Об “испанской версии” формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем*

С. П. Шарый
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `shary@ict.nsc.ru`

Исследуется версия формального (алгебраического) подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем уравнений, в основу которой положена известная из математического анализа теорема Миранды. Рассматриваются способы ее численной реализации, условия применимости и качество оценивания. Представлены результаты численных экспериментов и рекомендации по практическому использованию предлагаемой методики.

Ключевые слова: интервальные линейные уравнения, множество решений, внешняя оценка, теорема Миранды, формальный (алгебраический) подход.

1. Постановка задачи и вводные сведения

Предметом рассмотрения в работе являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n}x_n = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n}x_n = \boldsymbol{b}_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1 + \boldsymbol{a}_{n2}x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{nn}x_n = \boldsymbol{b}_n \end{cases} \tag{1}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и интервальными правыми частями $\boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $n \times n$-матрица, $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный n-вектор. Системы (1)–(2) мы понимаем как семейства точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с матрицами $A \in \boldsymbol{A}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b}$.

Множеством решений интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\bigr\}, \tag{3}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и с $b \in \boldsymbol{b}$ (см., например, [1–3]). Часто его называют также *объединенным множеством решений*, поскольку для интервальных уравнений существуют другие множества решений

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-6068.2010.9).

[4 – 8], более адекватные тем или иным конкретным практическим ситуациям. В данной работе они не рассматриваются, и поэтому мы называем (3) сокращенным термином “множество решений”.

Известно, что множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является многогранным (полиэдральным) множеством, в общем случае невыпуклым, но его пересечение с каждым из ортантов пространства $\mathbb{R}^n$ выпукло. Точное и полное описание множества решений практически невозможно в силу его огромной трудоемкости, а, с другой стороны, в большинстве реальных постановок задач в этом нет необходимости. Чаще достаточно знать какие-то оценки множества решений либо его *приближенное описание* с помощью более простых множеств, имеющих меньшую конструктивную сложность.

Далее интервальная $n \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ предполагается *неособенной*, т. е. содержащей только неособенные (невырожденные) точечные матрицы A с $\det A \neq 0$, в силу чего множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ системы (1) – (2) ограничено. В данной работе мы будем решать задачу его внешнего покоординатного оценивания, т. е. нахождения наиболее точных оценок для $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})\,\}$ снизу и для $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})\,\}$ сверху, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Это равносильно отысканию для множества решений объемлющего прямоугольного параллелепипеда (так называемого бруса) со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 1):

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Найти (по-возможности, меньший) брус в } \mathbb{R}^n \text{ со сторонами,}\\ \text{параллельными координатным осям, содержащий множество}\\ \text{решений } \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \text{ интервальной системы уравнений } \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}.\end{array}} \qquad (4)$$

Подобная постановка задачи часто возникает при анализе чувствительности статических систем, описываемых линейными алгебраическими уравнениями (см. пример в разделе 2).

Наша система обозначений следует неформальному международному стандарту на обозначения в интервальном анализе [9]. В частности, множество всех замкнутых интервалов вещественной оси обозначено $\mathbb{IR}$, интервалы и интервальные величины выделены

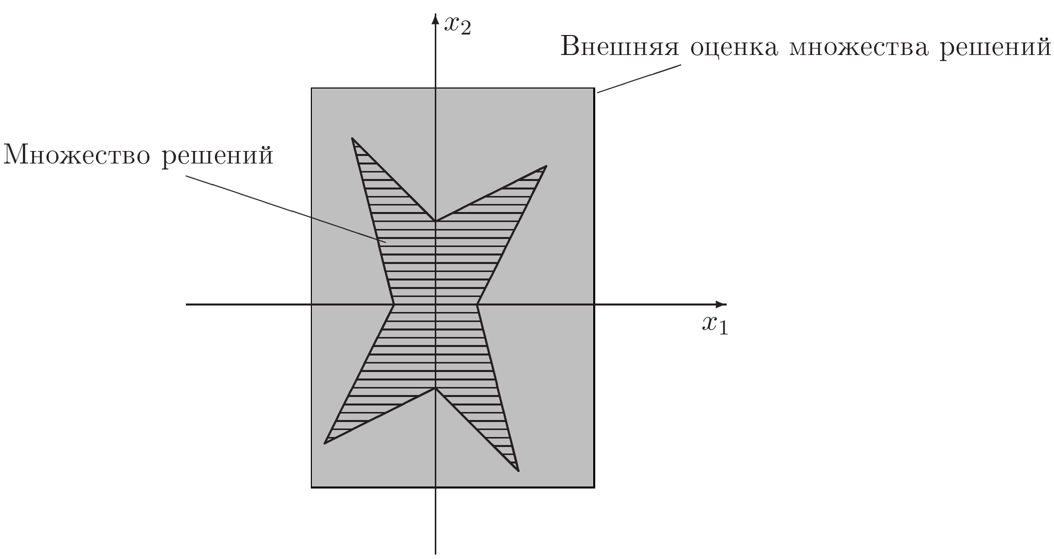

Рис. 1. Внешнее оценивание множества решений интервальным вектором-брусом

буквами жирного шрифта $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, …, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, тогда как неинтервальные (точечные) величины специально не выделяются.

Черта снизу $\underline{\boldsymbol{x}}$ и сверху $\overline{\boldsymbol{x}}$ означает нижний и верхний конец интервала $\boldsymbol{x}$, а неравенство $\boldsymbol{x} \geq 0$ ($\boldsymbol{x} \leq 0$) эквивалентно $\underline{\boldsymbol{x}} \geq 0$ и $\overline{\boldsymbol{x}} \geq 0$ ($\underline{\boldsymbol{x}} \leq 0$ и $\overline{\boldsymbol{x}} \leq 0$ соответственно). Кроме того, нам понадобятся

$$\operatorname{rad}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}) \quad \text{— радиус интервала,}$$

$$|\boldsymbol{x}| = \max\{\, |\overline{\boldsymbol{x}}|, |\underline{\boldsymbol{x}}|\,\} \quad \text{— абсолютное значение (модуль) интервала,}$$

$$\langle \boldsymbol{x} \rangle = \begin{cases} \min\{\, |\overline{\boldsymbol{x}}|, |\underline{\boldsymbol{x}}|\,\}, & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{x}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{— } \begin{array}{l}\text{мигнитуда интервала (наименьшее}\\ \text{расстояние точек интервала до нуля).}\end{array}$$

Абсолютное значение и мигнитуда интервала являются, как видим, в некотором смысле антиподами.

Интервальный вектор определяется как вектор, столбец или строка с интервальными компонентами. Его геометрическим образом является прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, который, как уже упоминалось, часто называют брусом. Для интервалов, интервальных векторов и матриц естественно определено отношение теоретико-множественного включения “$\subseteq$”. К интервальным векторам и матрицам операции взятия нижнего и верхнего концов, абсолютного значения будут применяться покомпонентно и поэлементно. Например, $|\boldsymbol{A}|$ — матрица тех же размеров, что и $\boldsymbol{A}$, составленная из модулей элементов $\boldsymbol{A}$. Но операция $\langle \cdot \rangle$ в применении к матрицам будет иметь в соответствии с традицией особый смысл.

Компарантом[1] интервальной матрицы $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ мы называем точечную матрицу того же размера, обозначаемую $\langle \boldsymbol{A} \rangle$, такую, что

$$ij\text{-й элемент } \langle \boldsymbol{A} \rangle := \begin{cases} \ \ \langle\, \boldsymbol{a}_{ij} \rangle, & \text{если } \ i = j, \\ -|\, \boldsymbol{a}_{ij}|, & \text{если } \ i \neq j. \end{cases}$$

В частности, для точечной матрицы операция взятия компаранта — это принудительное назначение “нужных” знаков для элементов матрицы, положительных для диагональных элементов и отрицательных для внедиагональных.

Наконец, если S — непустое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то его *интервальной оболочкой* $\square S$ называется наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S. Интервальная оболочка — это интервальный объект, наилучшим образом приближающий извне (т. е. объемлющий) рассматриваемое множество. Кроме того, через $\mathbb{I}S$ будем обозначать множество всех интервальных векторов-брусов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$, содержащихся в S, т. е.

$$\mathbb{I}S = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n \mid \boldsymbol{x} \subseteq S \,\}.$$

Посредством $\mathbb{IR}$ помимо множества вещественных интервалов будем обозначать также *классическую интервальную арифметику* — алгебраическую систему, образованную интервалами вещественной оси с операциями сложения, вычитания, умножения и деления, определенными “по представителям”, т. е. в соответствии с фундаментальным принципом

$$\boldsymbol{x} \star \boldsymbol{y} = \{\, x \star y \mid x \in \boldsymbol{x},\, y \in \boldsymbol{y} \,\} \qquad \text{для} \quad \star \in \{\, +\,, -\,, \cdot\,, /\, \}.$$

[1] В англоязычной терминологии “comparison matrix”, см. [3, 10].

Иными словами, результирующий интервал любой операции есть множество, образованное всевозможными результатами этой операции между элементами интерваловоперандов. Развернутые формулы для интервальных сложения, вычитания, умножения и деления выглядят следующим образом [1–3, 7, 11]:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= \left[\,\underline{\boldsymbol{x}}+\underline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{y}}\,\right],\\
\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} &= \left[\,\underline{\boldsymbol{x}}-\overline{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{x}}-\underline{\boldsymbol{y}}\,\right],\\
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= \left[\,\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}},\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}},\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\,\right],\\
\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}\cdot\left[\,1/\overline{\boldsymbol{y}},\ 1/\underline{\boldsymbol{y}}\,\right] \quad \text{для} \ \ \boldsymbol{y}\not\ni 0.
\end{aligned}
$$

Для интервальных векторов и матриц арифметические операции являются аналогами соответствующих операций для точечного случая. В частности, сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов. Если $\boldsymbol{X} = (\,\boldsymbol{x}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m\times l}$ и $\boldsymbol{Y} = (\,\boldsymbol{y}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l\times n}$, то произведение матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ есть матрица $\boldsymbol{Z} = (\,\boldsymbol{z}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ такая, что

$$
\boldsymbol{z}_{ij} := \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{x}_{ik}\boldsymbol{y}_{kj}.
$$

Отметим, что при этом $\boldsymbol{Z} = \Box\{\,XY \mid X \in \boldsymbol{X}, Y \in \boldsymbol{Y}\,\}$, т. е. результат умножения интервальных матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ есть интервальная оболочка множества результатов произведений XY “по представителям” $X \in \boldsymbol{X}$ и $Y \in \boldsymbol{Y}$.

2. Практическая иллюстрация постановки

Задачи внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений естественно возникают в самых различных математических моделях, и многочисленные примеры на эту тему заинтересованный читатель может увидеть в тематических подборках статей на сайте “Интервальный анализ и его приложения” [12]. Рассмотрим более подробно в качестве практического примера, приводящего к нашей постановке, задачу расчета режимов электроэнергетических сетей. Одной из основных рабочих моделей подобных сетей являются системы линейных уравнений “узловых потенциалов” (см. [13])

$$
YU = J, \tag{5}
$$

где Y — квадратная матрица узловых проводимостей, J — вектор-столбец задающих токов, U — вектор-столбец искомых узловых потенциалов. Узловые проводимости — элементы матрицы Y — образуются как суммы проводимостей ветвей сети, сходящихся в рассматриваемом узле. После решения системы (5) относительно U величины токов в ветвях сети (необходимые, например, при выборе проводов и пр.) определяются согласно закону Ома для участка цепи. Иногда при описании этого метода говорят также об “узловых напряжениях”.

В реальных электрических сетях в результате изменения токов нагрузки и коммутационных переключений в электрической схеме коэффициенты системы (5) и элементы ее вектора правой части изменяются, в силу чего их нельзя больше считать имеющими определенные вещественные значения. Эта ситуация достаточно адекватно описывается интервальной системой линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{Y}U = \boldsymbol{J}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{Y}$ — интервальная матрица, $\boldsymbol{J}$ — интервальный вектор, образованные интервалами возможных значений узловых проводимостей и задающих токов соответственно [14]. При этом нам нужно найти границы изменения решения U в условиях, когда элементы матрицы системы и компоненты правой части изменяются в пределах предписанных им интервалов. Таким образом, возникающая задача является задачей внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ (6), причем требуются его внешние оценки именно вдоль координатных осей как имеющие ясный содержательный смысл границ изменений напряжения сети в конкретных узлах. Именно такова задача (4).

Строго говоря, коэффициенты исходной системы (5) — элементы матрицы Y — связаны между собой и изменяются в пределах предписанных им интервалов из $\boldsymbol{Y}$ не независимо друг от друга, а связанным образом. Это вносит дополнительную специфику в постановку задачи, уменьшая множество решений и делая его оценивание более трудным. Но в первом приближении, когда рассматривается простейшая модель, для практики вполне достаточно получение оценок множества решений интервальной линейной системы (6) без учета каких-либо связей.

3. Теорема Миранды и основы интервальной техники

В математическом анализе хорошо известна теорема Больцано — Коши.

