quad (28)$$

Что касается постоянной C_7 , то она остается произвольной, так как в условия для T_2^0 входят только производные.

Далее предполагается $h = 0$, т. е. *рассматривается движение только под действием перепада давления.* Приведем вид стационарного решения при $h = 0$, $f_2^0 = \rho f_1^0$:

$$\begin{aligned} w_1^0 &= \frac{f_1^0}{4\nu_1} \left[(b^2 - a^2)\mu + a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right], \quad w_2^0 = \frac{f_1^0 b^2 \mu}{4\nu_1} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right), \quad \mu = \mu_1 / \mu_2, \\ T_1^0 &= \frac{Ar^2 f_1^0}{16\chi_1 \nu_1} \left[a^2 + \mu(b^2 - a^2) - \frac{r^2}{4} \right] + C_2, \\ T_2^0 &= \frac{Ar^2 \rho f_1^0}{16\chi_2 \nu_2} \left(b^2 - \frac{r^2}{4} \right) + C_6 \ln r + C_7, \\ K^0 &= -\frac{\alpha_1 Ar^2 f_1^0}{16\chi_1 \nu_1} \left[a^2 + \mu(b^2 - a^2) - \frac{r^2}{4} \right] + C_3, \end{aligned} \quad (29)$$

где постоянные C_2 , C_6 определяются формулами (24), (26), в которых следует принять $h = 0$, $f_2^0 = \rho f_1^0$.

Построим стационарные профили скоростей, температур и концентрации. Для этого необходимо перейти к безразмерным переменным, определяемым формулами

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad \tilde{w}_j^0 = \frac{4\nu_1}{f_1^0 a^2} w_j^0, \quad \tilde{T}_j^0 = \frac{16\chi_1 \nu_1}{A f_1^0 a^4} T_j^0, \quad \tilde{K}^0 = \frac{16\chi_1 \nu_1}{\alpha_1 A f_1^0 a^4} K^0. \quad (30)$$

Основными критериями подобия в рассматриваемой задаче являются

$$\rho = \rho_1 / \rho_2, \quad \nu = \nu_1 / \nu_2, \quad \chi = \chi_1 / \chi_2, \quad k = k_1 / k_2, \quad (31)$$

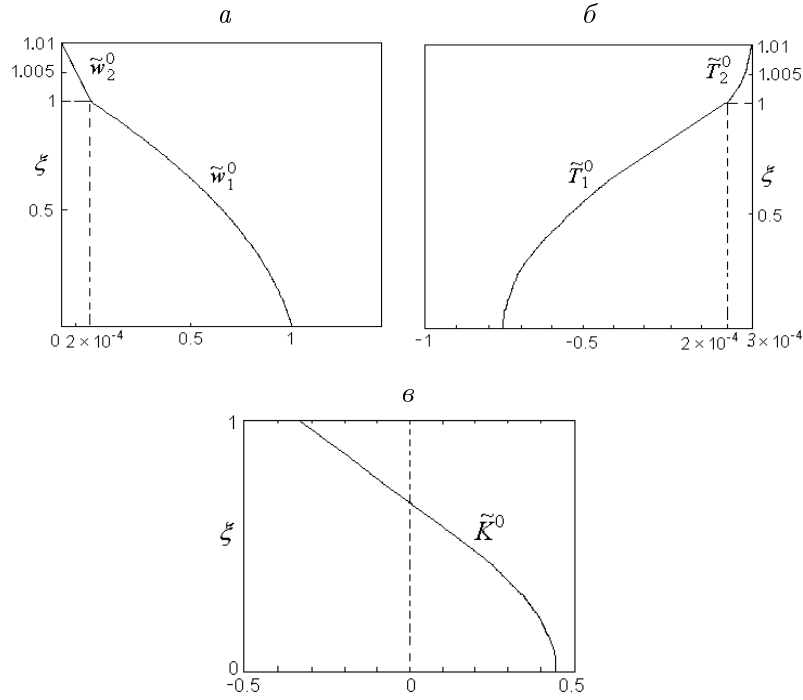


Рис. 2. Стационарные профили скоростей (а), температур (б) и концентрации (в)

где ρ, ν, χ, k — отношения соответствующих физических параметров смеси и вязкой жидкости.

