ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ

А. И. Задорин
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия
e-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

An elliptic equation with a small parameter at the highest derivatives for a half-strip is considered. Method of the transition of the boundary conditions to the rectangular region is proposed. The estimates of the replacement error are obtained. For the problem in a rectangular region, the difference scheme on the special nonuniform grid is investigated.

При математическом моделировании различных физических явлений, например распространения примесей в направлении ветра, появляются краевые задачи для эллиптических уравнений в полуполосе. Для численного решения такой задачи необходимо предельное краевое условие из бесконечно удаленной точки перенести на границу ограниченной области. В данной работе этот вопрос рассматривается для случая двумерного эллиптического уравнения.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения для переноса краевого условия из бесконечно удаленной точки в [1] предлагается выделить устойчивое многообразие решений исходного уравнения, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Это дает граничное условие в конечной точке. В работе [2] в качестве граничного условия при $x = L$ задается само дифференциальное уравнение, которое затем аппроксимируется вовнутрь области. При этом может не выполниться предельное условие на бесконечности.

В данной работе в качестве граничного условия рассмотрим вырожденное по координате x уравнение. При таком подходе сохранится предельное условие на бесконечности. Затем для задачи в прямоугольной области построим разностную схему и докажем ее равномерную сходимость.

Всюду под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Для непрерывной и ограниченной функции $p(x)$ определим

$$||p|| = \max_x |p(x)|, \quad ||p||_s = \max_{x \geq s} |p(x)|,$$

аналогично для функции двух аргументов $p(x, y)$

$$||p|| = \max_{x,y} |p(x, y)|, \quad ||p||_s = \max_{x \geq s,\ y} |p(x, y)|.$$

Определим норму сеточной функции $p^h: \quad ||p^h|| = \max_{n,m} |p^h_{n,m}|$.

1.Сведение задачи к прямоугольной области

Рассмотрим краевую задачу

$$T_\varepsilon u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

$$u(x,y) = \phi_i, \quad (x,y) \in l_i, \quad i = 1,2,3, \quad \lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0 \tag{2}$$

для полубесконечной полосы

$$D = \{0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le 1\},$$

где l_1, l_2, l_3 — прямолинейные участки границы:

$$l_1 = \{y = 0,\ 0 \le x < \infty\}, \quad l_2 = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\}, \quad l_3 = \{y = 1,\ 0 \le x < \infty\},$$

$$= l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad D^0 = D \backslash .$$

Предполагаем достаточную гладкость функций $a, b, f,\ \phi_i,\ i = 1,2,3$:

$$\varepsilon \in (0,1], \quad A \ge a(x,y) \ge \alpha > 0, \quad B \ge b(x,y) \ge \beta > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \phi_i(x) = 0, \quad i = 1,3, \quad \lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0. \tag{3}$$

Предполагаем также, что выполнены условия согласования краевых условий [3, 4], когда функция $u(x,y)$ является достаточно гладкой в области D.

Для задачи (1), (2) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $\Psi(x,y)$, ограниченной при $x \to \infty$, из условий

$$\Psi(x,y) \ge 0, \quad (x,y) \in , \quad \lim_{x\to\infty} \Psi(x,y) \ge 0, \quad T_\varepsilon \Psi(x,y) \le 0, \quad (x,y) \in D^0 \tag{4}$$

следует $\Psi(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D$.

Лемма 1. *При всех* $(x,y) \in D$

$$|u(x,y)| \le \Phi(x,y),$$

$$\Phi(x,y) = ||f||\beta^{-1} + ||\phi_2|| \exp\{r_0 x\} + ||\phi_1|| \exp\{-(\beta/\varepsilon)^{0.5} y\} + ||\phi_3|| \exp\{(\beta/\varepsilon)^{0.5}(y-1)\}, \tag{5}$$

где

$$r_0 = -2\beta / \{A + \sqrt{^2 + 4\beta\varepsilon}\}.$$

Доказательство. Для функции Ψ, определенной равенством

$$\Psi(x,y) = \Phi(x,y) \pm u(x,y),$$

справедливы соотношения (4). В силу принципа максимума $\Psi(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D$. Это доказывает лемму.

Определим прямоугольную область:

$$D_L = \{0 \le x \le L,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Пусть $\tilde{u}(x,y)$ — решение задачи в области D_L :

$$T_\varepsilon \tilde{u} = f(x,y), \quad (x,y) \in D_L^0, \quad \tilde{u}(x,y) = \phi_i, \quad (x,y) \in l_i^0, \quad i = 1,2,3, \tag{6}$$

$$R_\varepsilon \tilde{u}(x,y) = a(x,y)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + b(x,y)\tilde{u} - \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -f(x,y), \quad (x,y) \in l_4^0, \tag{7}$$

где D_L^0, l_i^0 соответствуют D^0, l_i при переходе к прямоугольной области, $l_4^0 = \{x = L, 0 \le y \le 1\}$, ${}_L = l_1^0 \cup l_2^0 \cup l_3^0$.

Лемма 2. *Пусть* $\Psi(x,y)$ *— произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция в* D_L. *Тогда из условий*

$$\Psi(x,y) \ge 0, \quad (x,y) \in {}_L, \quad T_\varepsilon \Psi(x,y) \le 0, \quad (x,y) \in D_L^0, \quad R_\varepsilon \Psi(x,y) \ge 0 \tag{8}$$

следует $\Psi(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D_L$.