Теорема Больцано — Коши [15]. *Если функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на интервале $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри интервала $\boldsymbol{X}$ существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.*

Часто ее называют теоремой Больцано (см., например, [16]), так как именно он первым обнаружил сформулированное свойство непрерывных функций. Далее в работе используется многомерное обобщение этого результата, опубликованное более чем столетием позже в заметке [17].

Теорема Миранды. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \bigl(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\bigr)^\top$ — функция, непрерывная на брусе $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, и для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место либо*

$$F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \underline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \leq 0 \quad \textit{и} \quad F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \overline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \geq 0,$$

либо

$$F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \underline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \geq 0 \quad \textit{и} \quad F_i\bigl(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}, \overline{\boldsymbol{X}}_i, \boldsymbol{X}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_n\bigr) \leq 0,$$

т. е. области значений каждой компоненты функции $F(x)$ на соответствующих противоположных гранях бруса $\boldsymbol{X}$ имеют разные знаки. Тогда на брусе $\boldsymbol{X}$ существует нуль функции F, т. е. точка $\tilde{x} \in \boldsymbol{X}$, в которой $F(\tilde{x}) = 0$.

Характерной особенностью теоремы Миранды является специальная форма множества, на котором утверждается существование нуля функции: оно должно быть брусом со сторонами, параллельными координатным осям, т. е. интервальным вектором. Кроме того, для конструктивного применения теоремы Миранды нужно уметь находить или как-то оценивать области значений функций на подобных множествах.

Удобное средство для решения этой задачи предоставляют методы интервального анализа. Задача о вычислении области значений функции на брусах эквивалентна задаче оптимизации, но в интервальном анализе она принимает специфическую форму задачи о вычислении так называемого *интервального расширения функции* [2, 3, 7, 11].

Определение. *Пусть D — непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Интервальная функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}D \to \mathbb{IR}^m$ называется интервальным продолжением вещественной функции $f : D \to \mathbb{R}^m$, если $\boldsymbol{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in D$. Интервальная функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{I}D \to \mathbb{IR}^m$ называется интервальным расширением вещественной функции $f : D \to \mathbb{R}^m$, если*

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *— интервальное продолжение для $f(x)$,*

2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *монотонна по включению, т. е. $\boldsymbol{x}' \subseteq \boldsymbol{x}'' \;\Rightarrow\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')$ на $\mathbb{I}D$.*

Таким образом, если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ — интервальное расширение функции $f(x)$, то для области значений f на брусе $\boldsymbol{X} \subset D$ получаем следующую внешнюю (с помощью объемлющего множества) оценку:

$$\{\, f(x) \mid x \in \boldsymbol{X} \,\} \;=\; \{\, \boldsymbol{f}(x) \mid x \in \boldsymbol{X} \,\} \;\subseteq\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}).$$

Эффективное построение интервальных расширений функций — важнейшая задача интервального анализа, поиски различных решений которой продолжаются и в настоящее время. Самым первым результатом в этом направлении является приведенная ниже теорема, которую часто называют основной теоремой интервальной арифметики.

Теорема [1 – 3, 7, 11]. *Если для рациональной функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на брусе $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{IR}^n$ определен результат $\boldsymbol{f}_\natural(\boldsymbol{x})$ подстановки вместо ее аргументов интервалов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики, то*

$$\{\, f(x) \mid x \in \boldsymbol{x} \,\} \;\subseteq\; \boldsymbol{f}_\natural(\boldsymbol{x}),$$

т. е. $\boldsymbol{f}_\natural(\boldsymbol{x})$ содержит множество значений функции $f(x)$ на $\boldsymbol{x}$.

Видно, что по отношению к рациональной функции $f(x)$ интервальная функция $\boldsymbol{f}_\natural(\boldsymbol{x})$, о которой идет речь в основной теореме интервальной арифметики, является интервальным расширением. Оно называется *естественным интервальным расширением*, и его вычисление не представляет никаких трудностей.

Использование естественного интервального расширения подчас дает слишком широкие внешние оценки областей значений функций, но оказывается, что если в выражение для рациональной функции f каждая переменная входит не более одного раза в первой степени, то естественное интервальное расширение дает точную область значений функции [1 – 3, 7, 11]. Это условие выполнено, в частности, для линейных функций, когда $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ с некоторыми постоянными коэффициентами α_1, α_2, ..., α_n.

Если $F(x) = Ax - b$ для $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ и n-вектора $b = (b_i)$, то в качестве немедленного следствия теоремы Миранды и основной теоремы интервальной арифметики получаем следующее условие существования решения системы линейных уравнений $Ax = b$ в интервальном брусе $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$: если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливо

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \tag{7}$$

или

$$a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \leq 0, \tag{8}$$

где все арифметические операции являются операциями интервальной арифметики, то брус $\boldsymbol{X}$ содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$.

Заметим, что выписанные пары соотношений (7) и (8) являются взаимнодополнительными: неравенства (7) имеют место при $a_{ii} \geq 0$, а неравенства (8) — при $a_{ii} \leq 0$. Если же $a_{ii} \neq 0$ для какого-то i, то выполняется лишь одна пара неравенств, а другая ложна.

Для дальнейшего преобразования выписанных соотношений (7) – (8) к более удобному виду имеет смысл выйти из классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ в полную интервальную арифметику Каухера $\mathbb{KR}$, более широкую алгебраическую систему, обладающую хорошими алгебраическим свойствами (см. оригинальную диссертацию [18] или изложение основ этой арифметики в [6 – 8, 19 – 21]).

4. Полная интервальная арифметика Каухера

$\mathbb{KR}$ получается из интервальной арифметики $\mathbb{IR}$ с помощью алгебраического и порядкового пополнения. Элементами полной интервальной арифметики $\mathbb{KR}$ являются пары вещественных чисел $[\eta, \vartheta]$, не обязательно связанные соотношением $\eta \leq \vartheta$, так что $\mathbb{IR} \subset \mathbb{KR}$. Обычные интервалы из $\mathbb{IR}$ называются при этом *правильными*, а интервалы $[\eta, \vartheta]$, для которых $\eta > \vartheta$, — *неправильными*. Если $\boldsymbol{a} = [\eta, \vartheta]$, то η — *левый конец* интервала $\boldsymbol{a}$, и он обозначается $\underline{\boldsymbol{a}}$ или $\inf \boldsymbol{a}$, а ϑ — *правый конец* интервала $\boldsymbol{a}$, и он обозначается $\overline{\boldsymbol{a}}$ или $\sup \boldsymbol{a}$. Правильные и неправильные интервалы переходят друг в друга в результате операции дуализации

$$\operatorname{dual}[\,\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,] \;:=\; [\,\overline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,],$$

которая меняет местами концы интервала, “переворачивая” его. Хотя может показаться, что неправильные интервалы вроде $[2, 1]$ не имеют ясного содержательного смысла, ниже мы укажем одну из возможных интерпретаций таких интервалов и операций над ними (см. (15)). В общем случае любой элемент $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$ можно мыслить как обычное множество точек из *правильной проекции*

$$\operatorname{pro}\boldsymbol{x} := \begin{cases} \boldsymbol{x}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ правильный}, \\ \operatorname{dual}\boldsymbol{x}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ неправильный}. \end{cases}$$

Правильность или неправильность интервала влияет при этом на способ его вступления в арифметические и прочие операции.

Теоретико-множественное упорядочение интервалов по включению на $\mathbb{IR}$ естественно распространяется и на $\mathbb{KR}$. Именно, для интервалов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{KR}$ полагают

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \quad\Longleftrightarrow\quad \underline{\boldsymbol{x}} \geq \underline{\boldsymbol{y}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}. \tag{9}$$

Например, $[3, 1] \subseteq [2, 2] = 2$.

Сложение и умножение на число определяются в $\mathbb{KR}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \;&:=\; \left[\,\underline{\boldsymbol{x}}+\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{y}}\,\right], \\ \lambda\cdot\boldsymbol{x} \;&:=\; \begin{cases} [\,\lambda\,\underline{\boldsymbol{x}}, \lambda\,\overline{\boldsymbol{x}}\,], & \text{если } \lambda \geq 0, \\ [\,\lambda\,\overline{\boldsymbol{x}}, \lambda\,\underline{\boldsymbol{x}}\,], & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

Всякий элемент $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$ имеет, следовательно, единственный противоположный, обозначаемый $\operatorname{opp}\boldsymbol{x}$, причем из соотношения $\boldsymbol{x} + \operatorname{opp}\boldsymbol{x} = 0$ следует, что

$$\operatorname{opp}\boldsymbol{x} = [\,-\underline{\boldsymbol{x}}, -\overline{\boldsymbol{x}}\,].$$

Таким образом, относительно операции сложения арифметика $\mathbb{KR}$ является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в $\mathbb{KR}$ следующие подмножества:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{KR} \mid (\underline{\boldsymbol{x}} \geq 0) \;\&\; (\overline{\boldsymbol{x}} \geq 0) \,\} \text{ — неотрицательные интервалы,} \\ \mathcal{Z} &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\boldsymbol{x}} \leq 0 \leq \overline{\boldsymbol{x}} \,\} \text{ — нульсодержащие интервалы,} \\ -\mathcal{P} &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{KR} \mid -\boldsymbol{x} \in \mathcal{P} \,\} \text{ — неположительные интервалы,} \\ \operatorname{dual}\mathcal{Z} &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{KR} \mid \operatorname{dual}\boldsymbol{x} \in \mathcal{Z} \,\} \text{ — интервалы, содержащиеся в нуле.} \end{aligned}$$

В целом $\mathbb{KR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup (-\mathcal{P}) \cup (\operatorname{dual}\mathcal{Z})$, и умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано с помощью табл. 1 [18, 20]. Из нее, в частности, видно, что это умножение допускает нетривиальные делители нуля. Например, $[\,-1,\, 2\,] \cdot [\,5,\, -3\,] = 0$. Интервальное умножение в арифметике Каухера оказывается коммутативным и ассоциативным [18, 20], как и в классической интервальной арифметике, но группу по умножению в $\mathbb{KR}$ образуют лишь интервалы $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющие условию $\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}} > 0$, т. е. не содержащие нуль и не содержащиеся в нуле интервалы.

Любой интервал $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$, не содержащий нуля и не содержащийся в нем (т. е. такой, что $\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}} > 0$), имеет единственный алгебраически обратный, который обозначим $\operatorname{inv}\boldsymbol{x}$. При этом из соотношения $\boldsymbol{x} \cdot \operatorname{inv}\boldsymbol{x} = 1$ следует

$$\operatorname{inv}\boldsymbol{x} = \left[\frac{1}{\underline{\boldsymbol{x}}}, \frac{1}{\overline{\boldsymbol{x}}}\right].$$

Т а б л и ц а 1. Умножение в полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$

$\cdot$	$\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}$	$\boldsymbol{y} \in \mathcal{Z}$	$\boldsymbol{y} \in -\mathcal{P}$	$\boldsymbol{y} \in \operatorname{dual}\mathcal{Z}$
$\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$	$[\,\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\,\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\,]$
$\boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}$	$[\,\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\},$ $\max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\}\,]$	$[\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\,]$	0
$\boldsymbol{x} \in -\mathcal{P}$	$[\,\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\,\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\,]$
$\boldsymbol{x} \in \operatorname{dual}\mathcal{Z}$	$[\,\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\,]$	0	$[\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\,]$	$[\max\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}\},$ $\min\{\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{x}}\,\underline{\boldsymbol{y}}\}\,]$

Взаимосвязь сложения и умножения в арифметике Каухера выражается следующими соотношениями:

$$\text{если } \boldsymbol{x} \text{ правильный, то } \ \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) \subseteq \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} \text{ — субдистрибутивность,} \tag{11}$$

$$\text{если } \boldsymbol{x} \text{ неправильный, то } \ \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) \supseteq \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} \text{ — супердистрибутивность.} \tag{12}$$

В нашей работе важную роль будут играть операции

$$\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y} \ := \ \sup{}_{\subseteq}\{\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\,\} = \bigl[\,\min\{\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\},\ \max\{\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}\}\,\bigr]\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y} \ := \ \inf{}_{\subseteq}\{\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\,\} = \bigl[\,\max\{\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\},\ \min\{\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}}\}\,\bigr] \ \text{—} \tag{14}$$

взятие соответственно верхней и нижней грани относительно порядка “$\subseteq$”. $\mathbb{KR}$ является решеткой относительно этих операций, тогда как $\mathbb{IR}$ была неполна относительно операции взятия минимума. Если интервал $\boldsymbol{x}$ правилен, то он представляется в виде

$$\boldsymbol{x} = \bigvee_{x\in\boldsymbol{x}} x,$$

а если $\boldsymbol{x}$ неправилен, то

$$\boldsymbol{x} = \bigwedge_{x\in\operatorname{dual}\boldsymbol{x}} x\,.$$

В общем случае для результата любой арифметической операции $\star\in\{\,+,-,\cdot\,,/\,\}$ в $\mathbb{KR}$ имеет место представление

$$\boldsymbol{x}\star\boldsymbol{y} \ = \ \bigvee\!\!\!\!\bigwedge{}_{x}^{\boldsymbol{x}} \ \bigvee\!\!\!\!\bigwedge{}_{y}^{\boldsymbol{y}} \ (x\star y), \tag{15}$$

где

$$\bigvee\!\!\!\!\bigwedge{}_{x}^{\boldsymbol{x}} := \begin{cases} \displaystyle\bigvee_{x\in\boldsymbol{x}}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ правильный,} \\ \displaystyle\bigwedge_{x\in\operatorname{dual}\boldsymbol{x}}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ неправильный, —} \end{cases}$$

так называемая условная операция взятия экстремума по включению, зависящая от интервального параметра $\boldsymbol{x}$, выписанного справа сверху ее символа. Она является либо максимумом, либо минимумом по включению “$\subseteq$” в зависимости от того, правилен или неправилен $\boldsymbol{x}$. При этом экстремум берется по всем x из правильной проекции интервала $\boldsymbol{x}$. Представление (15), впервые полученное в [18], выражает связь между результатом интервальной операции $\boldsymbol{x}\star\boldsymbol{y}$ и результатами точечных операций $x\star y$ для $x\in\operatorname{pro}\boldsymbol{x}$ и $y\in\operatorname{pro}\boldsymbol{y}$. Формулу (15) можно даже взять за основу для определения арифметических операций в полной интервальной арифметике (см. [22]).