Стационарные профили скоростей, температур и концентрации представлены на рис. 2. В расчетах использовались следующие значения параметров: $b = 1.01$, $a = 1.0$, $\rho = 0.5$, $\nu = 0.02$, $\chi = 0.01$, $k = 0.5$. Так как слой вязкой жидкости достаточно тонкий по сравнению со слоем бинарной смеси, то масштаб на осях координат выбирается различным образом. Из рисунка видно, что поля скоростей для стационарного движения будут такими же, как у течения Пуайзеля.

3. Решение нестационарной задачи

Для решения нестационарной задачи применяется метод преобразования Лапласа.

Можно видеть, что при заданных $f_1(t)$, $\mathcal{D}_1(t)$ задачи для скоростей w_1, w_2 , температур T_1, T_2 и концентрации K решаются последовательно. Начально-краевая задача для функций $w_j(r, t)$ имеет вид

$$w_{1t} = \nu_1 \left(w_{1rr} + \frac{1}{r} w_{1r} \right) + f_1(t), \quad 0 < r < a, \quad (32)$$

$$w_{2t} = \nu_2 \left(w_{2rr} + \frac{1}{r} w_{2r} \right) + f_2(t), \quad a < r < b, \quad (33)$$

$$w_1(r, 0) = 0, \quad w_2(r, 0) = 0, \quad (34)$$

$$w_1(a, t) = w_2(a, t), \quad \mu_2 w_{2r}(a, t) - \mu_1 w_{1r}(a, t) = 0, \quad (35)$$

$$|w_1(0, t)| < \infty, \quad w_2(b, t) = 0. \quad (36)$$

Положим (при условии существования $\tilde{f}_j, \tilde{w}_j, \tilde{w}_{jr}, \tilde{w}_{jrr}$)

$$\tilde{w}_j(r, p) = \int_0^\infty w_j(r, t) e^{-pt} dt. \quad (37)$$

Тогда задача (32)–(36), где $f_2 = \rho f_1$, сводится к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1rr} + \frac{1}{r} \tilde{w}_{1r} - \frac{p}{\nu_1} \tilde{w}_1 &= -\frac{\tilde{f}_1(p)}{\nu_1}, \quad 0 < r < a, \\ \tilde{w}_{2rr} + \frac{1}{r} \tilde{w}_{2r} - \frac{p}{\nu_2} \tilde{w}_2 &= -\frac{\tilde{f}_2(p)}{\nu_2}, \quad a < r < b, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\tilde{w}_1(a, p) = \tilde{w}_2(a, p), \quad \mu_2 \tilde{w}_{2r}(a, p) = \mu_1 \tilde{w}_{1r}(a, p), \quad (39)$$

$$|\tilde{w}_1(0, p)| < \infty, \quad \tilde{w}_2(b, p) = 0. \quad (40)$$

Общие решения уравнений (38) легко выписать:

$$\tilde{w}_1 = C_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right) + \frac{\tilde{f}_1(p)}{p}, \quad (41)$$

$$\tilde{w}_2 = C_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) + C_3 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) + \frac{\tilde{f}_2(p)}{p}. \quad (42)$$

Из граничных условий (39), (40) получим

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -\frac{\tilde{f}_2}{p} & I_0(z) & K_0(z) \\ \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1}{p} & -I_0(y) & -K_0(y) \\ 0 & -I_1(y) & K_1(y) \end{vmatrix}, \quad (43)$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\tilde{f}_2}{p} & K_0(z) \\ I_0(x) & \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1}{p} & -K_0(y) \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} I_1(x) & 0 & K_1(y) \end{vmatrix}, \quad (44)$$

$$C_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & -\frac{\tilde{f}_2}{p} \\ I_0(x) & -I_0(y) & \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1}{p} \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} I_1(x) & -I_1(y) & 0 \end{vmatrix}, \quad (45)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & I_0(z) & K_0(z) \\ I_0(x) & -I_0(y) & -K_0(y) \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} I_1(x) & -I_1(y) & K_1(y) \end{vmatrix}, \quad (46)$$

где $\mu = \mu_1/\mu_2$, $\nu = \nu_1/\nu_2$, $x = a\sqrt{p/\nu_1}$, $y = a\sqrt{p/\nu_2}$, $z = b\sqrt{p/\nu_2}$, I_j , K_j — функции Бесселя первого и третьего рода мнимого аргумента.

