Численный метод решения задачи Коши для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита*

А. Ф. Латыпов, О. В. Попик
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: latypov@itam.nsc.ru

Рассмотрен одношаговый метод решения задачи Коши для жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на представлении функций правых частей системы на шаге интерполяционными полиномами Эрмита, заданными значениями функций в трех точках. Доказана A- и $L(\delta)$-устойчивость метода. Дана оценка точности, приводится алгоритм расчета глобальной ошибки. Рассмотрены результаты решений тестовых задач.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, задача Коши, устойчивость, интерполяция полиномами Эрмита, оценка точности.

В [1] разработано семейство LRM — методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Однако метод LRM$(0,0,0,s)$ отдельно не представлен и соответственно не изучен. Он прост в реализации, A- и $L(\delta)$-устойчив, имеет четвертый порядок точности по шагу интегрирования. Эти свойства делают его привлекательным для использования.

1. Постановка задачи, описание метода

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, число уравнений n:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, x), \quad x \in [0, X], \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{1}$$

Условия существования и единственности решения предполагаются выполненными. Пусть решение на $[0, x_i]$ получено, тогда на отрезке $[x_i, x_i + h \le X]$ представим систему (1) в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = h\mathbf{f}(\mathbf{y}, x) \equiv \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, \xi), \quad \mathbf{y}(x_i) = \mathbf{y}_i, \quad \xi = \frac{(x - x_i)}{h}, \quad \xi \in [0, 1]. \tag{2}$$

Обозначим $\mathbf{y}\,(x) = \mathbf{y}\,(x_i + h\xi) = \mathbf{y}\,(\xi) = \mathbf{y}_\xi$, $\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{y}\,(\xi)\,, \xi) = \mathbf{\Phi}\,(\xi) = \mathbf{\Phi}_\xi$. Приближенно представим функцию $\mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, \xi)$ полиномом Эрмита вида

*Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 119 и проекта № 21.26 программы РАН.

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi) = \mathbf{a}(\xi-1)(\xi-s) + \mathbf{b}\xi(\xi-1) + \mathbf{c}\xi(\xi-s)$$

при условиях

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{\Phi}_0, \quad \tilde{\mathbf{\Phi}}(s) = \mathbf{\Phi}_s, \quad \tilde{\mathbf{\Phi}}(1) = \mathbf{\Phi}_1, \quad s \in [0.5, 1.0). \tag{3}$$

Получим

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi) = \frac{(1-\xi)(s-\xi)\mathbf{\Phi}_0}{s} + \frac{\xi(1-\xi)\mathbf{\Phi}_s}{s(s-1)} + \frac{\xi(s-\xi)\mathbf{\Phi}_1}{(s-1)}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) и интегрируя на отрезках $[0,s]$, $[0,1]$, получим систему из $2n$ алгебраических уравнений

$$\varphi_s = b_1(\mathbf{y}_s - \mathbf{y}_0) + a_0\mathbf{\Phi}_0 + a_1\Delta\mathbf{\Phi}_s + \Delta\mathbf{\Phi}_1 = 0,$$

$$\varphi_1 = b_2(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0) - b_2\mathbf{\Phi}_0 + \Delta\mathbf{\Phi}_s + a_2\Delta\mathbf{\Phi}_1 = 0, \tag{5}$$

где

$$\Delta\mathbf{\Phi}_s = \mathbf{\Phi}_s - \mathbf{\Phi}_0,\ \Delta\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_1 - \mathbf{\Phi}_0.$$
$$a_0 = \frac{6(s-1)}{s^2}, \quad a_1 = \frac{2s-3}{s^2}, \quad a_2 = -s(3s-2),$$
$$b_1 = -\frac{6(s-1)}{s^3}, \quad b_2 = 6s(s-1).$$

Погрешность метода по шагу интегрирования h удовлетворяет оценке [1] $|\mathbf{y}(h) - \tilde{\mathbf{y}}(h)| \sim h^4$.

Система уравнений (5) решается квазиньютоновским методом [2]. Зададим функционал $I = 0.5(\varphi, \varphi)$, $\varphi = \{\varphi_s, \varphi_1\}$. Итерационный процесс поиска решения строится по соотношению $d\varphi = -\varphi d\tau$, которое определяет сходимость процесса из любой точки области притяжения искомого решения, так как

$$dI = (\varphi, d\varphi) = -(\varphi, \varphi)d\tau = -2Id\tau,\ \lim_{\tau\to\infty} I = 0.$$

Итерационный процесс для системы (5) имеет вид

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial\mathbf{y}_s}\delta\mathbf{y}_s^i + \frac{\partial\varphi_s}{\partial\mathbf{y}_1}\delta\mathbf{y}_1^i = -\varphi_s^{i-1}\tau,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{y}_s}\delta\mathbf{y}_s^i + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{y}_1}\delta\mathbf{y}_1^i = -\varphi_1^{i-1}\tau, \tag{6}$$

где

$$\delta\mathbf{y}_s^i = \mathbf{y}_s^i - \mathbf{y}_s^{i-1}, \quad \delta\mathbf{y}_1^i = \mathbf{y}_1^i - \mathbf{y}_1^{i-1}, \quad \mathbf{J} = \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{y}},$$