Операции взятия нижней и верхней граней по включению (13) – (14) обладают рядом полезных свойств, на которые мы будем опираться в дальнейшем в работе. Во-первых, несложными выкладками можно убедиться, что для любого скаляра $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\lambda\,(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}) \ = \ (\lambda\boldsymbol{x})\vee(\lambda\boldsymbol{y}), \tag{16}$$

$$\lambda\,(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) \ = \ (\lambda\boldsymbol{x})\wedge(\lambda\boldsymbol{y}). \tag{17}$$

Далее, справедливы следующие дистрибутивные свойства сложения по отношению к операциям взятия нижней и верхней граней (см. [18, 20]):

$$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}\vee\boldsymbol{z}) \ = \ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\vee(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}) \ = \ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\wedge(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}). \tag{19}$$

Для умножения точные дистрибутивности в общем случае не имеют места, но, как показывается в [23],

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\vee\boldsymbol{z}) \;&=\; \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\vee\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}) \;&\subseteq\; \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}, \end{aligned} \tag{20}$$

если $\boldsymbol{x}$ — правильный интервал, и

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\vee\boldsymbol{z}) \;&\supseteq\; \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\vee\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}) \;&=\; \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}, \end{aligned} \tag{21}$$

если $\boldsymbol{x}$ — неправильный. Существует, тем не менее, важный частный случай дистрибутивностей максимума и минимума по умножению, относящийся к операндам и результату этой интервальной арифметической операции:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \Bigl(\bigvee_{x\in\boldsymbol{x}} x\Bigr)\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \bigvee_{x\in\boldsymbol{x}}(x\boldsymbol{y}) \text{ — если } \boldsymbol{x} \text{ правильный,} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \Bigl(\bigwedge_{x\in\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}} x\Bigr)\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \bigwedge_{x\in\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}}(x\boldsymbol{y}) \text{ — если } \boldsymbol{x} \text{ неправильный.} \tag{23}$$

Обоснование этих равенств нетрудно получается из представления (15) и соотношений (16), (17). Отличие равенств (22) – (23) от предшествующих включений (20) – (21) можно понять, приняв во внимание тот факт, что (22) – (23) получаются при взятии максимума или минимума по точечным представителям из целого интервала, т. е. при весьма специальных условиях на эти экстремумы.

Результаты композиции основных инволюций на множестве $\mathbb{KR}$, т. е. $\mathrm{id}(\,\cdot\,)$ — тождественного отображения, $-(\,\cdot\,)$ — умножения на (-1), $\mathrm{opp}(\,\cdot\,)$ — взятия алгебраически противоположного элемента, $\mathrm{dual}(\,\cdot\,)$ — дуализации, описаны в табл. 2. Ее анализ показывает, что множество инволюций арифметки $\mathbb{KR}$ образует относительно операции композиции так называемую четверную группу Клейна [24]. В частности, для любого $\boldsymbol{x}\in\mathbb{KR}$

$$-\mathrm{opp}\,\boldsymbol{x} \;=\; \mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}. \tag{24}$$

Нетрудно обосновывается также следующее важное соотношение:

$$\mathrm{inv}\,(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}) \;=\; 1/\boldsymbol{x}, \tag{25}$$

справедливое для всех интервалов $\boldsymbol{x}\in\mathbb{KR}$, удовлетворяющих $\underline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{x}} > 0$. Наконец, отметим, что

$$\mathrm{dual}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathrm{dual}\,\boldsymbol{x} + \mathrm{dual}\,\boldsymbol{y}, \quad \mathrm{dual}\,(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = \mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{dual}\,\boldsymbol{y}. \tag{26}$$

Т а б л и ц а 2. Композиция инволюций в арифметике $\mathbb{KR}$

$\circ$	id	—	opp	dual
id	id	—	opp	dual
—	—	id	dual	opp
opp	opp	dual	id	—
dual	dual	opp	—	id

Интервальные матрично-векторные операции в полной интервальной арифметике Каухера определяются аналогично операциям над векторами и матрицами с элементами из $\mathbb{IR}$. Сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов. Если $\boldsymbol{X} = (\,\boldsymbol{x}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m\times l}$ и $\boldsymbol{Y} = (\,\boldsymbol{y}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l\times n}$, то произведение матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ есть матрица $\boldsymbol{Z} = (\,\boldsymbol{z}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m\times n}$ такая, что

$$\boldsymbol{z}_{ij} := \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{x}_{ik}\boldsymbol{y}_{kj}.$$

Произведением скалярного интервала $\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR}$ на интервальную матрицу $\boldsymbol{Y} = (\,\boldsymbol{y}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m\times n}$ назовем интервальную матрицу из $\mathbb{KR}^{m\times n}$, обозначаемую $\boldsymbol{xY}$ и такую, что $(\boldsymbol{xY})_{ij} = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}_{ij}$. Подобным же образом определяется и произведение интервальной матрицы на интервал-скаляр.

В работе будем пользоваться следующим терминологическим соглашением: интервальный вектор или матрица называются *правильными*, если их компонентами (элементами) являются только правильные интервалы, т. е. принадлежащие $\mathbb{IR}$.

На многомерных интервальных пространствах $\mathbb{IR}^n$ и $\mathbb{KR}^n$ топология может быть определена двумя способами. Стандартный способ — введение обычной метрики

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ := \ \max\{\|\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\|, \|\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}\|\}, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{KR}^n, \tag{27}$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая векторная норма на $\mathbb{R}^n$. Для пространства $\mathbb{IR}^n$ эта метрика совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как брусами в $\mathbb{R}^n$, порождаемым нормой $\|\cdot\|$. Но иногда бывает полезно работать с векторнозначным расстоянием — *мультиметрикой*, которая вводится на $\mathbb{IR}^n$ и $\mathbb{KR}^n$ как

$$\operatorname{Dist}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ := \ \begin{pmatrix} \operatorname{dist}(\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1) \\ \vdots \\ \operatorname{dist}(\,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+. \tag{28}$$

Те же конструкции очевидным образом переносятся на множества интервальных матриц $\mathbb{IR}^{m\times n}$ и $\mathbb{KR}^{m\times n}$.

5. Оценки решений линейных систем

Продолжим преобразование соотношений (7) – (8). Пусть рассматриваемая система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с матрицей $A = (a_{ij})$ и правой частью $b = (b_i)$ такова, что $a_{ii} \geq 0$ для данного индекса i, и потому имеет место первая пара (7) из соотношений (7) – (8). Расписывая определение неотрицательности и неположительности интервалов, нетрудно вывести, что оно эквивалентно неравенствам

$$\overline{\left(a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad \underline{\left(a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \geq 0,$$

которые, в свою очередь, означают, что

$$\overline{\left(a_{ii}\cdot\overline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad \underline{\left(a_{ii}\cdot\underline{\operatorname{dual}\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \geq 0 \tag{29}$$

в силу очевидных соотношений

$$\underline{\boldsymbol{X}}_i = \overline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{X}}_i = \underline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i}. \tag{30}$$

С учетом знака a_{ii} и определения (10) справедливы равенства

$$a_{ii} \cdot \underline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}}_i = \underline{a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i} \quad \text{и} \quad a_{ii} \cdot \overline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}}_i = \overline{a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i},$$

поэтому неравенства (29) равносильны следующим:

$$\overline{\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \leq 0 \quad \text{и} \quad \underline{\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \geq 0. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь случай $a_{ii} \leq 0$, при котором имеет место вторая пара (8) из соотношений (7) – (8). Их можно переписать в виде неравенств

$$\underline{\left(a_{ii}\underline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \overline{\left(a_{ii}\overline{\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \leq 0,$$

или

$$\underline{\left(a_{ii} \cdot \overline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \overline{\left(a_{ii} \cdot \underline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \leq 0, \tag{32}$$

принимая во внимание те же очевидные соотношения (30). Поскольку $a_{ii} \leq 0$, то в силу (10) справедливы равенства

$$a_{ii} \cdot \overline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}}_i = \underline{a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i} \quad \text{и} \quad a_{ii} \cdot \underline{\mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}}_i = \overline{a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i},$$

следовательно, (32) равносильно

$$\underline{\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \overline{\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right)} - b_i \leq 0.$$

Как видно, эти соотношения совпадают с (31), которые были получены для $a_{ii} \geq 0$. Поэтому в целом, вне зависимости от знака элемента a_{ii}, в полной интервальной арифметике $\mathbb{KR}$ имеем следующее предложение.

Предложение 1. *Если брус* $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n)^\top$ *удовлетворяет условиям*

$$\left(a_{ii} \cdot \mathrm{dual}\,\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right) - b_i \subseteq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{33}$$

то он содержит решение системы линейных уравнений $Ax = b$ *с* $n \times n$*-матрицей* $A = (a_{ij})$ *и* n*-вектором правой части* $b = (b_i)$.

Заметим, что необходимым условием существования телесного бруса $\boldsymbol{X}$, т. е. такого, что $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{X}_j > 0$ для $j = 1, 2, \dots, n$, который удовлетворяет Предложению 1, является неравенство нулю всех диагональных элементов: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Действительно, если какое-то $a_{kk} = 0$, то в левой части соответствующего включения (33) будем иметь выражение

$$\sum_{j \neq k} a_{kj} \boldsymbol{X}_j - b_k,$$

которое является правильным интервалом или вещественным числом. Его включение в нулевой интервал, согласно определению (9), невозможно, если $a_{kj} \neq 0$ хотя бы для одного $j = 1, 2, \ldots, n$. Указанному условию удовлетворяют, в частности, линейные системы $Ax = b$ с неособенными матрицами A (такими, что $\det A \neq 0$), в каждой строке которых должны находиться ненулевые элементы. С другой стороны, если в исходной системе уравнений матрица A неособенна, то ясно, что путем перестановки уравнений или же перенумерацией переменных (это сответствует перестановке строк и/или столбцов в матрице A) нетрудно сделать все диагональные элементы ненулевыми.

6. Оценки для интервальных линейных систем

Перейдем далее к интервальной линейной системе уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Коль скоро она является семейством точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, а множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ есть объединение решений всех точечных систем $Ax = b$, то, основываясь на Предложении 1, можно получить достаточный признак того, что брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений интервальной линейной системы:

Предложение 2. *Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ — интервальная матрица, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ и $\boldsymbol{X} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальные векторы. Если для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место включение*

$$\left(\boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{X}_j \right) - \boldsymbol{b}_i \subseteq 0,$$

то брус $\boldsymbol{X}$ содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Доказательство. Для всякого фиксированного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ по определению интервальных арифметических операций в $\mathbb{KR}$ и в силу (18) и (22) имеем

$$\boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_i =$$

$$= \left(\bigvee_{a_{ii} \in \boldsymbol{a}_{ii}} a_{ii} \right) \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \neq i} \left(\bigvee_{a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}} a_{ij} \right) \boldsymbol{X}_j - \left(\bigvee_{b_i \in \boldsymbol{b}_i} b_i \right) =$$

$$= \bigvee_{a_{ii} \in \boldsymbol{a}_{ii}} (a_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i) + \sum_{j \neq i} \bigvee_{a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}} (a_{ij} \boldsymbol{X}_j) - \left(\bigvee_{b_i \in \boldsymbol{b}_i} b_i \right) =$$

$$= \bigvee_{a_{ii} \in \boldsymbol{a}_{ii}} \; \bigvee_{\substack{a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} \\ j \neq i}} \; \bigvee_{b_i \in \boldsymbol{b}_i} \left(a_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} \boldsymbol{X}_j - b_i \right) =$$

$$= \bigvee_{\substack{a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} \\ j = 1, \ldots, n}} \; \bigvee_{b_i \in \boldsymbol{b}_i} \left(a_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{X}_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} \boldsymbol{X}_j - b_i \right). \tag{34}$$

Следовательно, если

$$\left(\boldsymbol{a}_{ii}\cdot \operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{X}_j\right) - \boldsymbol{b}_i \;\subseteq\; 0,$$

то включение (33)

$$\left(a_{ii}\cdot \operatorname{dual}\boldsymbol{X}_i + \sum_{j\neq i}a_{ij}\boldsymbol{X}_j\right) - b_i \;\subseteq\; 0$$

должно выполняться для всех $a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$ и $b_i \in \boldsymbol{b}_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. для всех точечных линейных систем, содержащихся в $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. В противном случае максимум по отношению включения “$\subseteq$” от выражений, стоящих в левой части (33), не был бы включен в нуль. Как следствие, принимая во внимание результат Предложения 1, можно утверждать, что брус $\boldsymbol{X}$ действительно содержит все решения точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. ■

Напомним теперь следующее определение.