Начально-краевая задача для функций $T_j(r, t)$ имеет вид

$$T_{1t} = \chi_1 \left(T_{1rr} + \frac{1}{r} T_{1r} \right) - Aw_1(r, t), \quad 0 < r < a, \quad (47)$$

$$T_{2t} = \chi_2 \left(T_{2rr} + \frac{1}{r} T_{2r} \right) - Aw_2(r, t), \quad a < r < b, \quad (48)$$

$$T_1(a, t) = T_2(a, t), \quad k_1 T_{1r}(a, t) = k_2 T_{2r}(a, t), \quad (49)$$

$$T_{2r}(b, t) = 0, \quad |T_1(0, t)| < \infty, \quad (50)$$

$$T_1(r, 0) = 0, \quad T_2(r, 0) = 0. \quad (51)$$

Применение преобразования Лапласа к этой задаче сводит ее к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tilde{T}_{1rr} + \frac{1}{r} \tilde{T}_{1r} - \frac{p}{\chi_1} \tilde{T}_1 = \frac{A}{\chi_1} \tilde{w}_1, \quad 0 < r < a, \quad (52)$$

$$\tilde{T}_{2rr} + \frac{1}{r} \tilde{T}_{2r} - \frac{p}{\chi_2} \tilde{T}_2 = \frac{A}{\chi_2} \tilde{w}_2, \quad a < r < b, \quad (53)$$

$$\tilde{T}_1(a, p) = \tilde{T}_2(a, p), \quad k \tilde{T}_{1r}(a, p) = \tilde{T}_{2r}(a, p), \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad (54)$$

$$\tilde{T}_{2r}(b, p) = 0, \quad |\tilde{T}_1(0, p)| < \infty. \quad (55)$$

Здесь $\tilde{w}_1(r, p)$, $\tilde{w}_2(r, p)$ находятся по формулам (41)–(46). Общие решения уравнений (52), (53) при $\nu_1 \neq \chi_1$, $\nu_2 \neq \chi_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(r, p) &= D_1 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} r \right) - \frac{A \tilde{f}_1(p)}{p^2} - \frac{AC_1}{p\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)} I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r \right), \\ \tilde{T}_2(r, p) &= D_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} r \right) + D_3 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} r \right) - \frac{A \tilde{f}_2(p)}{p^2} - \\ &- \frac{AC_2}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)} I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right) - \frac{AC_3}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)} K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r \right), \end{aligned} \quad (56)$$

т. е. числа Прандтля смеси и жидкости не равны единице. Из граничных условий (54), (55) получим

$$D_1 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} H_1 & -I_0(y_1) & -K_0(y_1) \\ H_2 & \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} I_1(z_1) & -\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} K_1(z_1) \\ H_3 & -\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} I_1(y_1) & \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} K_1(y_1) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} I_0(x_1) & H_1 & -K_0(y_1) \\ 0 & H_2 & -\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} K_1(z_1) \\ k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} I_1(x_1) & H_3 & \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} K_1(y_1) \end{vmatrix}, \\
 D_3 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} I_0(x_1) & -I_0(y_1) & H_1 \\ 0 & \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} I_1(z_1) & H_2 \\ k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} I_1(x_1) & -\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} I_1(y_1) & H_3 \end{vmatrix}, \\
 \Delta_1 &= \begin{vmatrix} I_0(x_1) & -I_0(y_1) & -K_0(y_1) \\ 0 & \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} I_1(z_1) & -\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} K_1(z_1) \\ k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} I_1(x_1) & -\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} I_1(y_1) & \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} K_1(y_1) \end{vmatrix}, \tag{57}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a\sqrt{p/\chi_1}, \quad y_1 = a\sqrt{p/\chi_2}, \quad z_1 = b\sqrt{p/\chi_2}, \\
 H_1 &= \frac{A(\tilde{f}_1(p) - \tilde{f}_2(p))}{p^2} + \frac{AC_1}{p\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)} I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} a\right) - \\
 &\quad - \frac{AC_2}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)} I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} a\right) - \frac{AC_3}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)} K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} a\right), \\
 H_2 &= \frac{AC_2}{\sqrt{p}\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)\sqrt{\nu_2}} I_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} b\right) - \frac{AC_3}{\sqrt{p}\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)\sqrt{\nu_2}} K_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} b\right), \\
 H_3 &= \frac{kAC_1}{\sqrt{p}\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)\sqrt{\nu_1}} I_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} a\right) - \\
 &\quad - \frac{AC_2}{\sqrt{p}\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)\sqrt{\nu_2}} I_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} a\right) + \frac{AC_3}{\sqrt{p}\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)\sqrt{\nu_2}} K_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} a\right). \tag{58}
 \end{aligned}$$