Доказательство. Предположим, что при каких-то (x,y) оказалось $\Psi(x,y) < 0$. Пусть (x_0,y_0) — точка глобального отрицательного минимума функции $\Psi(x,y)$ в области D_L. Если $(x_0,y_0) \in D_L^0$, то данная точка является точкой локального отрицательного минимума, что противоречит условию $T_\varepsilon \Psi(x_0,y_0) \le 0$. Остается рассмотреть случай $x_0 = L$: из условия $R_\varepsilon \Psi \ge 0$ следует $\Psi'_x(x_0,y_0) > 0$, а это противоречит тому, что (x_0,y_0) — точка глобального минимума. Лемма доказана.

Лемма 3. *При всех* y

$$\lim_{L \to \infty} \tilde{u}(L,y) = 0.$$

Доказательство. Зададим $M \in (0,L)$. Докажем, что при всех $x \in [M,L]$

$$|\tilde{u}(x,y)| \le S(x,y), \quad S(x,y) = ||\tilde{u}(M,y)|| \exp\{r_0(x-M)\} + ||f||_M \beta^{-1} + ||\phi_1||_M + ||\phi_3||_M. \tag{9}$$

Доказать (9) можно на основе принципа максимума, определив область $\{M \le x < \infty, 0 \le y \le 1\}$ и задав для этой области

$$\Psi(x,y) = S(x,y) \pm \tilde{u}(x,y).$$

В силу условий (3*б*) для заданного $\Delta > 0$ можно подобрать M таким образом, что

$$||f||_M \beta^{-1} + ||\phi_1||_M + ||\phi_3||_M < \Delta/2.$$

Учитывая (9), можно получить $||\tilde{u}(M,y)|| \le C$. Следовательно,

$$|\tilde{u}(L,y)| \le C \exp\{r_0(L-M)\} + \Delta/2.$$

Таким образом, для некоторого L выполнится $||\tilde{u}(L,y)|| < \Delta$. Это доказывает лемму.

Теперь оценим близость решения задачи (6), (7) к решению исходной задачи (1), (2) при $x \le L$.

Лемма 4. *При всех* $(x,y) \in D_L$

$$|u(x,y) - \tilde{u}(x,y)| \le \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L,y) \right\| \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x-L)\}.$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde{u}$. Очевидно

$$T_\varepsilon z(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_L^0, \quad z(x,y) = 0, \quad (x,y) \in {}_L, \quad R_\varepsilon z = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L,y).$$

Определим

$$\Psi(x,y) = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(L,y) \right\| \exp\{\alpha \varepsilon^{-1}(x-L)\} \pm z(x,y).$$

Для функции $\Psi(x,y)$ выполнены условия (8). В силу принципа максимума $\Psi(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in D_L$. Это доказывает лемму.

2.Оценка производных

Лемма 5. *Пусть при всех* $(x, y) \in D$

$$b(x, y) \geq \beta, \quad b(x, y) + 2a'_x(x, y) \geq \beta > 0. \tag{10}$$

Тогда при всех $(x, y) \in D$ *для некоторой постоянной* C

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leq C. \tag{11}$$

Доказательство. Для оценки производных используем подход, применяемый в [4, 5]. Оцениваем $P(x, y) = u'_x(x, y)$. Сначала проведем оценку на границах области D. Остановимся на случае границы l_2. Определим область $D_2 = \{0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$. Для этой области определим

$$u_{\pm}(x, y) = u(0, y) \pm Cx.$$

Для некоторой достаточно большой постоянной C

$$u_+(x, y) \geq u(x, y), \quad (x, y) \in (D_2), \quad T_\varepsilon u_+(x, y) \leq T_\varepsilon u(x, y), \quad (x, y) \in D_2^0,$$

где (D) — граница области D. В силу принципа максимума

$$u_+(x, y) \geq u(x, y), \quad (x, y) \in D_2.$$

Учитывая, что $u_+(0, y) = u(0, y)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, y) \leq \frac{\partial}{\partial x} u_+(0, y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, y) \geq \frac{\partial}{\partial x} u_-(0, y).$$

Из этих двух оценок следует

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} u(x, y)\right| \leq , \quad (x, y) \in l_2.$$

На границах l_1 и l_3 аналогичная оценка справедлива в силу ограниченности производных $\phi'_i(x)$, $i = 1, 3$.

Перейдем к оценке производной внутри области. Нетрудно показать, что

$$\tilde{T}_\varepsilon P = \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - a \frac{\partial P}{\partial x} - (b + a'_x) P = f'_x + b'_x u.$$

Определим

$$\Psi(x, y) = C \pm P(x, y).$$

Тогда для достаточно большой постоянной C

$$\Psi(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in , \quad \lim_{x \to +\infty} \Psi(x, y) \geq 0, \quad \tilde{T}_\varepsilon \Psi(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in D^0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$. Это доказывает первую оценку в (11). Вторая оценка доказывается аналогично. Лемма доказана.

Итак, если выполнены условия (3), (10), то в соответствии с леммами 4, 5 для некоторой постоянной C при всех $(x,y) \in D_L$

$$|u(x,y) - \tilde{u}(x,y)| \leq C\varepsilon^2 \exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x-L)\}.$$

Оценим частные производные решения задачи (6), (7), сформулированной для прямоугольной области.

Лемма 6. *Пусть в дополнение к (3а)*

$$a = a(x), \quad b(x,y) + 4a'(x) \geq \beta > 0. \tag{12}$$

Тогда для некоторой постоянной C при всех $(x,y) \in D_L$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial y^j}\tilde{u}(x,y)\right| \leq C\left[1 + \varepsilon^{-j/2}\left(\exp\{-(m/\varepsilon)^{1/2}y\} + \exp\{(m/\varepsilon)^{1/2}(y-1)\}\right)\right],$$

$$\beta/2 < m < \beta, \quad j = 1,2,3,4, \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}\tilde{u}(x,y)\right| \leq C\left[1 + \varepsilon^{1-j}\exp\{\varepsilon^{-1}\alpha(x-L)\}\right], \quad j = 1,2,3,4. \tag{14}$$

Доказательство. Оцениваем производные по аналогии с леммой 5. Начнем с обоснования оценки (13) при $j = 1$. Оценим $\tilde{u}'_y$ на границе $_L$.