Определение. *Формальное решение интервальной системы уравнений*

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(\,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_l,x_1,\ldots,x_n) = \boldsymbol{b}_1,\\ F_2(\,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_l,x_1,\ldots,x_n) = \boldsymbol{b}_2,\\ \;\vdots\quad\vdots\qquad\ddots\;\ddots\qquad\vdots\qquad\vdots\\ F_m(\,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_l,x_1,\ldots,x_n) = \boldsymbol{b}_m \end{array}\right. \tag{35}$$

с интервальными параметрами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ *— это интервальный вектор* $\boldsymbol{x} = (\,\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\,)^\top$, *обращающий систему в равенство после подстановки в нее и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики и прочих операций, входящих в выражения для* F_i.

Таким образом, формальное решение интервальных систем — это объект, соответствующий обычному математическому понятию решения уравнения, но рассматриваемому в экзотической алгебраической системе — интервальной арифметике, в качестве которой могут выступать в зависимости от рассматриваемой задачи либо классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$, либо полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, либо какая-то другая интервальная алгебраическая система.

Отметим, что согласно традиции неизвестная переменная в интервальных уравнениях вида (35), как и в других встречающихся ниже уравнениях, специально не выделяется, а тип решения подчеркивается дополнительными характеристиками. В частности, если все компоненты формального решения являются правильными интервалами, то будем называть его *правильным формальным решением* интервальной системы уравнений.

Заменяя в формулах (33) включение на равенство и привлекая понятие формального решения, можно придать результату Предложения 2 следующий менее общий, но более удобный в вычислительном отношении вид (Предложение 3).

Предложение 3. *Пусть интервальный оператор* $\mathcal{S} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$, *зависящий от параметров* $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ *и* $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$, *действует по правилу*

$$\boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_1 + \sum\limits_{j \neq 1} \boldsymbol{a}_{1j} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{22} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_2 + \sum\limits_{j \neq 2} \boldsymbol{a}_{2j} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_{nn} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_n + \sum\limits_{j \neq n} \boldsymbol{a}_{nj} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix},$$

т. е. задается покомпонентно как

$$\mathcal{S}_i(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_{ii} \cdot \operatorname{dual} \boldsymbol{x}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{36}$$

Правильное формальное решение интервальной системы уравнений

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = 0 \tag{37}$$

содержит множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Например, для интервальной линейной системы Хансена [25]

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}, \tag{38}$$

множество решений которой изображено на рис. 2, соответствующая система уравнений (36) – (37) имеет вид

$$\begin{cases} [2,3] \cdot \operatorname{dual} x_1 + [0,1]\, x_2 - \ [0,120] \ = 0, \\ [1,2]\, x_1 + [2,3] \cdot \operatorname{dual} x_2 - [60,240] = 0, \end{cases}$$

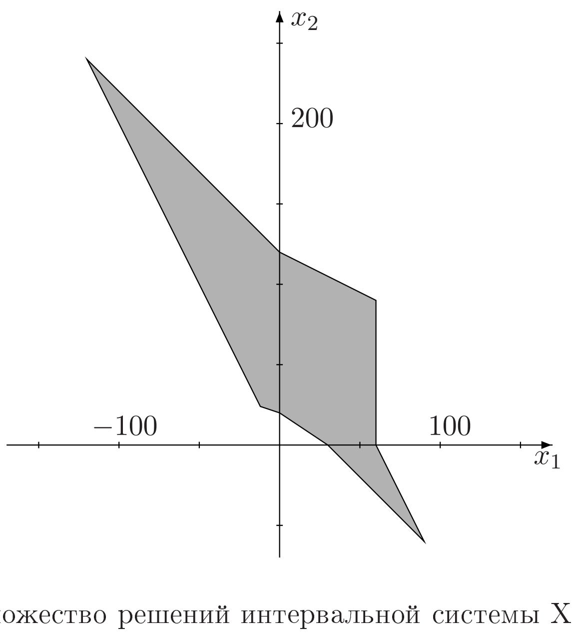

Рис. 2. Множество решений интервальной системы Хансена (38)

или, что равносильно,

$$\begin{cases} [2,3]\cdot \operatorname{dual} x_1 + [0,1]\, x_2 = \ [120,0], \\ [1,2]\, x_1 + [2,3]\cdot \operatorname{dual} x_2 = [240,60]. \end{cases}$$

Ее формальное решение есть интервальный вектор $([-120,90],[-60,240])^\top$, который является наименьшим по включению брусом, содержащим множество решений, т. е. оптимальной (наилучшей) внешней оценкой множества решений системы (38). В общем случае рассматриваемый подход дает, конечно, не столь точные оценки, и вопрос о качестве оценивания будет подробно рассмотрен ниже в разделе 9.

Итак, нахождение внешней оценки множества решений исходной ИСЛАУ свелось к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений. Задача нахождения формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача решения некоторого уравнения, хотя и рассматриваемая в непривычной алгебраической системе $\mathbb{KR}$. Соответствующий общий подход к задачам оценивания множеств решений, сводящий исходную постановку к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений, называется, как известно, *формальным подходом* [7, 19, 26] (иногда его называют также “формально-алгебраическим подходом”, можно также встретить термин “алгебраический подход”). Это весьма общая методика, которая может реализовываться различными конкретными способами в зависимости от конструкции вспомогательной интервальной системы уравнений и численного метода поиска ее формального решения. Отличительной особенностью формального подхода является его универсальность: как общая теоретическая схема подхода, так и соответствующие численные методы с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания даже более общих, чем объединенное, множеств решений (см. [5 – 8, 27, 28]).

Для решения рассматриваемой задачи (4) формальный подход применяется с середины 1990-х годов (см. [19, 21, 26]), и его традиционной основой служили следующие классические результаты, которые мы приводим в современной и несколько расширенной формулировке.

Лемма. *Пусть Λ — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ совпадает с множеством решений интервальной системы*

$$x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}, \tag{39}$$

где $\boldsymbol{G} = I - \Lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{h} = \Lambda\boldsymbol{b}$.

Теорема Апостолатоса — Кулиша [29 – 31]. *Если матрица $\boldsymbol{G} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что спектральный радиус матрицы, составленной из модулей ее элементов, меньше единицы, т. е. $\rho(|\boldsymbol{G}|) < 1$, то интервальная линейная система уравнений $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$ имеет единственное правильное формальное решение в $\mathbb{IR}^n$. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса*

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при любом начальном векторе $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и является внешней интервальной оценкой множества решений $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists G \in \boldsymbol{G})(\exists h \in \boldsymbol{h})(\, x = Gx + h\,)\,\}$ рассматриваемой интервальной системы.

Аналитические выражения, которые составлены из символов переменных, констант, четырех арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и элементарных функций, будем называть *элементарными функциональными выражениями*. Обобщением теоремы Апостолатоса — Кулиша на системы нелинейных уравнений является теорема Алефельда — Херцбергера.

Теорема Алефельда — Херцбергера [1]. *Пусть в интервальной системе уравнений*

$$x = G(\boldsymbol{a}, x) \tag{40}$$

отображение $G : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$*, действующее по правилу* $\boldsymbol{x} \mapsto G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$*, является* P*-сжимающим, т. е.*

$$\mathrm{Dist}\,\big(G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})\big) \leq P \cdot \mathrm{Dist}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

с такой неотрицательной матрицей P*, что* $\rho(P) < 1$*, и выражения для компонент* $G_i(\boldsymbol{a}, x)$ *являются элементарными функциональными выражениями, определенными для рассматриваемых значений аргументов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{x}$*. Тогда правильное формальное решение интервальной системы уравнений* (40) *существует, единственно и является внешней интервальной оценкой ее множества решений* $\Xi(G, \boldsymbol{a}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \boldsymbol{a})(x = G(a, x))\}$.

Результат Предложения 3 дает еще один, отличный от теоремы Апостолатоса — Кулиша, способ сведения внешней задачи (4) к нахождению формального решения некоторой специальной интервальной системы уравнений. Он не является абсолютно новым и ранее уже был получен в работе испанских математиков М.А. Сайнца, Э. Гарденьеса и Л. Джорбы [28], но в несколько другой форме и с помощью длинных и малоочевидных рассуждений, использующих технику так называемого модального интервального анализа. Выше мы привели другой, прозрачный вывод этого факта. Будем называть впредь результат Предложения 3 *испанской версией* формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем.

Путем перестановки уравнений (эквивалентной перестановке строк матрицы $\boldsymbol{A}$ и компонент в векторе правой части $\boldsymbol{b}$) результату Предложения 3 можно придать следующую форму: если интервальный вектор $\boldsymbol{x}^*$ является правильным формальным решением интервальной системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{\eta}_1(x_1) & + & \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{\eta}_1(x_2) & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{\eta}_1(x_n) & = & \boldsymbol{b}_1, \\
\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{\eta}_2(x_1) & + & \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{\eta}_2(x_2) & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}\boldsymbol{\eta}_2(x_n) & = & \boldsymbol{b}_2, \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{a}_{n1}\boldsymbol{\eta}_n(x_1) & + & \boldsymbol{a}_{n2}\boldsymbol{\eta}_n(x_2) & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{nn}\boldsymbol{\eta}_2(x_n) & = & \boldsymbol{b}_n,
\end{array}\right. \tag{41}$$

в которой отображения $\boldsymbol{\eta}_i : \mathbb{KR} \to \mathbb{KR}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таковы, что

— для каждого i значение $\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{x}_j)$ равно $\boldsymbol{x}_j$ для одного из $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}_j$ для всех остальных индексов j,

— для каждого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ равенство $\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{x}_j$ выполняется в точности для одного i,

то $\boldsymbol{x}^* \supseteq \Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, т. е. $\boldsymbol{x}^*$ есть внешняя интервальная оценка множества решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Именно в таком виде результат о внешнем оценивании Предложения 3 фигурирует в работах [27, 28].

7. Вычисление формальных решений

На эффективность развиваемого здесь подхода основное влияние имеет способ нахождения формальных решений интервальных систем уравнений вида (36) – (37).

В работе [27], где впервые была рассмотрена эта система уравнений, для вычисления ее формального решения предлагается стационарный итерационный метод типа Якоби, основанный на выделении из матрицы ИСЛАУ диагональной компоненты. Недостаток этого метода — линейная сходимость (подобная сходимости геометрической прогрессии), которая для некоторых интервальных линейных систем может быть весьма медленной. Фактически для оценивания объединенного множества решений подобный способ ничем не лучше традиционных интервальных стационарных итерационных алгоритмов, не использующих выход в интервальную арифметику Каухера (см. [1, 3, 11, 32]). Таким, к примеру, является популярный метод Кравчика [3, 7].

Кроме того, в [27] рассматривается возможность сведения задачи нахождения формального решения интервальных систем к оптимизационной задаче минимизации невязки. Этот путь весьма невыгоден, так как получающаяся целевая функция является негладкой, и ее глобальные свойства трудно поддаются исследованию. Соответственно, выбор оптимизационных методов в этой ситуации весьма узок, а их сходимость в общем случае проблематична.

Мы пойдем другим путем и воспользуемся техникой погружения интервального пространства в евклидово пространство двойной размерности [7, 8, 19]. Ее назначение состоит в том, чтобы перейти из “нелинейного” интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство, только в котором и применимы многие математические концепции, составляющие основу современных вычислительных методов (в частности, дифференцирование и выпуклость). Этот переход может быть осуществлен с помощью любого взаимно-однозначного отображения $\mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ — так называемого *погружения*, и его конкретный выбор обычно диктуется соображениями удобства и наиболее аккуратного сохранения свойств рассматриваемых объектов при переходе в новое пространство. В частности, имеет смысл задавать погружение $\mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ так, чтобы оно являлось изоморфизмом аддитивных групп пространств $\mathbb{KR}^n$ и $\mathbb{R}^{2n}$.