Если $\nu_1 = \chi_1$, $\nu_2 = \chi_2$, то решение (3) надо изменить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_1(r, p) &= D_1 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r\right) - \frac{A\tilde{f}_1(p)}{p^2} + \frac{AC_1 r}{2\sqrt{p/\nu_1}\chi_1} I_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} r\right), \\
 \tilde{T}_2(r, p) &= D_2 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r\right) + D_3 K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r\right) - \frac{A\tilde{f}_2(p)}{p^2} + \\
 &\quad + \frac{AC_2 r}{2\sqrt{p/\nu_2}\chi_2} I_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r\right) - \frac{AC_3 r}{2\sqrt{p/\nu_2}\chi_2} K_1\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} r\right). \tag{59}
 \end{aligned}$$

Начально-краевая задача для функции $K(r, t)$ имеет вид

$$K_t = d_1 \left(K_{rr} + \frac{1}{r} K_r \right) + \frac{\alpha_1 d_1}{\chi_1} T_{1t} + \frac{A\alpha_1 d_1}{\chi_1} w_1, \tag{60}$$

$$K(r, 0) = 0, \quad (61)$$

$$K_r(a, t) + \alpha_1 T_{1r}(a, t) = 0, \quad (62)$$

$$|K(0, t)| < \infty. \quad (63)$$

Применяя к задаче (60)–(63) преобразование Лапласа, получим для изображения $\tilde{K}(r, p)$ задачу

$$\tilde{K}_{rr} + \frac{1}{r} \tilde{K}_r - \frac{p}{d_1} \tilde{K} = -\frac{\alpha_1 p}{\chi_1} \tilde{T}_1 - \frac{A\alpha_1}{\chi_1} \tilde{w}_1 \equiv F(r, p), \quad 0 < r < a, \quad (64)$$

$$\tilde{K}_r(a, p) + \alpha_1 \tilde{T}_{1r}(a, p) = 0, \quad (65)$$

$$|\tilde{K}(0, p)| < \infty. \quad (66)$$

Решение уравнения (64) с учетом (66) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{K}(r, p) = & L_1 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} r\right) + \\ & + \int_0^r y F(y, p) \left[I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} r\right) K_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} y\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} y\right) K_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} r\right) \right] dy \end{aligned} \quad (67)$$

с постоянной L_1 , определяемой из граничного условия (65):

$$\begin{aligned} L_1 = & - \left[I_1\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} a\right) \right]^{-1} \left\{ \int_0^a y F(y, p) \left[I_1\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} a\right) K_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} y\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} y\right) K_1\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}} a\right) \right] dy + \alpha_1 \sqrt{\frac{d_1}{p}} \tilde{T}'_1(a, p) \right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

С помощью полученных формул для изображений показывается, что если $\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = f_1^0 = \text{const} \neq 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_j(r, t) = w_j^0(r), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_j(r, t) = T_j^0(r), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(r, t) = K^0(r),$$

где $w_j^0(r), T_j^0(r), K^0(r)$ — суть стационарное решение (29). Последний предел имеет место только при $B_1 = 0$ [13].

Таким образом, если градиент давления имеет ненулевой предел при $t \rightarrow \infty$, то возмущения скоростей, температур и концентрации стремятся к стационарному распределению. Иначе говоря, поля скоростей в пределе будут такими же, как у течения Пуайзеля, а температура и концентрация являются полиномами четвертого порядка по радиальной координате.