Начнем с l_1^0. Как и в [4], определим

$$u_\pm(x,y) = \tilde{u}(x,0) \pm C(1 - \exp\{-y/\sqrt{\varepsilon}\}).$$

Определим $z(x,y) = u_+(x,y) - \tilde{u}(x,y)$. Тогда для достаточно большой постоянной C выполнятся условия

$$z(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in {}_L, \quad R_\varepsilon z(x,y) \geq 0, \quad T_\varepsilon z(x,y) \leq 0, \quad (x,y) \in D_L^0.$$

В силу леммы 2 $z(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D_L$. Следовательно, для достаточно большой постоянной C выполнятся условия

$$u_+(x,y) \geq \tilde{u}(x,y), \quad (x,y) \in D_L, \quad u_+(x,0) = \tilde{u}(x,0).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}(x,0) \leq \frac{\partial}{\partial y}u_+(x,0).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}(x,0) \geq \frac{\partial}{\partial y}u_-(x,0).$$

Из этих двух оценок следует

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}(x,0)\right| \leq C/\sqrt{\varepsilon}. \tag{15}$$

Аналогичная оценка производной справедлива на границе l_3^0.

Определим

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\tilde{u}(x,y),$$

$$\Psi(x,y) = C\left[1+\varepsilon^{-1/2}\left(\exp\{-\sqrt{m\varepsilon^{-1}}y\}+\exp\{\sqrt{m\varepsilon^{-1}}(y-1)\}\right)\right] \pm P(x,y).$$

Нетрудно убедиться, что $T_\varepsilon P = f'_y + b'_y\tilde{u}$. С учетом полученных оценок на границе области D_L, можно показать, что для достаточно большой постоянной C для функции $\Psi(x,y)$ выполнятся условия (8). В силу леммы 2 $\Psi(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D_L$. Это доказывает оценку (13) при $j = 1$.

В случае $j = 2$ определим

$$u_\pm(x,y) = P(x,0) \pm \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}(1-\exp\{-y/\sqrt{\varepsilon}\}).$$

Если ввести

$$Q(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{u}(x,y),$$

то

$$T_\varepsilon Q = F(x,y), \quad |F(x,y)| \leq C_1\left[1+\varepsilon^{-1/2}\left(\exp\{-(m\varepsilon^{-1})^{1/2}y\}+\exp\{(m\varepsilon^{-1})^{1/2}(y-1)\}\right)\right].$$

И в этом случае при задании

$$\Psi(x,y) = C\left[1+\varepsilon^{-1}\left(\exp\{-\sqrt{m\varepsilon^{-1}}y\}+\exp\{\sqrt{m\varepsilon^{-1}}(y-1)\}\right)\right] \pm Q(x,y)$$

выполнятся условия (8). В силу леммы 2 $\Psi(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D_L$. Это доказывает оценку (13) при $j = 2$. Доказательство (13) при других j можно провести аналогичным образом.

Перейдем к обоснованию оценки (14) при $j = 1$. Запишем уравнение (6) в виде уравнения по переменной x:

$$\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} - a(x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = F(x,y), \tag{16}$$

где с учетом оценки (13) $|F(x,y)| \leq$. Уравнению (16) соответствуют краевые условия

$$\tilde{u}(0,y) = \phi_2(y), \quad R_\varepsilon\tilde{u}(x,y) = -f(x,y). \tag{17}$$

Учитывая, что в соответствии с условиями (17) производная $\tilde{u}_x(L,y)$ ограничена, на основании известного приема для обыкновенного дифференциального уравнения [6] можно убедиться в справедливости оценки (14) при $j = 1$.

Докажем (14) при $j = 2$. Из уравнения (6) следует, что

$$\left|\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}\right| \leq \frac{C_0}{\varepsilon}, \quad (x,y) \in l_4^0.$$

Задавая

$$u_\pm(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(0,y) \pm {}_0x,$$

по аналогии с обоснованием (13) можно показать:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(0,y)\right| \leq C_0.$$

Определяя

$$\Psi(x,y) = C\left[1+\varepsilon^{-1}\exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x-L)\}\right] \pm \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2},$$

на основании принципа максимума убедимся в справедливости оценки (14) при $j = 2$. Доказательство для $j > 2$ аналогично. Лемма доказана.

3.Обоснование разностной схемы

Согласно лемме 6 решение $\tilde{u}(x,y)$ может иметь пограничные слои около границ l_1^0 и l_3^0. Построить равномерно сходящуюся схему, как известно [4, 7, 8], можно за счет мельчения сетки около этих границ. Пусть

$$\Omega = \{\{x_i, y_j\},\ i = 0,1,...,N_1,\ j = 0,1,...,N_2\} -$$

сетка области D, с постоянным шагом h_1 по координате x и с неравномерными шагами по y. Предполагаем, что N_2 — четно. Сетку по координате y определим в соответствии с [7]. Пусть

$$y_j = \lambda(t_j), \quad t_j = j/N_2, \quad j = 0,1,...,N_2.$$

Определим $\lambda(t)$ при $t \le 0.5$ Зададим постоянные a_0 и q, исходя из ограничений $a_0 \ge 4/\beta$, $0 < q < 0.5$.