Отображение $\mathrm{sti} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, задаваемое правилом

$$\mathrm{sti}\left((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top\right) = (-\underline{\boldsymbol{x}}_1, -\underline{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, -\underline{\boldsymbol{x}}_n, \overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_n)^\top,$$

называют *стандартным погружением* интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ [7, 19, 26]. Оно особенно удобно потому, что частичный порядок по включению в $\mathbb{KR}^n$ переводится им в покомпонентный порядок на линейном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Иными словами,

$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \ \text{ в } \mathbb{KR}^n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sti}\,(\boldsymbol{x}) \leq \mathrm{sti}\,(\boldsymbol{y}) \ \text{ в } \mathbb{R}^{2n},$$

где для $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ неравенство $u \leq v$ понимается как $u_i \leq v_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Легко также убедиться в том, что

$$\mathrm{sti}\,(\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y}) = \mu\,\mathrm{sti}\,(\boldsymbol{x}) + \nu\,\mathrm{sti}\,(\boldsymbol{y}).$$

Интересующему нас отображению $\mathcal{S} : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n$ стандартное погружение сопоставляет такое отображение $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, что

$$\mathfrak{S} = \mathrm{sti} \circ \mathcal{S} \circ \mathrm{sti}^{-1}, \tag{42}$$

которое будем называть *индуцированным*. Наиболее важное практическое следствие погружения состоит в том, что нахождение формального решения уравнения (36) – (37) в $\mathbb{KR}^n$ может быть заменено на решение *индуцированного уравнения* $\mathfrak{S}(x) = 0$ в привычном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.

Индуцированное отображение $\mathfrak{S}$, очевидно, непрерывно по x и по параметрам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ в силу непрерывности стандартного погружения sti, операции дуализации и интервальных арифметических операций сложения, вычитания и умножения в $\mathbb{KR}$.

Напомним следующее определение.

Определение [33 – 35]. *Пусть евклидово пространство $\mathbb{R}^q$ упорядочено частичным порядком "$\preccurlyeq$". Отображение $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ называется порядково выпуклым относительно "$\preccurlyeq$", если*

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \preccurlyeq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)$$

для любых u, $v \in \mathbb{R}^p$ и $\lambda \in [0,1]$.

Наиболее важное свойство индуцированного отображения $\mathfrak{S}$ дает Предложение 4.

Предложение 4. *Если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, то индуцированное отображение $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, определенное посредством (42), является порядково выпуклым в $\mathbb{R}^{2n}$ относительно покомпонентного упорядочения векторов "$\leq$".*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}'' \in \mathbb{KR}^n$. Тогда для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ в силу (26) и субдистрибутивности умножения по сложению (11) справедлива следующая цепочка преобразований:

$$\mathcal{S}_i\big(\lambda \boldsymbol{x}' + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''\big) =$$

$$= \boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\big(\lambda \boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''_i\big) + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{a}_{ij}\big(\lambda \boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''_i\big) - \boldsymbol{b}_i \subseteq$$

$$= \lambda\, \boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\,\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}''_i \;+ \sum_{j\neq i}\big(\lambda \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}'_i + (1-\lambda)\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}''_i\big) - \boldsymbol{b}_i =$$

$$= \lambda\left(\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}'_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{b}_i\right) \;+\; (1-\lambda)\left(\boldsymbol{a}_{ii}\,\mathrm{dual}\,\boldsymbol{x}''_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}''_i - \boldsymbol{b}_i\right) =$$

$$= \lambda\,\mathcal{S}_i(\boldsymbol{x}') + (1-\lambda)\,\mathcal{S}_i(\boldsymbol{x}'').$$

Следовательно, по определению порядка "$\subseteq$" на $\mathbb{KR}$

$$\underline{\mathcal{S}_i\big(\lambda \boldsymbol{x}' + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''\big)} \;\;\geq\;\; \lambda\;\underline{\mathcal{S}_i(\boldsymbol{x}')} + (1-\lambda)\;\underline{\mathcal{S}_i(\boldsymbol{x}'')}, \tag{43}$$

$$\overline{\mathcal{S}_i\big(\lambda \boldsymbol{x}' + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''\big)} \;\;\leq\;\; \lambda\;\overline{\mathcal{S}_i(\boldsymbol{x}')} + (1-\lambda)\;\overline{\mathcal{S}_i(\boldsymbol{x}'')}. \tag{44}$$

Если векторы $x', x'' \in \mathbb{R}^{2n}$ таковы, что

$$x' = \mathrm{sti}\,(\boldsymbol{x}') \quad \text{и} \quad x'' = \mathrm{sti}\,(\boldsymbol{x}''),$$

то

$$\mathrm{sti}^{-1}(x') = \boldsymbol{x}' \quad \text{и} \quad \mathrm{sti}^{-1}(x'') = \boldsymbol{x}'',$$

и поэтому

$$\mathfrak{S}\big(\lambda x' + (1-\lambda)x''\big) = \mathrm{sti}\,\Big(\mathcal{S}\big(\lambda \boldsymbol{x}' + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''\big)\Big).$$

Привлекая определение стандартного погружения, с учетом (43) – (44) получим соотношения

$$\mathfrak{S}_i\bigl(\lambda x' + (1-\lambda)x''\bigr) = -\,\underline{\mathbb{S}_i\bigl(\lambda \boldsymbol{x}' + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''\bigr)} \leq -\lambda\ \underline{\mathbb{S}_i(\boldsymbol{x}')} - (1-\lambda)\ \underline{\mathbb{S}_i(\boldsymbol{x}'')} =$$
$$= \lambda\ \mathfrak{S}_i(\boldsymbol{x}') + (1-\lambda)\ \mathfrak{S}_i(\boldsymbol{x}'') \quad \text{при } 1 \leq i \leq n,$$
$$\mathfrak{S}_i\bigl(\lambda x' + (1-\lambda)x''\bigr) = \overline{\mathbb{S}_i\bigl(\lambda \boldsymbol{x}' + (1-\lambda)\boldsymbol{x}''\bigr)} \leq \lambda\ \overline{\mathbb{S}_i(\boldsymbol{x}')} + (1-\lambda)\ \overline{\mathbb{S}_i(\boldsymbol{x}'')} =$$
$$= \lambda\ \mathfrak{S}_i(\boldsymbol{x}') + (1-\lambda)\ \mathfrak{S}_i(\boldsymbol{x}'') \quad \text{при } n+1 \leq i \leq 2n.$$

Это и требовалось доказать. ■

Порядковая выпуклость индуцированного отображения $\mathfrak{S}$ влечет существование его субдифференциала $\partial\mathfrak{S}$ всюду в $\mathbb{R}^{2n}$ [33]. Можно показать и большее: $\mathfrak{S}$ является полиэдральным отображением, т. е. таким, что его график “склеен” из кусков гиперплоскостей. Следовательно, для нахождения решений индуцированного уравнения $\mathfrak{S}(x) = 0$ в $\mathbb{R}^{2n}$ имеет смысл применить субдифференциальный метод Ньютона, развитый ранее для задач подобного сорта и успешно зарекомендовавший себя (см., в частности, [7, 19, 21, 36]):

Субдифференциальный метод Ньютона
для решения уравнения (36) – (37)

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Если $(k-1)$-е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \ldots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения $\mathfrak{S}$ в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} := x^{(k-1)} - \tau\,\bigl(D^{(k-1)}\bigr)^{-1}\,\mathfrak{S}(\,x^{(k-1)}),$$

где $\tau \in\,]0,1]$ — некоторая константа.

Нетривиальным моментом реализации субдиффренциального метода Ньютона является выбор начального приближения. Вычислительные эксперименты показывают, что он сходится из любого начального приближения, но количество итераций до сходимости при этом возрастает. Эмпирическим путем было установлено [19, 21], что для алгоритма, вычисляющего формальное решение уравнения в рекуррентном виде (40), наиболее выгодный выбор начального приближения — это решение “средней” системы уравнений $(\operatorname{mid} \boldsymbol{A})\, x = \operatorname{mid} \boldsymbol{b}$.

Реализация и численные эксперименты (см. раздел 10) показывают, что в рассматриваемом случае субдифференциальный метод Ньютона работает хорошо, причем при $\tau = 1$ он в большинстве случаев находит формальные решения уравнения (36) – (37) за небольшое конечное число итераций. В частности, метод по своей эффективности качественно превосходит стационарные итерационные методы типа Якоби, предложенные для решения аналогичной задачи в [27]. К примеру, для системы Хансена (38) точное формальное решение уравнения (36) – (37) вычисляется субдифференциальным методом Ньютона всего за три итерации.

8. Условия существования правильного формального решения

К сожалению, даже когда множество решений ИСЛАУ непусто, формальное решение уравнения (36) – (37) часто не существует или не является правильным. В последнем случае оно не может быть проинтерпретировано согласно Предложению 3. Например, для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [2,3] & [0,1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [60,240] \\ [0,120] \end{pmatrix}, \tag{45}$$

которая получена перестановкой местами уравнений в системе Хансена (38) и имеет то же самое множество решений (см. рис. 2), формальным решением вспомогательной системы (36) – (37) является неправильный интервальный вектор $([90,-120],[240,-60])^\top$ (субдифференциальный метод Ньютона успешно находит его за четыре итерации). Исследуем это затруднение более тщательно.

Прежде всего отметим, что если какой-нибудь из диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ содержит нуль, то формальное решение уравнения (36) – (37) не может быть правильным. Покажем, что в этом случае соответствующие выражения (36) будут правильными интервалами, которые не могут включаться в нуль.

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — искомое формальное решение. Воспользуемся представлением (34):

$$\boldsymbol{a}_{ii}\cdot \operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*_i + \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}^*_j - \boldsymbol{b}_i \quad = \quad \bigvee_{\substack{a_{ij}\in\boldsymbol{a}_{ij}\\ j=1,\dots,n}} \ \bigvee_{b_i\in\boldsymbol{b}_i} \left(a_{ii}\cdot \operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{X}_j - b_i \right),$$

$i=1,2,\dots,n$. Если какой-либо из $\boldsymbol{a}_{ii}$ является нульсодержащим интервалом, то соответствующее ему выражение в правой части выписанного равенства содержит

$$\bigvee_{\substack{a_{ij}\in\boldsymbol{a}_{ij}\\ j\neq i}} \ \bigvee_{b_i\in\boldsymbol{b}_i} \left(0\cdot \operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}\boldsymbol{x}^*_j - b_i \right) \ = \ \sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}^*_j - \boldsymbol{b}_i,$$

т. е. правильный интервал, который может быть равен нулю (имеющему нулевой радиус) в уравнении (37) лишь в исключительных случаях, когда равны нулю радиусы суммы $\sum_{j\neq i}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x}^*_j$ и компоненты правой части $\boldsymbol{b}_i$. Не будем выписывать строгую формулировку этих условий, так как они неизбежно должны носить *апостериорный* характер, т. е. использовать знание вычисленного формального решения $\boldsymbol{x}^*$, что неизбежно снижает их практическую ценность. Впредь условимся (не вполне строго) считать, что отсутствие нульсодержащих диагональных элементов в матрице исходной системы (1) – (2) является необходимым условием существования правильных формальных решений системы (36) – (37).

Итак, феномен системы (45) получает следующее объяснение: в исходной интервальной системе Хансена (38) диагональные элементы не содержат нулей, а система (45) этим свойством уже не обладает.

Но отсутствие нульсодержащих элементов по диагонали матрицы ИСЛАУ не является достаточным условием правильности формальных решений вспомогательных систем (36) – (37), и рассматриваемый вопрос требует дальнейшего исследования. Рассмотрим в качестве примера интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [1,2] & [2,3] \\ [2,3] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [60,240] \\ [0,120] \end{pmatrix}, \tag{46}$$

которая получена из (45) заменой нульсодержащего элемента $[0, 1]$ на 1 на месте $(2, 2)$. Для нее формальным решением вспомогательной системы (36) – (37) является тот же неправильный интервальный вектор $([90, -120], [240, -60])^\top$.