Полученные формулы в изображениях по Лапласу были использованы для численного нахождения полей скоростей, температур и концентрации при заданном перепаде давления в смеси. Численные расчеты проводились в безразмерных переменных, определяемых формулой (30), при этом безразмерное время вводилось соотношением $\tau = \frac{\nu_1}{a^2} t$. Для нестационарной задачи критерии подобия (31) дополнялись следующими:

$$\text{Pr}_1 = \nu_1/\chi_1, \quad \text{Pr}_2 = \nu_2/\chi_2, \quad \text{Sc}_1 = \nu_1/d_1,$$

где Pr_1, Pr_2 — числа Прандтля смеси и жидкости, Sc_1 — число Шмидта смеси.

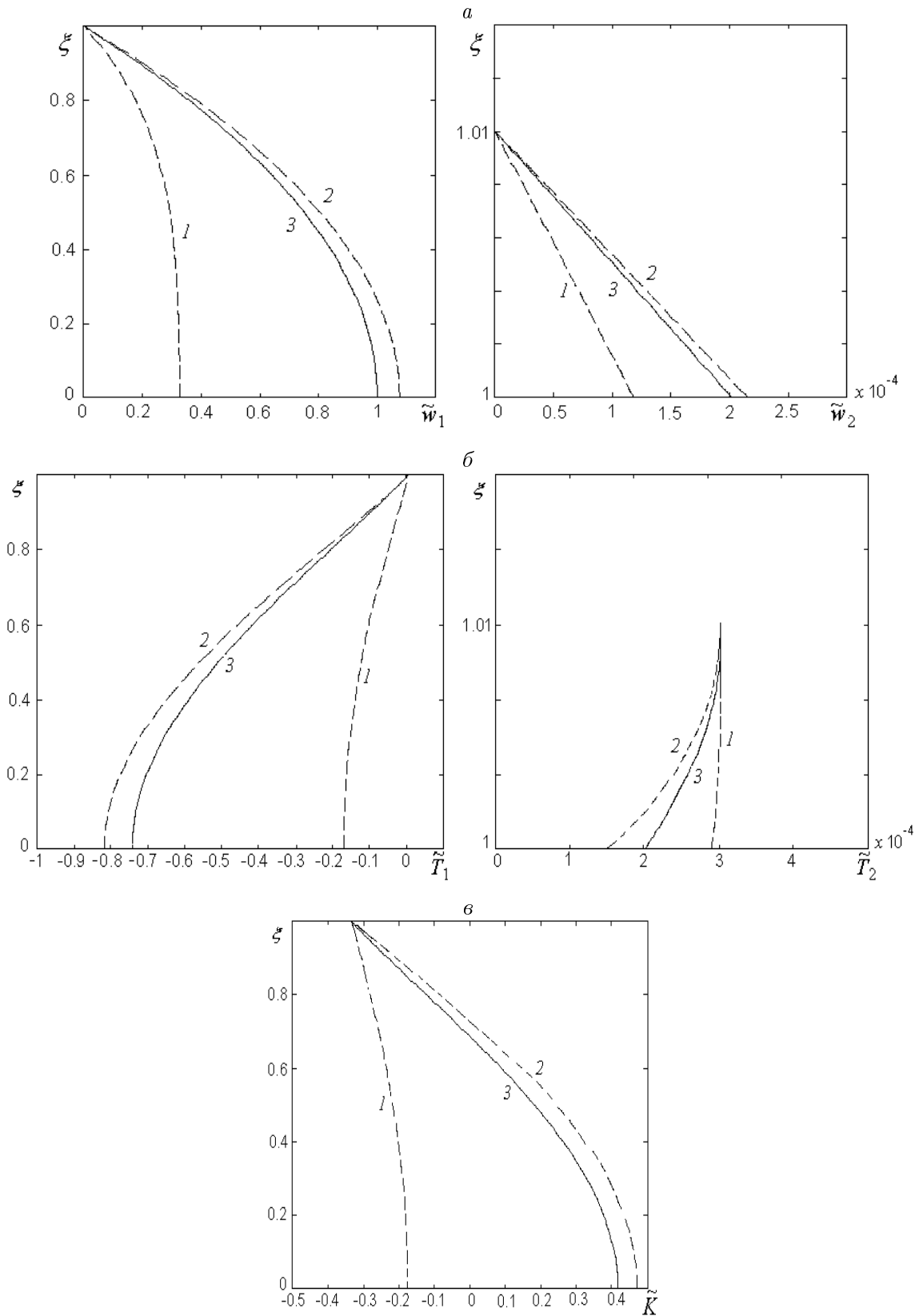


Рис. 3. Профили скоростей (а), температур (б) и концентрации (в) в различные моменты времени: а — $\tau = 0.08$ (1), $\tau = 2.5$ (2), $\tau = \infty$ (3); б — $\tau = 0.08$ (1), $\tau = 0.5$ (2), $\tau = \infty$ (3); в — $\tau = 0.08$ (1), $\tau = 2.5$ (2), $\tau = \infty$ (3)