В случае $\sqrt{\varepsilon} \le 2q/a_0$ определим

$$\lambda(t) = \begin{cases} \Psi(t), & \text{если } 0 \le t \le \alpha_0, \\ \Psi(\alpha_0) + \Psi'(\alpha_0)(t-\alpha_0), & \text{если } \alpha_0 \le t \le 0.5, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\Psi(t) = a_0\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{q}{q-t},$$

$\alpha_0 = (S-1)S^{-1}q$, S является корнем нелинейного уравнения

$$\ln(S) = \frac{1}{2a_0\sqrt{\varepsilon}} - 1 + S\left(1 - \frac{1}{2q}\right).$$

В работе [7] предлагается находить α_0 на основе метода секущих в соответствии с итерационной формулой

$$\alpha^{(n+1)} = q - \frac{\alpha^{(n)} - 0.5}{\beta^{(n)} - 0.5}a_0\sqrt{\varepsilon}, \quad \beta^{(n)} = \Psi(\alpha^{(n)}), \quad \alpha^{(0)} = q - (1-2q)a_0\sqrt{\varepsilon}.$$

В случае $\sqrt{\varepsilon} > 2q/a_0$ зададим $\lambda(t) = t$, что соответствует равномерной сетке. Для $t \in [0.5, 1]$ зададим $\lambda(t) = 1 - \lambda(1-t)$. Предполагаем, что всюду ниже $a = a(x)$. На построенной сетке Ω определим разностную схему

$${}^{h}_{i,j}u^h = \varepsilon\Lambda_{xx}^{ij}u^h + \varepsilon\Lambda_{yy}^{ij}u^h - a(x_i)\Lambda_x^{ij}u^h - b_{ij}u_{i,j}^h = f(x_i,y_j), \quad (x_i,y_j) \in \Omega^0,$$

$$u_{i,0}^h = \phi_1(x_i), \quad u_{i,N_2}^h = \phi_3(x_i),\ i = 0,1,...,N_1, \quad u_{0,j}^h = \phi_2(y_j),\ j = 0,1,...,N_2,$$
$$R_j u^h = a(L)\Lambda_x^{N_1 j}u^h + b_{N_1,j}u_{N_1,j}^h - \varepsilon\Lambda_{yy}^{N_1 j}u^h = -f(L,y_j), \quad b_{ij} = b(x_i,y_j), \tag{19}$$

где Ω^0 — множество внутренних узлов,

$$\Lambda_{xx}^{ij}u^h = \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h_1^2}, \quad \Lambda_x^{ij}u^h = \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{h_1},$$

$$\Lambda_{yy}^{ij}u^h = \frac{2}{h_j^{(2)} + h_{j+1}^{(2)}}\left[\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{h_{j+1}^{(2)}} - \frac{u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h}{h_j^{(2)}}\right]. \tag{20}$$

Докажем, что для схемы (19) справедлив принцип максимума.

Лемма 7. *Пусть для сеточной функции Ψ^h выполнены условия*

$$T_{i,j}^h\Psi^h \le 0, \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0, \quad R_J\Psi^h \ge 0, \ j = 1, 2, ..., N_2 - 1, \quad \Psi_{i,j}^h \ge 0, \ (x_i, y_j) \in {}_L. \tag{21}$$

Тогда при всех i, j выполнится $\Psi_{i,j}^h \ge 0$.

Доказательство. Предположим, что при некоторых (i_0, j_0) оказалось $\Psi_{i_0,j_0}^h < 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\Psi_{i_0,j_0}^h = \min_{i,j} \Psi_{i,j}^h.$$

Если (i_0, j_0) — координаты внутреннего узла, то получим противоречие с условием $T_{i_0,j_0}^h\Psi^h \le 0$. В случае $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in l_4^0$ получаем противоречие с условием $R_{J_0}\Psi^h \ge 0$. Это доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть функция $\tilde{u}(x, y)$ в области D_L имеет непрерывные частные производные четвертого порядка по x и y и пусть выполнены условия (3а), (12), а u^h — решение схемы (19) на сетке Ω, построенной согласно (18). Тогда найдется постоянная C, такая, что при всех $(x_i, y_j) \in \ \Omega$*

$$|\tilde{u}(x_i, y_j) - u_{i,j}^h| \le C\left[h_1 + \frac{1}{N_2^2}\right]. \tag{22}$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [\tilde{u}]_\Omega$. Очевидно

$$|{}_{i,j}^h z^h| \le \left|\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_{xx}^{ij}[\tilde{u}]_\Omega\right) - a(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_x^{ij}[\tilde{u}]_\Omega\right)\right| +$$

$$+\varepsilon\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_{yy}^{ij}[\tilde{u}]_\Omega\right|. \tag{23}$$

Для производных по y справедливы соотношения (13), поэтому в соответствии с [7] при всех i, j

$$\varepsilon\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{u}(x_i, y_j) - \Lambda_{yy}^{ij}[\tilde{u}]_\Omega\right| \le \frac{C}{N_2^2}. \tag{24}$$

Учитывая (14), (23), (24), по аналогии с [6] можно показать:

$$|{}_{i,j}^h z^h| \le C_1 h_1\left[1 + \frac{1}{h_1 + \varepsilon}\exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x_{i+1} - L)\}\right] + \frac{C_2}{N_2^2}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0,$$

$$|R_j z^h| \le C_3\left[\frac{h_1}{h_1 + \varepsilon} + \frac{1}{N_2^2}\right], \quad 0 < j < N_2, \quad z^h(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in {}_L. \tag{25}$$

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi^h_{i,j} = C_0 \left\{ h_1 \Phi^h_{i+1,j} + h_1 \Phi^h_{i,j} + h_1 + \frac{1}{N_2^2} \right\} \pm z^h_{i,j},$$

где

$$\Phi^h_{i,j} = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2\varepsilon}\right)^{i-N_1}.$$

Нетрудно убедиться, что при всех i, j

$$\Phi^h_{i,j} \geq \exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x_i - L)], \quad T^h_{i,j}\Phi^h \leq -\frac{\alpha^2}{4\varepsilon + 2\alpha h_1}\Phi^h_{i,j}, \quad R^h_j \Phi^h \geq \frac{\alpha^2}{2\varepsilon + \alpha h_1}. \tag{26}$$

Из соотношений (25), (26) следует, что при достаточно большой постоянной C_0 для функции Ψ^h выполнятся условия (21). В соответствии с леммой 7 $\Psi^h_{i,j} \geq 0$, $(x_i, y_j) \in \Omega$. Это доказывает требуемую оценку (22) при всех j и при всех $i < N_1$.