Для целей дальнейшего анализа представим матрицу интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ в виде суммы диагональной и внедиагональной частей, т. е. как

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}, \tag{47}$$

где $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ — матрица, в которой диагональ нулевая, $\boldsymbol{c}_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а внедиагональные элементы совпадают с соответствующими элементами матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{c}_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij}$ при всех $i \neq j$; $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ — диагональная интервальная матрица, элементы которой равны соответствующим диагональным элементам матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{a}_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда введенный в Предложении 3 интервальный оператор $\mathcal{S}$ может быть записан как

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b},$$

а уравнение (36) – (37) примет вид

$$\boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}x - \boldsymbol{b} = 0.$$

В силу сказанного выше будем всюду далее предполагать, что $\boldsymbol{D}$ неособенна, т. е. $0 \notin \boldsymbol{d}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — формальное решение этой интервальной системы уравнений, так что

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = 0.$$

Добавим к обеим частям данного равенства по величине $\operatorname{opp}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*)$, алгебраически противоположной к $\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*$ (что равносильно переносу этого члена "с противоположным знаком" в другую часть равенства). В результате получим

$$\operatorname{opp}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b},$$

откуда, умножая обе части на -1 и учитывая, что $-\operatorname{opp}(\cdot) = \operatorname{dual}(\cdot)$, будем иметь

$$\operatorname{dual}(\boldsymbol{D}\cdot\operatorname{dual}\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*.$$

Наконец, опираясь на (26), приходим к соотношению

$$(\operatorname{dual}\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*. \tag{48}$$

Если диагональные элементы в матрице $\boldsymbol{A}$ не содержат нулей, то для $(\operatorname{dual}\boldsymbol{D})$ существует алгебраически обратная матрица $\operatorname{inv}(\operatorname{dual}\boldsymbol{D})$, т. е. такая, что ее произведение на $\operatorname{dual}\boldsymbol{D}$ дает единичную матрицу. Коль скоро $\operatorname{inv}\operatorname{dual}(\cdot) = (\cdot)^{-1}$, то эта алгебраически обратная матрица совпадает с обычной обратной интервальной матрицей $\boldsymbol{D}^{-1} = \operatorname{diag}\{1/\boldsymbol{d}_1, 1/\boldsymbol{d}_2, \ldots, 1/\boldsymbol{d}_n\}$, и потому, домножая на нее обе части равенства (48), приходим к следующей равносильной форме записи уравнения (36) – (37):

$$x = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}x). \tag{49}$$

Системы уравнений подобного вида, в которых неизвестная переменная выделена в одной из частей "в чистом виде", называются системами уравнений в *рекуррентном виде* (про операторные уравнения в аналогичной форме говорят, что они являются уравнениями второго рода). Именно такой вид имеют интервальные системы уравнений в теоремах Апостолатоса — Кулиша и Алефельда — Херцбергера, на которые опиралась традиционная версия формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений.

В случае, когда $\boldsymbol{x}^*$ есть правильное формальное решение интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (49), беря радиус от обеих частей равенства

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr),$$

получим

$$\operatorname{rad}\boldsymbol{x}^* = \operatorname{rad}\Bigl(\boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr)\Bigr).$$

Но $\operatorname{rad}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}) \geq |\boldsymbol{U}| \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{V}$ для любых правильных интервальных матриц $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ согласованных размеров, для которых имеет смысл их произведение (см. [1, 3, 7]). Поэтому

$$\operatorname{rad}\Bigl(\boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr)\Bigr) \geq |\boldsymbol{D}^{-1}| \cdot \operatorname{rad}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr) = |\boldsymbol{D}^{-1}| \cdot \bigl(\operatorname{rad}\boldsymbol{b} + \operatorname{rad}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*)\bigr).$$

Если все компоненты вектора свободных членов $\boldsymbol{b}$ имеют ненулевую ширину, т. е. $\operatorname{rad}\boldsymbol{b} > 0$, то справедливо неравенство

$$\operatorname{rad}\boldsymbol{x}^* > |\boldsymbol{D}^{-1}| \cdot \operatorname{rad}\bigl(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr) \geq |\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}| \cdot \operatorname{rad}\boldsymbol{x}^*. \tag{50}$$

Оно означает, в частности, что $\operatorname{rad}\boldsymbol{x}^* > 0$. Иными словами, если уравнение (36) – (37) имеет при $\operatorname{rad}\boldsymbol{b} > 0$ правильное формальное решение, то это решение является телесным брусом в $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого имеют ненулевую ширину.

Напомним теперь следующий факт из теории неотрицательных матриц. Если A — неотрицательная $n \times n$-матрица, $\rho(A)$ — ее спектральный радиус и α — положительное вещественное число, то

$$\begin{aligned} \rho(A) < \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigl(\exists v \in \mathbb{R}^n\bigr)\bigl(v > 0 \ \&\ Av < \alpha v\bigr), \\ \rho(A) \geq \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigl(\exists v \in \mathbb{R}^n\bigr)\bigl(v > 0 \ \&\ Av \geq \alpha v\bigr). \end{aligned}$$

Доказательство может быть найдено, например, в книге Р. Хорна и Ч. Джонсона [37] либо в англоязычных источниках [3, 10]. С другой стороны, неявным образом этот факт обосновывается в доказательстве Х. Виландта теоремы Перрона — Фробениуса о неотрицательных матрицах, которое воспроизводится во многих пособиях по теории матриц, например, в классической работе Ф. Гантмахера [38].

В рассматриваемом случае для положительного вектора $y = \operatorname{rad}\boldsymbol{x}^*$ и для неотрицательной матрицы $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$ имеет место $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|\,y < y$. Следовательно, в силу вышеотмеченных свойств неотрицательных матриц спектральный радиус матрицы $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$ должен быть строго меньше 1:

$$\rho\bigl(|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|\bigr) < 1. \tag{51}$$

Это необходимое условие существования правильного формального решения систем (49) и (36) – (37) при $\operatorname{rad}\boldsymbol{b} > 0$ и не содержащих нуля диагональных элементах в $\boldsymbol{A}$.

Отметим, что поскольку $\boldsymbol{D}$ — диагональная матрица, то $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$, и выведенное условие равносильно $\rho\bigl(|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\bigr) < 1$.

Полученным результатам можно придать несколько другую форму, для чего нам понадобятся следующие определения.

Определение [10, 39]. *Точечная $n \times n$-матрица A называется M-матрицей, если она представима в виде $A = sI - P$, где $s \in \mathbb{R}$, P — неотрицательная матрица и $s > \rho(P)$.*

Определение [3, 7]. *Интервальную $n \times n$-матрицу $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ станем называть интервальной M-матрицей, если M-матрицами являются все содержащиеся в ней точечные матрицы.*

Определение [3, 7]. *Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется H-матрицей, если ее компарант является M-матрицей. Матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется интервальной H-матрицей, если каждая вещественная матрица $A \in \boldsymbol{A}$ является H-матрицей.*

Ясно, что у M-матрицы внедиагональные элементы неположительны. Нетрудно также показать, что диагональные элементы M-матрицы обязаны быть положительными. Вообще M-матрицы — относительно просто описываемый подкласс всех положительно обратимых матриц, т. е. матриц, имеющих неотрицательную обратную матрицу [39].

H-матрицы — это специальный класс матриц, у которых диагональ доминирует над остальной, внедиагональной, частью матрицы в спектральном смысле [3, 7, 10]. Класс H-матриц включает в себя в качестве собственного подмножества все матрицы, удовлетворяющие традиционному условию диагонального преобладания, но не исчерпывается ими. Другой пример H-матриц — неособенные треугольные матрицы, верхние или нижние [3]. Для H-матриц удается сохранить многие хорошие свойства M-матриц, в частности, оценку на обратную матрицу.

Для любого интервала $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$ такого, что $0 \notin \boldsymbol{x}$, справедливо

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{x}}\right| = \langle \boldsymbol{x}\rangle^{-1},$$

в силу чего для диагональной матрицы $\boldsymbol{D}$ имеет место соотношение

$$\left|\boldsymbol{D}^{-1}\right| = \langle \boldsymbol{D}\rangle^{-1}.$$

При $\operatorname{rad}\boldsymbol{b} > 0$ с учетом (50) это позволяет сделать вывод о том, что $\langle \boldsymbol{D}\rangle^{-1}\,|\boldsymbol{C}|\,y < y$ для положительного вектора $y = \operatorname{rad}\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$. В силу неотрицательности $\langle \boldsymbol{D}\rangle^{-1}$ обе части полученного неравенства можем домножить на эту матрицу, прийдя к $\langle \boldsymbol{D}\rangle y > |\boldsymbol{C}|\,y$, т. е.

$$\big(\langle \boldsymbol{D}\rangle - |\boldsymbol{C}|\big)\, y > 0. \tag{52}$$

В выражении $\langle \boldsymbol{D}\rangle - |\boldsymbol{C}|$ нетрудно увидеть компарант матрицы $\boldsymbol{A}$, поэтому (52) равносильно $\langle \boldsymbol{A}\rangle y > 0$ для какого-то вектора $y > 0$, что является одним из признаков H-матриц (см. подробности, к примеру, в [3, 7]). Мы обосновали Предложение 5.

Предложение 5. *Если в интервальной линейной системе $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ диагональные элементы $\boldsymbol{A}$ не содержат нулей и все компоненты правой части имеют ненулевую ширину, т. е.* $\operatorname{rad}\boldsymbol{b} > 0$, *то для существования правильного формального решения системы интервальных уравнений* (36)–(37) *необходимо, чтобы $\boldsymbol{A}$ являлась H-матрицей.*

С другой стороны, справедливо Предложение 6.

Предложение 6. *Для существования правильного формального решения системы интервальных уравнений* (36)–(37) *достаточно, чтобы в интервальной линейной системе $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ матрица $\boldsymbol{A}$ являлась H-матрицей.*

Доказательство. Действительно, для H-матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ диагональ не содержит нулей, и потому в представлении (47) диагональная матрица $\boldsymbol{D}$ неособенна. Тогда равносильной формой записи системы (36) – (37) является рекуррентный вид (49), который можно представить как

$$x = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x)$$

с отображением $\boldsymbol{G} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$, действующим по правилу $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x})$, где матрица $\boldsymbol{A}$ связана с $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ посредством соотношения (47).

Если $\boldsymbol{A}$ — H-матрица, то для нее выполнено условие (51). Следовательно, поскольку

$$\begin{aligned}\operatorname{Dist}\big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x), \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, y)\big) &= \operatorname{Dist}\big(\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}), \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{y})\big) \leq \\ &\leq \left|\boldsymbol{D}^{-1}\right| \cdot \operatorname{Dist}\big(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}\big) \leq \left|\boldsymbol{D}^{-1}\right| |\boldsymbol{C}| \cdot \operatorname{Dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

рассматриваемое отображение $\boldsymbol{G}$ является $|\boldsymbol{D}^{-1}|\,|\boldsymbol{C}|$-сжимающим. Требуемое утверждение вытекает теперь из теоремы Алефельда — Херцбергера, формулировка которой приведена в разделе 6. ■

С учетом сказанного ситуация с правильностью/неправильностью формальных решений рассмотренных конкретных систем (38) и (45),(46) получает еще одно, наиболее глубокое, объяснение: матрица системы Хансена (38) является интервальной H-матрицей, тогда как в системах (45) и (46) матрицы таковыми уже не являются.

Как приводить ИСЛАУ общего вида к системам с H-матрицами? Для этой цели служит процедура предобуславливания [3, 7] — домножение слева матрицы и правой части решаемой ИСЛАУ на специально подобранную точечную матрицу Λ, в силу чего вместо системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ получается интервальная система $(\Lambda\boldsymbol{A})\,x = \Lambda\boldsymbol{b}$. Множество решений $\Xi(\Lambda\boldsymbol{A}, \Lambda\boldsymbol{b})$ предобусловленной системы может сделаться при этом более широким, чем исходное множество решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, но матрица $\Lambda\boldsymbol{A}$ новой системы будет иметь лучшие свойства сравнительно с $\boldsymbol{A}$. В частности, если $\boldsymbol{A}$ сильно неособенна, то при $\Lambda = (\operatorname{mid}\boldsymbol{A})^{-1}$, называемом предобуславливанием *обратной средней*, $\Lambda\boldsymbol{A}$ является H-матрицей [3, 7].

9. Качество оценивания

Полученное представление уравнений (36) – (37) в рекуррентном виде (49) позволяет ответить на вопросы о соотношении результата Предложения 3 с другими версиями формального подхода к внешнему оцениванию множеств решений, а также о качестве этого оценивания. Сравнивая уравнение в рекуррентном виде (49), равносильное системе (36) – (37), с уравнениями (39) – (40) из теорем Апостолатоса — Кулиша и Алефельда — Херцбергера, можем видеть, что "испанская версия" формального подхода, представленная в Предложении 3, является, по существу, удачно скомпонованной вариацией известного ранее варианта формально-алгебраического подхода из [19, 21, 26], в которую неявно встроена процедура приведения системы к рекуррентному виду.

Оценки близости формального решения интервальной линейной системы в рекуррентном виде $x = \boldsymbol{G}x + \boldsymbol{h}$ к оптимальной (точной) оценке ее множества решений были исследованы многими авторами, из которых отметим Д. Гея [32] и А. Ноймайера [3]. Пользуясь методикой, развитой в [3], покажем, что для формального решения интервальной системы (36) – (37) или равносильной ей системы (49) справедлив следующий результат.

Предложение 7. *Пусть* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *— интервальная H-матрица,* $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}$ *— диагональная и внедиагональная части* $\boldsymbol{A}$ *соответственно и* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$*. Если* $\boldsymbol{x}^*$ *— формальное решение интервальной линейной системы* (36)–(37)

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, x) = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{dual}\; x - \boldsymbol{b} = 0,$$

то справедливо следующее неравенство для расстояния $\boldsymbol{x}^*$ *до интервальной оболочки* $\Box\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *множества решений интервальной линейной системы* $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$*:*

$$\mathrm{Dist}\,\bigl(\Box\Xi,\, \boldsymbol{x}^*\bigr) \;\leq\; 2\,(I - |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|)^{-1}\,|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\cdot \mathrm{rad}\,(\Box\Xi). \tag{53}$$

Доказательство. Прежде всего из условия теоремы следует, что в представлении $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$ матрица $\boldsymbol{D}$ неособенна и $\rho(|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|) < 1$. Покажем, что справедливо включение

$$\boldsymbol{x}^* \;\subseteq\; \Box\Xi + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\Xi - \boldsymbol{x}^*).$$

В правой части этого включения второе слагаемое является произведением трех интервальных матриц (размером $n\times n$, $n\times n$ и $n\times 1$), требующим, вообще говоря, расстановки скобок из-за неассоциативности интервального матричного умножения. Но так как первый из сомножителей — диагональная матрица $\boldsymbol{D}^{-1}$, делать это необязательно.