Результаты численного обращения преобразования Лапласа, приведенные на рис. 3, подтверждают выход решения рассматриваемой задачи на стационарный режим (29). В расчетах использовались следующие значения параметров: $b = 1.01$, $a = 1.0$, $\rho = 0.5$, $\nu = 0.02$, $\chi = 0.01$, $k = 0.5$, $Pr_1 = 0.2$, $Pr_2 = 1.4$, $Sc_1 = 0.5$, $f_1(t) = 1 + \exp(-\lambda t) \sin \omega t$, где $\lambda = 1.0$, $\omega = 1.0$.

Таким образом, в работе изучено инвариантное решение задачи о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе, которое происходит под действием продольного градиента давления в смеси. Найдено стационарное состояние системы и показано, что оно является предельным при $t \rightarrow \infty$, если градиент давления стабилизируется по времени на бесконечности.

Автор выражает благодарность В.К. Андрееву и И.И. Рыжкову за помощь в постановке задачи и полезные советы при работе над статьей.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
- [2] БЕТЧЕЛОР ДЖ. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
- [3] RYZHKOV I.I. On double diffusive convection with Soret effect in a vertical layer between co-axial cylinders // Phys. D. 2006. Vol. 215. P. 191–200.
- [4] АНДРЕЕВ В.К., ЗАХВАТАЕВ В.Е., РЯБИЦКИЙ Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 280 с.
- [5] АНДРЕЕВ В.К., РЯБИЦКИЙ Е.А. Малые возмущения термокапиллярного движения в случае цилиндра. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1984.
- [6] АНДРЕЕВ В.К. Малые возмущения термокапиллярного течения жидкости с поверхностью раздела // Тр. семинара “Математическое моделирование в механике”. Т. 1. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1997.
- [7] АНДРЕЕВ В.К. Линеаризованная задача о малых возмущениях движения жидкости с поверхностью раздела при наличии эффекта Соре // Тр. семинара “Математическое моделирование в механике”. Т. 3. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1999.
- [8] ЕФИМОВА М.В. Эволюция возмущений движения бинарных смесей с плоской границей раздела под действием перепада давления и концентрационных сил. Красноярск, 2007. 40 с. (Препр. ИВМ СО РАН, № 4).
- [9] АНДРЕЕВ В.К. О свойствах решения краевой задачи совместного движения двух бинарных смесей // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13, № 4. С. 14–26.
- [10] АНДРЕЕВ В.К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного перепада давления // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
- [11] ANDREEV V.K. The joint of two binary mixtures in a flat layer // J. Siberian Federal Univ. Mathem. and Phys. 2008. No. 1(4). P. 349–370.
- [12] АНДРЕЕВ В.К. О неравенстве типа Фридрихса для составных областей // Ibid. 2008. No. 2(2). P. 146–157.
- [13] АНДРЕЕВ В.К., СОБАЧКИНА Н.Л. Свойства решений начально-краевой задачи, возникающей при движении бинарной смеси в цилиндрической трубе. Красноярск, 2009. 40 с. (Препр. ИВМ СО РАН, № 1).

- [14] КАРТОШКИНА А.Е. Решение начально-краевой задачи, возникающей при совместном движении двух слоев бинарных смесей. Красноярск, 2006. 24 с. (Препр. ИВМ СО РАН, № 4).
- [15] АНДРЕЕВ В.К., ГАПОНЕНКО Ю.А. Математическое моделирование конвективных течений: Учеб. пособие. Красноярск: КрасГУ, 2006. 392 с.
- [16] КРЫЛОВ В.И., СКОБЛЯ Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.

*Поступила в редакцию 23 августа 2010 г.,
с доработки — 18 октября 2010 г.*