Получим требуемую оценку при $i = N_1$. Определим $\Delta = h_1 + N_2^{-2}$. Учитывая, что $|z^h_{N_1,j}| \leq C$, из (25) получим

$$\left| a_{N_1} \frac{z^h_{N_1,j} - z^h_{N_1-1,j}}{h_1} - \varepsilon \Lambda^{N_1 j}_{yy} z^h \right| \leq C. \tag{27}$$

Пусть $z^h_{N_1,s} = \max_j z^h_{N_1,j}$. Без ограничения общности можно считать, что $z^h_{N_1,s} \geq z^h_{N_1-1,s}$, так как иначе $z^h_{N_1,s} \leq C\Delta$, что соответствует требуемой оценке. Следовательно, аналоги производных под модулем в (27) при $j = s$ разных знаков, откуда следует, что $|z^h_{N_1,s} - z^h_{N_1-1,s}| \leq C\alpha^{-1} h_1$, поэтому $z^h_{N_1,s} \leq C_1 \Delta$.

Пусть теперь $z^h_{N_1,s} = \min_j z^h_{N_1,j}$. Аналогичным образом можно показать, что $z^h_{N_1,s} \geq -C_1\Delta$. Следовательно, $|z^h_{N_1,j}| \leq C\Delta$ при всех j. Требуемая оценка при $i = N_1$ получена. Теорема доказана.

В работе [4, с. 219] предложен способ построения неравномерной сетки, не требующий, в отличие от [7], итераций для определения α_0, начиная с которого функция $\lambda(t)$ принимается линейной. Функция $\lambda(t)$ из [4] имеет вид

$$\lambda(t) = \begin{cases} -2\varepsilon_1 \ln(1 - pt) & \text{если } 0 \leq t \leq 0.25, \\ -\varepsilon_1 \ln \varepsilon + 2\varepsilon_1 \varepsilon^{-0.5} p(t - 0.25) + d(t - 0.25)^2, & \text{если } 0.25 \leq t \leq 0.5; \end{cases} \tag{28}$$

$$p = 4(1 - \sqrt{\varepsilon}),\ d = 8(1 + 2\varepsilon_1 \ln \varepsilon - \varepsilon_1 p \varepsilon^{-0.5}), \quad \varepsilon_1 = 4\varepsilon(m + 10\sqrt{\varepsilon})^{-1},\ 0 < m < \sqrt{\beta}.$$

Для $t \in [0.5, 1]$ $\lambda(t) = 1 - \lambda(1 - t)$. Согласно [4], при построении узлов по координате y на основании такой функции $\lambda(t)$ выполнится оценка (24), поэтому и в случае такой сетки будет справедлива теорема 1.

Разностная схема (19) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, матрица этой системы обладает свойством диагонального преобладания. Согласно [10, с. 259], итерационный метод Гаусса—Зейделя в этом случае является сходящимся. Итерационный метод для задачи (19) можно записать в виде

$$A_{ij} u^{(n)}_{i+1,j} + C_{ij} u^{(n+1)}_{i-1,j} + D_{ij} u^{(n+1)}_{i,j-1} + E_{ij} u^{(n)}_{i,j+1} - B_{ij} u^{(n+1)}_{i,j} = F_{i,j},$$

$$i = 1, 2, ..., N_1 - 1, \quad j = 1, 2, ..., N_2 - 1,$$

$$a(L)\Lambda_x^{N_1j}u^{(n+1)} + b_{N_1,j}u_{N_1,j}^{(n+1)} - \varepsilon\Lambda_{yy}^{N_1j}u^{(n+1)} = -f(L,y_j), \tag{29}$$

где n — номер итерации. Разностное соотношение для правого краевого условия может быть разрешено методом прогонки по координате y.

Остановимся на случае, когда для прямоугольной области правое краевое условие вместо (7) задано в виде

$$R\tilde{u}(x,y) = a(x,y)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + b(x,y)\tilde{u} = -f(x,y), \quad (x,y) \in l_4^0. \tag{7'}$$

Можно показать, что и в случае задачи (6), (7′) справедлив принцип максимума:

$$\lim_{L\to\infty} \tilde{u}(L,y) = 0,$$

$$\Big|u(x,y) - \tilde{u}(x,y)\Big| \le \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\left[\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(L,y)\right\| + \left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(L,y)\right\|\right]\exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x-L)\}, \quad (x,y) \in D_L.$$

По аналогии со случаем задачи (6), (7), для задачи (6), (7′) может быть построена разностная схема, которая отличается от (19) правым краевым условием, и в данном случае будет справедлива оценка точности (22).

4Применение схемы Самарского

Оценка (22) дает лишь первый порядок точности по координате x. В случае равномерной сетки по x повысить точность при $\varepsilon > h_1$ можно с помощью монотонной схемы Самарского [11, с. 169], как в случае обыкновенного дифференциального уравнения это делалось в [12].