Ясно, что $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{D}^{-1}\bigl(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\bigr)$ в силу уравнения (49). Зафиксируем индекс $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и возьмем какое-нибудь значение $\xi \in \boldsymbol{x}^*_i$. Поскольку результаты интервальных матрично-векторных операций являются интервальными оболочками множеств точечных результатов соответствующих операций, взятых “по представителям”, то $\xi = \bigl(\tilde{D}^{-1}(\tilde{b} - \tilde{C}\tilde{x})\bigr)_i$ для некоторых $\tilde{C} \in \boldsymbol{C}$, $\tilde{D} \in \boldsymbol{D}$, $\tilde{x} \in \boldsymbol{x}^*$ и $\tilde{b} \in \boldsymbol{b}$. Преобразуем это выражение далее, учитывая, что в условиях теоремы из $\rho(|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|) < 1$ следует обратимость матриц $(I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})$ для любых $\tilde{C} \in \boldsymbol{C}$ и $\tilde{D} \in \boldsymbol{D}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^{-1}(\tilde{b} - \tilde{C}\tilde{x}) &= (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} - (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} + \tilde{D}^{-1}(\tilde{b} - \tilde{C}\tilde{x}) = \\
&= (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} - (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} + \tilde{D}^{-1}\tilde{b} - \tilde{D}^{-1}\tilde{C}\tilde{x} = \\
&= (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} - (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} + \\
&\quad + (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})(I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} - \tilde{D}^{-1}\tilde{C}\tilde{x} = \\
&= (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} + \tilde{D}^{-1}\tilde{C}(I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} - \tilde{D}^{-1}\tilde{C}\tilde{x} = \\
&= (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} + \tilde{D}^{-1}\tilde{C}\bigl((I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} - \tilde{x}\bigr).
\end{aligned}$$

Интервализуя полученное выражение по $\tilde{C} \in \boldsymbol{C}$, $\tilde{D} \in \boldsymbol{D}$, $\tilde{x} \in \boldsymbol{x}^*$, $\tilde{b} \in \boldsymbol{b}$ и учитывая принадлежность

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \bigl(\tilde{C} + \tilde{D}\bigr)^{-1}\tilde{b} = (I + \tilde{D}^{-1}\tilde{C})^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{b} \;\in\; \Box\Xi$$

для любых $\tilde{A} = \tilde{C} + \tilde{D} \in \boldsymbol{A}$ и $\tilde{b} \in \boldsymbol{b}$, получим включение

$$\tilde{D}^{-1}(\tilde{b} - \tilde{C}\tilde{x}) \;\in\; \Box\Xi + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\Xi - \boldsymbol{x}^*).$$

Поэтому для любого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ и для любых $\xi \in \boldsymbol{x}^*_i$ справедливо включение

$$\xi \in \bigl(\Box\Xi + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\Xi - \boldsymbol{x}^*)\bigr)_i,$$

т. е. действительно $\boldsymbol{x}^* \subseteq \Box\Xi + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\Xi - \boldsymbol{x}^*)$.

Из полученного включения в силу свойств расстояния Dist следует:

$$\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi, \boldsymbol{x}^*\big) \leq \operatorname{Dist}\big(\Box\varXi, \Box\varXi + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\varXi - \boldsymbol{x}^*)\big) =$$
$$= \operatorname{Dist}\big(0, \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\varXi - \boldsymbol{x}^*)\big) = |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\Box\varXi - \boldsymbol{x}^*)| \leq |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\, |\Box\varXi - \boldsymbol{x}^*|.$$

Но для любых интервальных векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ из $\mathbb{IR}^n$ имеет место оценка [3]

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| \;\leq\; \operatorname{Dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + 2\operatorname{rad}\boldsymbol{u}.$$

Значит,

$$\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi, \boldsymbol{x}^*\big) \;\leq\; |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}| \cdot \big(\operatorname{Dist}(\Box\varXi, \boldsymbol{x}^*) + 2\operatorname{rad}(\Box\varXi)\big), \tag{54}$$

и потому

$$(I - |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|) \cdot \operatorname{Dist}\big(\Box\varXi, \boldsymbol{x}^*\big) \;\leq\; 2\,|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}| \cdot \operatorname{rad}(\Box\varXi). \tag{55}$$

Матрица $(I - |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|)$ обратима, коль скоро $\rho(|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|) < 1$, и, кроме того, обратная матрица $(I - |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|)^{-1}$ неотрицательна, в чем легко убедиться из ее разложения в матричный ряд Неймана

$$(I - |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|^k,$$

в котором все члены неотрицательны. Следовательно, можно домножить обе части неравенства (55) слева на неотрицательную матрицу $(I - |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|)^{-1}$, получая доказываемое неравенство (53). ■

Следствие. Если в условиях Предложения 7 для некоторой абсолютной матричной нормы $\|\cdot\|$ величина $\eta := \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\|$ такова, что $\eta < 1$, то для согласованной абсолютной векторной нормы справедливо неравенство

$$\|\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi,\, \boldsymbol{x}^*\big)\| \;\leq\; \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \|\operatorname{rad}(\Box\varXi)\|. \tag{56}$$

Действительно, при доказательстве Предложения 7 мы установили оценку (54)

$$\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi, \boldsymbol{x}^*\big) \;\leq\; |\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\, \big(\operatorname{Dist}(\Box\varXi, \boldsymbol{x}^*) + 2\operatorname{rad}(\Box\varXi)\big).$$

Беря норму от обеих частей этого неравенства между неотрицательными векторами и пользуясь условиями согласования векторных и матричных норм, получим

$$\big\|\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi,\, \boldsymbol{x}^*\big)\big\| \leq \; \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\| \cdot \big\|\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi,\, \boldsymbol{x}^*\big) + 2\operatorname{rad}(\Box\varXi)\,\big\| \leq$$
$$\leq\; \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\| \cdot \Big(\,\big\|\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi,\, \boldsymbol{x}^*\big)\big\| + 2\,\|\operatorname{rad}(\Box\varXi)\|\,\Big),$$

откуда имеем

$$\big(I - \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\|\big) \cdot \big\|\operatorname{Dist}\big(\Box\varXi,\, \boldsymbol{x}^*\big)\big\| \;\leq\; 2\,\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\| \cdot \|\operatorname{rad}(\Box\varXi)\|.$$

При $\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\| = \eta < 1$ это влечет оценку (56).

Оценка (56) означает, что точность “испанской версии” формального подхода совершенно такая же, как традиционной, т. е. имеет первый порядок в зависимости от размеров множества решений. Тот же первый порядок точности внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ имеют, как известно, большинство “быстрых” (полиномиально сложных) методов внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ [3, 7].

В заключение раздела приведем аналог известного результата об оптимальном (наилучшем) оценивании множеств решений ИСЛАУ с M-матрицами.

Предложение 8. *Если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная М-матрица, то для любого вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^n$ правильное формальное решение интервальной линейной системы* (36) – (37) *существует и совпадает с интервальной оболочкой $\square\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ множества решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.*

Доказательство. Оно основано на следующем свойстве умножения на неотрицательный правильный интервал: если $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}$ и $\boldsymbol{a} \geq 0$, то

$$\underline{\boldsymbol{ax}} = \check{a}\,\underline{\boldsymbol{x}}, \quad \overline{\boldsymbol{ax}} = \hat{a}\,\overline{\boldsymbol{x}} \tag{57}$$

для некоторых $\check{a}, \hat{a} \in \boldsymbol{a}$. Действительно,

$$a\boldsymbol{x} = [a\underline{\boldsymbol{x}}, a\overline{\boldsymbol{x}}] \quad \text{для точечного } a \geq 0.$$

Тогда для неотрицательного интервала $\boldsymbol{a} \geq 0$ в силу (22) имеем

$$\boldsymbol{ax} = \bigvee_{a\in\boldsymbol{a}} [a\underline{\boldsymbol{x}}, a\overline{\boldsymbol{x}}] \;=\; \Big[\min_{a\in\boldsymbol{a}}(a\underline{\boldsymbol{x}}),\ \max_{a\in\boldsymbol{a}}(a\overline{\boldsymbol{x}})\Big] \;=\; \big[\,\check{a}\,\underline{\boldsymbol{x}},\ \hat{a}\,\overline{\boldsymbol{x}}\,\big]$$

для каких-то значений $\check{a}, \hat{a} \in \boldsymbol{a}$.

Переходя к доказательству основного результата Предложения 8, заметим, что существование правильного формального решения для системы (36) – (37) вытекает из Предложения 6. Далее, если $\boldsymbol{A}$ — интервальная M-матрица, то в представлении (47) ее диагональ $\boldsymbol{D}$ положительна, и формальное решение $\boldsymbol{x}^*$ интервальной системы (36) – (37) удовлетворяет уравнению (49), т. е.

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{D}^{-1}\big(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*\big) = \boldsymbol{D}^{-1}\big(\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^*\big).$$

Следовательно,

$$\underline{\boldsymbol{x}}^* = \underline{\boldsymbol{D}^{-1}\big(\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^*\big)} =$$

$$= \check{D}^{-1}\underline{\big(\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^*\big)} \ \text{ в силу (57), поскольку } \boldsymbol{D}^{-1} \geq 0, =$$

$$= \check{D}^{-1}\big(\,\underline{\boldsymbol{b}} + \underline{(-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^*}\big) =$$

$$= \check{D}^{-1}\big(\,\underline{\boldsymbol{b}} + (-\check{C})\underline{\boldsymbol{x}}^*\big) \ \text{ снова в силу (57), так как } (-\boldsymbol{C}) \geq 0$$

для каких-то $\check{D} \in \boldsymbol{D}$ и $\check{C} \in \boldsymbol{C}$. Это означает, что вектор $\underline{\boldsymbol{x}}^*$ является решением точечной системы $\check{A}x = \underline{\boldsymbol{b}}$ с $\check{A} = \check{C} + \check{D} \in \boldsymbol{A}$ и потому принадлежит множеству решений $\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что вектор $\overline{\boldsymbol{x}}^*$ также лежит в $\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ и поэтому $\boldsymbol{x}^* = [\underline{\boldsymbol{x}}^*, \overline{\boldsymbol{x}}^*] \subseteq \square\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. Но, с другой стороны, $\boldsymbol{x}^* \supseteq \varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ по Предложению 3, значит брус $\boldsymbol{x}^*$ действительно является наименьшей по включению внешней оценкой для множества решений $\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. ■

10. Численные примеры

Данный раздел посвящен сравнению “испанской версии” формального подхода с другими методами внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ. При этом мы используем термин “испанская версия” расширительно, для обозначения вычислительной процедуры, основанной на Предложении 3 и использующей для нахождения формального решения системы (36) – (37) субдифференциальный метод Ньютона (чего испанские авторы в своих работах [27, 28], конечно, не рассматривали).

Ее естественными конкурентами, областью применимости которых также служат интервальные линейные системы с H-матрицам, являются:

— процедура Хансена — Блика — Рона [4, 40 – 43], имеющая трудоемкость $4n^3+O(n^2)$;

— интервальный итерационный метод Гаусса — Зейделя [3, 7], трудоемкость выполнения одного шага которого составляет $O(n^2)$;

— традиционная версия формального (алгебраического) подхода [19, 21, 26], в которой каждый шаг субдифференциального метода Ньютона требует решения точечной системы линейных уравнений и, следовательно, имеет трудоемкость $O(n^3)$. В этот список не включен интервальный метод Гаусса, также имеющий трудоемкость выполнения $O(n^3)$, но характеризующийся невысоким качеством внешних оценок.

Интервальный метод Гаусса — Зейделя является, на первый взгляд, самым быстрым из рассматриваемых, но в действительности количество шагов, которые он может выполнить до сходимости, в значительной степени зависит от свойств матрицы интервальной системы. Это число невелико для матриц с сильно выраженным диагональным преобладанием и становится большим или даже очень большим, когда преобладания почти нет. По этой причине полная трудоемкость интервального итерационного метода Гаусса — Зейделя является величиной очень непостоянной. В данном смысле процедура Хансена — Блика — Рона и субдифференциальный метод Ньютона в формальном подходе (традиционной или “испанской” версии) демонстрируют гораздо более благоприятное поведение. Их трудоемкость почти не зависит (или слабо зависит) от свойств решаемой системы, что существенно для многих алгоритмов, в которых задача оценивания множеств решений ИСЛАУ используется как вспомогательная.

Рассмотрим в качестве первого примера систему уравнений

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-1.9,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,2] \\ [1,4] \end{pmatrix}, \qquad (58)$$

множество решений которой показано на рис. 3. Оптимальная (точная) внешняя интервальная оценка ее множества решений есть брус $([-2,1.9662],[-1,4])^\top$.

Матрица системы (58) является H-матрицей, но она весьма близка к границе множества H-матриц. Так, интервальная матрица

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-2,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix},$$

отличающаяся от матрицы в (58) на 0.1 в левой границе элемента на месте $(1,2)$, уже не является H-матрицей. По этой причине пример (58), будучи “пессимистическим”, весьма труден для рассматриваемых методов внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ. Вместе с тем он хорошо демонстрирует трудности худшего случая, которые быстро нарастают при увеличении размерности задачи.

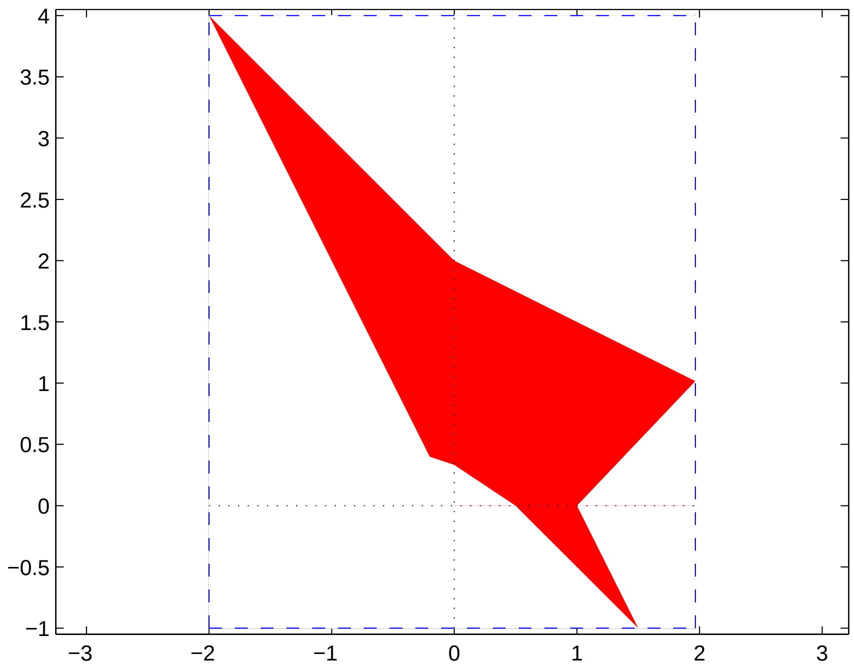

Рис. 3. Множество решений системы уравнений (58) и его наилучшая внешняя интервальная оценка

Процедура Хансена — Блика — Рона в применении к (58) дает ответ

$$\begin{pmatrix} [-38, 58] \\ [-10, 60] \end{pmatrix}. \tag{59}$$

При использовании традиционной версии формального подхода согласно [19, 21, 26] задача сводится к нахождению формального решения системы

$$(\operatorname{dev}\operatorname{diag}\boldsymbol{A})x = (\operatorname{dev}\operatorname{diag}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A})x + \boldsymbol{b}, \tag{60}$$

где $\operatorname{diag}\boldsymbol{A}$ — диагональ матрицы $\boldsymbol{A}$ (обозначенная через $\boldsymbol{D}$ в представлении (47) и в последующих выкладках) и

$$\operatorname{dev}\boldsymbol{x} := \begin{cases} \underline{\boldsymbol{x}}, & \text{если} \quad |\underline{\boldsymbol{x}}| \geq |\overline{\boldsymbol{x}}|, \\ \overline{\boldsymbol{x}}, & \text{иначе,} \end{cases} —$$

отклонение интервала $\boldsymbol{x}$, т. е. наиболее удаленная от нуля точка интервала $\boldsymbol{x}$. Искомое формальное решение равно

$$\begin{pmatrix} [-23.3846, 25.1154] \\ [-24.6154, 25.3846] \end{pmatrix} \tag{61}$$

и находится субдифференциальным методом Ньютона за одну итерацию. “Испанская версия” формального подхода дает тот же ответ за три итерации, но не требует приведения исходной ИСЛАУ к виду (60).

Что касается интервального метода Гаусса — Зейделя, то он сходится к тому же интервальному вектору (61), но делает это существенно медленнее. Запущенный из начального бруса $([-40, 40], [-40, 40])^\top$, он выдает за 40 итераций ответ

$$\begin{pmatrix} [-25.2629, 27.0925] \\ [-26.5925, 27.2629] \end{pmatrix}.$$

На каждой итерации субдифференциального метода Ньютона нужно решать точечную систему линейных уравнений в $\mathbb{R}^{2n}$, и потому можно считать, что трудоемкость одной его итерации составляет $O(n^3)$. Но этих итераций требуется немного. Как правило, их количество не превышает порядка решаемой интервальной системы уравнений, а в реальности является даже существенно меньшим. Трудоемкость одной итерации интервального метода Гаусса — Зейделя равна $O(n^2)$, но в случае “плохой” матрицы ИСЛАУ сходимость может потребовать значительного количества итераций. В подобных случаях полные трудозатраты интервального метода Гаусса — Зейделя превышают трудозатраты субдифференциального метода Ньютона.

Рассмотрим теперь работу перечисленных в начале раздела методов совместно с предобуславливанием обратной средней матрицей. Это популярная модификация, которая рекомендуется многими специалистами для постоянного применения, так как вкупе с традиционными методами внешнего оценивания множеств решений (интервальным методом Гаусса, итерационными методами и т. п.) она обеспечивает квадратичную точность внешнего оценивания относительно ширины решаемой интервальной системы [3, 44], а не первый порядок, как в (53) и ей аналогичных оценках. Напомним, что предобуславливание обратной средней встроено в известный интервальный итерационный метод Кравчика [3, 7].

После предобуславливания исходной системы (58) обратной средней матрицей получаем систему

$$\begin{pmatrix} [0.7870, 1.2130] & [-0.5560, 0.5560] \\ [-0.2889, 0.2889] & [0.5054, 1.4946] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0.0649, 0.9820] \\ [-0.0723, 1.4441] \end{pmatrix}.$$

В применении к ней процедура Хансена — Блика — Рона дает ответ

$$\begin{pmatrix} [-3.2462, 5.4770] \\ [-1.4352, 5.9869] \end{pmatrix},$$

который весьма близок к оптимальным внешним оценкам. Но предобуславливание обратной средней и результат о квадратичной сходимости внешних оценок работают хорошо в случае “не слишком широких” интервалов в системе уравнений. Если рассматривается ИСЛАУ с широкими и очень широкими интервальными данными в матрице, то в действие вступают нелинейные эффекты, предобуславливание обратной средней матрицей оказывается не лучшим, и ситуация качественно меняется [7].

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим в качестве примера систему уравнений

$$\begin{pmatrix} [2, 300] & [-1.9, 1] \\ [1, 2] & [2, 300] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [1, 4] \end{pmatrix}, \tag{62}$$

в которой сильно увеличены верхние границы диагональных элементов. Ее множество решений отличается от множества решений системы (58) весьма незначительно (лишь нижней границей куска из первого квадранта), а оптимальные (точные) покоординатные оценки множества решений совершенно такие же:

$$\begin{pmatrix} [-2, 1.9662] \\ [-1, 4] \end{pmatrix}.$$

Но после предобуславливания обратной средней процедура Хансена — Блика — Рона дает в применении к получившейся системе ответ

$$\begin{pmatrix} [-32.1299, 49.1483] \\ [-8.5763, 50.9130] \end{pmatrix} \;—$$

очень широкий интервал, что несколько лучше ответа, получаемого с помощью формального (алгебраического) подхода

$$\begin{pmatrix} [-48.1424, 49.1483] \\ [-48.4105, 50.9130] \end{pmatrix},$$

который и традиционная, и “испанская” версии получают всего за три итерации. К тому же пределу сходится из “достаточно широкого” начального приближения интервальный итерационный метод Гаусса — Зейделя, но так же медленно, как и в случае исходной системы без предобуславливания (58).

11. Некоторые итоги и выводы

“Испанская версия” формального (алгебраического) подхода к внешнему оцениванию множеств решений интервальных систем уравнений, сводящая исходную задачу к нахождению правильного формального решения системы уравнений (36) – (37) или (41), является равносильной версией подхода, развитого ранее в работах [19, 21, 26], и имеет ту же сферу применимости — интервальные линейные системы с H-матрицами.

Имея те же характеристики трудоемкости выполнения, “испанская версия” несколько более трудна для реализации и использует в среднем немного больше итераций для сходимости. Однако в отличие от традиционной она не требует специального приведения исходной интервальной системы с специальному рекуррентному виду.

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[2] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

[3] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge Univ. Press, 1990.

[4] Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2008.

[5] Shary S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // Reliable Comput. 1996. Vol. 2, No. 1. P. 3–33.

[6] Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. АН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61.

[7] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Электронная книга, доступная на http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf

[8] Shary S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Comput. 2002. Vol. 8, No. 5. P. 321–418 (электронная версия http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf).

[9] Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A. et al. Standardized notation in interval analysis // Тр. XIII Байкальской междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Т. 4. “Интервальный анализ”. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. С. 107–113 (электроная версия http://www.nsc.ru/interval/INotation.pdf).

[10] Berman A., Plemmons R.J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York: Acad. Press, 1979.

[11] Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis. Philadelphia: SIAM, 2009.

[12] Интервальный анализ и его приложения. Веб-сайт http://www.nsc.ru/interval

[13] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Высшая школа, 1996.

[14] Манусов В.З., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ в линейных задачах электротехники // Информационно-оперативный материал (интервальный анализ). Красноярск, 1988. (Препр. ВЦ СО АН СССР. № 6. С. 29–31.)

[15] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966.

[16] Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1969.

[17] Miranda C. Un’ osservatione su un teorema di Brouwer // Bollet. Unione Mat. Ital. Serie II. 1940. Vol. 3. P. 5–7.

[18] Kaucher E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dr. Naturwissen. Dissertation. Univ. Karlsruhe, 1973.

[19] Шарый С.П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 67–114.

[20] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$ // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-oriented numerical analysis) / Eds. G. Alefeld, R.D. Grigorieff. Comput. Suppl. 2. Wien: Springer, 1980. P. 33–49.

[21] Shary S.P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // Reliable Comput. 1997. Vol. 3, No. 2. P. 103–135.

[22] Gardeñes E., Trepat A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // Computing. 1980. Vol. 24. P. 161–179

[23] Gardeñes E., Trepat A., Mielgo H. Present perspective of the SIGLA interval system // Freiburger Intervall-Berichte. 1982. No. 82/9. P. 1–65.

[24] Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989.

[25] Hansen E. On linear algebraic equations with interval coefficients // Topics in Interval Analysis / Ed. E. Hansen. Oxford: Clarendon Press, 1969. P. 35–46.

[26] Шарый С.П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем // Фундамент. и прикл. математика. 2002. Т. 8, № 2. С. 567–610 (электронная версия `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/FunPriMath.pdf`).

[27] Sainz M.A., Gardeñes E., Jorba L. Formal solution to systems of interval linear or non-linear equations // Reliable Comput. 2002. Vol. 8. P. 189–211.

[28] Sainz M.A., Gardeñes E., Jorba L. Interval estimations of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // Reliable Comput. 2002. Vol. 8. P. 283–305.

[29] Apostolatos N., Kulisch U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // Electron. Rechenanl. 1968. Bd 10. S. 73–83.

[30] Mayer O. Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen. PhD Dissertation. Univ. Karlsruhe, 1968.

[31] Шарый С.П. О сравнении теорем Апостолатоса — Кулиша и Майера — Варнке в интервальном анализе // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 351–359.

[32] Gay D.M. Solving interval linear equations // SIAM J. Numer. Anal. 1982. Vol. 19, No. 4. P. 858–870.

[33] Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.

[34] Обэн Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.

[35] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[36] Neumaier A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // SIAM J. Matrix Analysis and Appl. 2000. Vol. 21. P. 1156–1162.

[37] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[38] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[39] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

[40] Bliek C. Computer Methods for Design Automation. PhD Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, MA, July 1992.

[41] Hansen E.R. Bounding the solution of interval linear equations // SIAM J. Numer. Anal. 1992. Vol. 29, No. 5. P. 1493–1503.

[42] Rohn J. Cheap and tight bounds: The recent result by E. Hansen can be made more efficient // Interval Comput. 1993. No. 4. P. 13–21.

[43] Neumaier A. A simple derivation of Hansen — Bliek — Rohn — Ning — Kearfott enclosure for linear interval equations // Reliable Comput. 1999. Vol. 5, No. 2. P. 131–136.

[44] Miller W. On an interval-arithmetic matrix method // BIT. 1972. Vol. 12. P. 213–219.

Поступила в редакцию 26 июля 2010 г.,
с доработки — 29 ноября 2010 г.