Итак, в области D_L, определенной ранее, рассмотрим краевую задачу

$$T_\varepsilon u = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x,y)u = f(x,y), \tag{30}$$

$$u(x,y) = \phi_i, \quad (x,y) \in l_i \quad i = 1,2,3, \quad Ru = \eta_4(y)u(L,y) + u_x'(L,y) = \phi_4(y). \tag{31}$$

Предполагаем, что функция $u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные четвертого порядка по x и y во всей исходной области, относительно a и b предполагаются выполненными ограничения (3a), $\eta_4(y) \ge 0,\ y \in [0,1]$. В частности, при переходе от полубесконечной полосы в качестве (30), (31) может быть задача (6), (7′). К задаче (30), (31) по координате x применим монотонную схему А. А. Самарского. Аппроксимацию производной в краевом условии выполним так, чтобы не понизить точность разностной схемы. При этом матрица разностной схемы потеряет свойство диагонального преобладания. Покажем, что и в данном случае к оператору разностной схемы можно применять принцип максимума.

Предварительно рассмотрим пятиточечную разностную схему

$$L_{n,m}^h u^h = A_{n,m}u_{n+1,m}^h + C_{n,m}u_{n-1,m}^h + D_{n,m}u_{n,m-1}^h + E_{n,m}u_{n,m+1}^h - B_{n,m}u_{n,m}^h = f_{n,m}^h,$$

$$n = 1,2,...,N_1-1, \quad m = 1,2,...N_2-1 \tag{32}$$

с краевыми условиями

$$u_{n,0} = \phi_n^1, \quad u_{n,N_2} = \phi_n^3, \quad 0 \le n \le N_1, \quad u_{0,m} = \phi_m^2, \quad 0 \le m \le N_2,$$

$$R_m u^h = \eta_m u^h_{N_1,m} + \frac{3u^h_{N_1,m} - 4u^h_{N_1-1,m} + u^h_{N_1-2,m}}{2h_1} = \phi^4_m, \quad 0 < m < N_2. \tag{33}$$

Предполагаем, что при всех n, m

$$A_{n,m} \geq 0, \quad C_{n,m} \geq 0, \quad D_{n,m} \geq 0, \quad E_{n,m} \geq 0, \quad C_{N_1-1,m} > 0, \quad \eta_m \geq 0.$$

Сформулируем условие, когда для оператора, соответствующего схеме (32), (33), справедлив принцип максимума.

Лемма 8. *Пусть существует сеточная функция ϕ^h, такая, что*

$$\phi^h > 0, \quad L^h_{n,m}\phi^h < 0, \quad n = 1, 2, ..., N_1 - 1, \quad m = 1, 2, ..., N_2 - 1,$$

$$\frac{A_{N_1-1,m}}{C_{N_1-1,m}}\phi^h_{N_1,m} - 4\phi^h_{N_1-1,m} + \phi^h_{N_1-2,m} \leq 0,$$

$$3\phi^h_{N_1,m} - 4\phi^h_{N_1-1,m} + \phi^h_{N_1-2,m} > 0. \tag{34}$$

Тогда из условий

$$L_{n,m}\Psi^h \leq 0, \quad 0 < n < N_1, \quad 0 < m < N_2, \quad \Psi^h_{0,m} \geq 0, \quad 0 \leq m \leq N_2,$$

$$\Psi^h_{n,0} \geq 0, \quad \Psi^h_{n,N_2} \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_1, \quad R^h_m\Psi^h \geq 0, \quad 0 < m < N_2 \tag{35}$$

следует

$$\Psi^h_{n,m} \geq 0, \quad 0 \leq n < N_1, \quad 0 \leq m \leq N_2. \tag{36}$$

Доказательство. Предположим, что при каких-либо $n<N_1$ и m оказалось $\Psi^h_{n,m}<0$; по аналогии со случаем трехточечной разностной схемы [12] получим противоречие. Определим V^h :

$$\Psi^h_{n.m} = \phi^h_{n,m}V^h_{n,m}.$$

Пусть

$$V^h_{n_0,m_0} = \min_{n<N_1,m} V^h_{n,m}, \quad V^h_{n_0,m_0} < 0.$$

Предположим, что $n_0 = N_1 - 1$. Нетрудно показать, что для произвольных n и m

$$L_{n,m}\Psi^h = V^h_{n.m}L_{n,m}\phi^h + A_{n,m}\phi^h_{n+1,m}(V^h_{n+1.m} - V^h_{n.m}) + C_{n,m}\phi^h_{n-1,m}(V^h_{n-1.m} - V^h_{n.m}) +$$

$$+ D_{n,m}\phi^h_{n,m-1}(V^h_{n.m-1} - V^h_{n.m}) + E_{n,m}\phi^h_{n,m+1}(V^h_{n.m+1} - V^h_{n.m}). \tag{37}$$

Учитывая (35), получим

$$A_{N_1-1,m_0}\phi^h_{N_1,m_0}(V^h_{N_1.m_0} - V^h_{N_1-1.m_0}) + C_{N_1-1,m_0}\phi^h_{N_1-2,m_0}(V^h_{N_1-2.m_0} - V^h_{N_1-1.m_0}) < 0. \tag{38}$$

Если $V^h_{N_1-1,m_0} \leq V^h_{N_1,m_0}$, то в узле с координатами $(N_1 - 1, m_0)$ — локальный отрицательный минимум для сеточной функции V^h. В соответствии с (37) выполнено неравенство $L_{N_1-1,m_0}\Psi^h > 0$, что противоречит условиям (35).

Остается рассмотреть случай $V^h_{N_1-1,m_0} > V^h_{N_1,m_0}$.

Из (34), (35) следует

$$3\phi^h_{N_1,m_0}V^h_{N_1,m_0} - 4\phi^h_{N_1-1,m_0}V^h_{N_1,m_0} + \phi^h_{N_1-2,m_0}V^h_{N_1,m_0} < 0,$$

$$3\phi^h_{N_1,m_0}V^h_{N_1,m_0} - 4\phi^h_{N_1-1,m_0}V^h_{N_1-1,m_0} + \phi^h_{N_1-2,m_0}V^h_{N_1-2,m_0} \geq 0,$$

следовательно,

$$4\phi^h_{N_1-1,m_0}(V^h_{N_1,m_0} - V^h_{N_1-1,m_0}) + \phi^h_{N_1-2,m_0}(V^h_{N_1-2,m_0} - V^h_{N_1,m_0}) > 0.$$

Это неравенство можно записать в виде

$$(4\phi^h_{N_1-1,m_0} - \phi^h_{N_1-2,m_0})(V^h_{N_1,m_0} - V^h_{N_1-1,m_0}) + \phi^h_{N_1-2,m_0}(V^h_{N_1-2,m_0} - V^h_{N_1-1,m_0}) > 0. \tag{39}$$

Из (38), (39) вытекает, что

$$(V^h_{N_1,m_0} - V^h_{N_1-1,m_0})[4\phi^h_{N_1-1,m_0} - \phi^h_{N_1-2,m_0} - A_{N_1-1,m_0}C^{-1}_{N_1-1,m_0}\phi^h_{N_1,m_0}] > 0.$$

Учитывая, что в данном случае $V^h_{N_1-1,m_0} > V^h_{N_1,m_0}$, получим противоречие с условиями (34).

Остается рассмотреть случай $n_0 < N_1 - 1$. Из того, что узел (n_0, m_0) — точка локального отрицательного минимума сеточной функции V^h и из (37), следует $L_{n_0,m_0}\Psi^h > 0$, а это противоречит условиям (35). Лемма доказана.

Выпишем разностную схему для задачи (30), (31):

$$L^h_{i,j}u^h = \varepsilon_i\Lambda^{ij}_{xx}u^h + \varepsilon\Lambda^{ij}_{yy}u^h - a(x_i)\Lambda^{ij}_x u^h - b_{ij}u^h_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega^0,$$

$$u^h_{i,0} = \phi_1(x_i), \quad u^h_{i,N_2} = \phi_3(x_i), \quad i = 0, 1, ..., N_1, \quad u^h_{0,j} = \phi_2(y_j), \quad j = 0, 1, ..., N_2,$$

$$R^h_j u^h = \eta_4(y_j)u^h_{N_1,j} + \frac{3u^h_{N_1,j} - 4u^h_{N_1-1,j} + u^h_{N_1-2,j}}{2h_1} = \phi_4(y_j), \quad \varepsilon_i = \varepsilon\{1 + a(x_i)h_1/(2\varepsilon)\}^{-1}. \tag{40}$$

Покажем, что к оператору схемы (40) можно применять принцип максимума. Определим

$$\phi^h_{i,j} = (1 + \varepsilon^{-1}\alpha h_1)^{i-N_1}.$$

Нетрудно убедиться, что для такой функции ϕ^h выполняются соотношения (34). Следовательно, если для какой-либо функции Ψ^h выполнятся условия (35), то будут выполнены неравенства (36).

Лемма 9. *Пусть z^h — произвольная сеточная функция. Тогда при всех $i < N_1$ и при всех j*

$$|z^h_{i,j}| \leq \beta^{-1}\|L^h z^h\| + \max_{(x_i,y_j)\in L}|z^h_{i,j}| + \alpha^{-1}(\varepsilon + \alpha h_1)\max_j|R^h_j z^h|\exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h_1)^{-1}(x_i - L)], \tag{41}$$

$$|z^h_{N_1,j}| \leq \frac{4}{3}|z^h_{N_1-1,j}| + \frac{1}{3}|z^h_{N_1-2,j}| + \frac{2}{3}h_1|R^h_j z^h|. \tag{42}$$

Доказательство. Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi^h = \beta^{-1}\|L^h z^h\| + \max_{(x_i,y_j)\in L}|z^h_{i,j}| + \alpha^{-1}(\varepsilon + \alpha h_1)|R^h z^h|\phi^h \pm z^h.$$

Тогда для функции Ψ^h выполнятся условия (34) и в силу принципа максимума $\Psi^h_{i,j} \geq 0$ при $i < N_1$. Можно показать, что

$$\phi^h_n \leq \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h_1)^{-1}(x_n - L)].$$

Это доказывает (41). Неравенство (42) следует из краевого условия. Лемма доказана.

Из леммы 9 следуют единственность и ограниченность решения схемы (40). Получим оценку точности схемы (40).

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия (3а), (12). Пусть сетка Ω равномерна по x и неравномерна по y, построена согласно (18) или (28). Тогда для некоторой постоянной C*

$$||u^h - [u]_\Omega|| \le C\left[\frac{h_1^2}{h_1+\varepsilon} + \frac{1}{N_2^2}\right]. \tag{43}$$

Доказательство. Учитывая, что выбор сетки по координате y обеспечивает второй порядок аппроксимации второй производной по этому направлению, по аналогии с [12] можно показать:

$$|L_{i,j}^h[u]_\Omega - L_{i,j}^h u^h| \le C_1\left\{\frac{h_1^2}{h_1+\varepsilon}\left[1+(h_1+\varepsilon)^{-1}\exp\{\alpha\varepsilon^{-1}(x_{i+1}-L)\}\right] + \frac{1}{N_2^2}\right\}. \tag{44}$$

Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Как это следует из [12], при всех j

$$|R_j z^h| \le C_2\frac{h_1^2}{(h_1+\varepsilon)^2}. \tag{45}$$

Определим сеточную функцию:

$$\Psi_{i,j}^h = C\left\{\frac{h_1^2}{h_1+\varepsilon}(\phi_{i,j}^h + \rho_{i,j}^h + 1) + \frac{1}{N_2^2}\right\} \pm z_{i,j}^h,$$

где

$$\phi_{i,j}^h = [1+\alpha h_1/(2\varepsilon)]^{i-N_1}, \quad \rho_{i,j}^h = [1+\alpha h_1/(2\varepsilon)]^{i+1-N_1}.$$

Учитывая (44), (45), можно показать, что в случае достаточно большой постоянной C выполнятся условия (35), поэтому в силу леммы 8 при всех $i < N_1$ $\Psi_{i,j}^h \ge 0$. Учитывая соотношения (42) и (45), получим утверждение теоремы.

5 Результаты численных экспериментов

В полуполосе D рассматривалась краевая задача для уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2u = f(x,y),$$

имеющая решение

$$u(x,y) = \exp(r_0 x)\{\exp(-y/\sqrt{\varepsilon}) + \exp((y-1)/\sqrt{\varepsilon}) + \sin(\pi y)\}, \quad r_0 = -2/(1+\sqrt{1+4\varepsilon}).$$

Пусть u^h — решение схемы (19), применяемой после перехода от полуполосы к прямоугольной области. Сетка по координате x равномерна и неравномерна по y, определена согласно (18). В соответствии с леммой 4 и теоремой 1 при всех $(x_i, y_j) \in \Omega$

$$|u_{i,j}^h - u(x_i,y_j)| \le 2\varepsilon^2\exp(r_0 L) + C\Big\{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2^2}\Big\}, \quad r_0 < 0. \tag{46}$$

Согласно (46), погрешность решения задачи в полубесконечной полосе складывается из погрешности разностной схемы и из погрешности, возникающей при переносе краевого условия из бесконечности.

Для задания краевого условия на правой границе l_4^0 рассмотрим четыре способа:

1) $\tilde{u}(L, y) = 0$,

2) $\tilde{u}'_x(L, y) = 0$,

3) $\tilde{u}'_x(L, y) + 2\tilde{u}(L, y) = -f(L, y)$,

4) $\tilde{u}'_x(L, y) + 2\tilde{u}(L, y) - \varepsilon \tilde{u}''_{yy}(L, y) = -f(L, y)$.

Решение схемы (19) находилось согласно (29), для погрешности между двумя соседними итерациями достигалась точность $\Delta = 10^{-6}$. В случаях 1–3 реализация правого краевого условия для разностной схемы упрощалась.

Итак, рассмотрим результаты вычислений. Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$.

В табл. 1 приведена норма погрешности $||z^h||$ в зависимости от способа задания краевого условия при различных значениях ε для $L = 1$, $N_1 = 100$, $N_2 = 10$, $a_0 = 2$, $q = 0.25$. Из результатов вычислений следует, что задание правого краевого условия согласно способу 4 дает меньшую погрешность при всех значениях параметра ε. Значительна погрешность при задании на правой границе условия Дирихле, соответствующего переносу нулевого краевого условия из бесконечности.

В табл. 2 приведена норма погрешности $||z^h||$ при различных значениях ε и при различных способах задания краевого условия для $L = 10$, $N_1 = 1000$, $N_2 = 10$, $a_0 = 2$, $q = 0.25$. Видно, что с увеличением длины интервала для всех рассматриваемых способов норма погрешности $||z^h||$ выравнивается, переходя в норму погрешности разностной схемы.

Т а б л и ц а 1

ε	Способ задания краевого условия			
	1	2	3	4
1.0	0.87	0.14	7.8E-1	2.0E-2
1.0E-1	0.49	4.2E-2	2.1E-2	0.22E-2
1.0E-2	0.37	0.88E-2	0.47E-2	0.47E-2
1.0E-3	0.37	1.2E-2	1.2E-2	1.1E-2
1.0E-4	0.37	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2
1.0E-5	0.37	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2

Т а б л и ц а 2

ε	Способ задания краевого условия			
	1	2	3	4
1.0	7.1E-2	5.1E-2	7.1E-2	7.1E-2
1.0E-1	2.6E-2	2.6E-2	2.6E-2	2.6E-2
1.0E-2	0.47E-2	0.47E-2	0.47E-2	0.47E-2
1.0E-3	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2
1.0E-4	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2	1.2E-2

Список литературы

[1] Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Сообщ. по вычисл. матем.*, ВЦ АН СССР, М., 1981.

[2] Захаров Ю. Н. Об одном методе решения уравнения с краевыми условиями на бесконечности. В *"Вычисл. технологии"*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **2**, №7, 1993, 55–68.

[3] Волков Е. А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. *Тр. Матем. ин-та АН СССР*, 77, 1965, 89–112.

[4] Лисейкин В. Д., Петренко В. Е. *Адаптивно-инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями.* ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1989.

[5] Боглаев И. П. Численный метод решения квазилинейного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **28**, №4, 1988, 492–502.

[6] Задорин А. И. Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем. *Моделирование в механике*, **5**, №1, 1991, 141–152.

[7] Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **9**, №4, 1969, 841–890.

[8] Шишкин Г. И. Решение краевой задачи для эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. *Там же*, **26**, №7, 1986, 1019–1031.

[9] Kellog R. B., Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points. *Math. Comput.*, **32**, No. 144, 1978, 1025–1039.

[10] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.*Матрицы и вычисления.* Наука, М., 1984.

[11] Самарский А. А. *Теория разностных схем.* Наука, М., 1989.

[12] Задорин А. И. Монотонная схема Самарского для обыкновенного уравнения второго порядка с малым параметром в случае третьей краевой задачи. *Вычисл. технологии*, **2**, №5, 1997, 35–45.

Поступила в редакцию 21 апреля 1998 г.,
в переработанном виде 20 июля 1998 г.