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial\mathbf{y}_s} = b_1\mathbf{E} + a_1\mathbf{J}_s^{i-1}, \quad \frac{\partial\varphi_s}{\partial\mathbf{y}_1} = \mathbf{J}_1^{i-1},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{y}_s} = \mathbf{J}_s^{i-1}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{y}_1} = b_2\mathbf{E} + a_2\mathbf{J}_1^{i-1}. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Подставляя (7) в (6), находим i-е приближение решения

$$\mathbf{D} = \mathbf{J}_1^{i-1} - (b_1(\mathbf{J}_s^{i-1})^{-1} + a_1\mathbf{E})(a_2\mathbf{J}_1^{i-1} + b_2\mathbf{E}),$$

$$\delta\mathbf{y}_1^i = \mathbf{D}^{-1}[(b_1(\mathbf{J}_s^{i-1})^{-1} + a_1\mathbf{E})\varphi_1^{i-1} - \varphi_s^{i-1}]\tau,$$
$$\delta\mathbf{y}_s^i = (\mathbf{J}_s^{i-1})^{-1}[(a_2\mathbf{J}_1^{i-1} + b_2\mathbf{E})\delta\mathbf{y}_1^i - \varphi_1^{i-1}\tau]. \quad (8)$$

Начальное приближение задается решением системы ОДУ (2) методом Рунге — Кутты третьего порядка точности на отрезке $[0, s]$ и методом Эйлера на отрезке $[s, 1]$. Из анализа устойчивости LRM$(0, 0, 0, s)$-метода (см. ниже) применительно к системам ОДУ для параметра s целесообразно значение $s \approx 0.9$. Параметр $\tau \in (0, 1]$ определяется на каждом шаге из условия $I^i < I^{i-1}$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условий $I^i < \varepsilon_1$, $|\delta\mathbf{y}_1^i| < \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 — заданные величины.

Замечание. При стремлении s к единице число обусловленности матрицы Якоби системы уравнений (5) неограниченно возрастает. Поэтому при обращении матриц необходимо применять способы повышения точности вычислений. Для приведения матрицы к верхней треугольной форме используются операции умножения и алгебраического сложения. При сложении двух чисел, заданных с абсолютной ошибкой ε (ошибка округления), абсолютная погрешность результата может максимально только удвоиться. Однако при умножении $c = (a + \varepsilon)(b + \varepsilon)$ ошибка результата может возрасти многократно $\delta c \le (|a| + |b|)\varepsilon$. Для уменьшения ошибки в последнем случае целесообразно использовать следующий прием. Пусть необходимо найти решение системы n линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Опишем первый шаг: исключение элемента a_{n1}. Определим максимальные по модулю элементы в $(n-1)$-й и n-й строках, которые обозначим соответственно q_{n-1} и q_n. Вычисляем

$$k_{n-1} = entier(\log_2 q_{n-1}),\ k_n = entier(\log_2 q_n)$$

и производим нормирование посредством операций

$$\bar{a}_{n-1,j} = a_{n-1,j}2^{-(k_{n-1}+1)}, \quad \bar{a}_{n,j} = a_{n,j}2^{-(k_n+1)},$$

$$\bar{b}_{n-1,j} = b_{n-1,j}2^{-(k_{n-1}+1)}, \quad \bar{b}_{n,j} = b_{n,j}2^{-(k_n+1)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Нормирование проводится в двоичном коде, изменяются лишь порядки чисел, при этом модули элементов строк матрицы будут меньше единицы. Далее элементы $(n-1)$-й строки умножаются на $\bar{a}_{n1}$, а n-й строки — на $\bar{a}_{n-1,1}$. Сложением или вычитанием строк $(n, 1)$-й элемент обращается в ноль. Точно так же обращаются в ноль все поддиагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$. Затем решение находится путем обратной прогонки. Для обращения матрицы $\mathbf{A}$ необходимо вектор $\mathbf{b}$ заменить единичной матрицей $\mathbf{E}$.

2. Устойчивость метода

Для исследования устойчивости метода используется линейное уравнение [3]

$$z'(x) = \lambda z(x), \quad z(0) = z_0, \quad x \ge 0, \quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \quad \mu = \lambda h. \quad (9)$$

Решение для одношагового метода записывается в виде

$$z(\mu) = z_0 q(\mu). \quad (10)$$

Приведем определение $L(\delta)$-устойчивости, данное в [1].

Определение (следуя [3], с. 122). Одношаговый метод назовем $L(\delta)$-устойчивым с параметром $\delta \in (0,1)$, если метод A устойчив и $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} |q(\mu)| = \delta$.

Ниже будет показано, что величина δ может быть выбрана достаточно малой. В этом случае $L(\delta)$-устойчивость, как и L-устойчивость, является полезным свойством метода для эффективного численного решения "сильно жестких" систем.

Теорема 1. LRM$(0,0,0,s)$-метод A-устойчив при $s \in [0.5, 1.0)$ и $L(\delta)$-устойчив с параметром $\delta = (1-s)/s$ при $s \in (0.5, 1.0)$.

Доказательство. Обратимся к уравнению (9). Представим комплексное число λ в тригонометрической форме и обозначим

$$\lambda = \rho[\cos(\phi) + i\sin(\phi)],$$

$$c = \cos(\phi) < 0, \quad d = 2s-1, \quad \bar{\rho} = h\rho. \tag{11}$$

Из (5), (10) получим

$$q(\mu) = \frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta},$$

$$|q(\mu)| = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2+\delta^2}} = \sqrt{\frac{G(\bar{\rho})}{H(\bar{\rho})}}, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
&G(\bar{\rho}) = \sum_{i=0}^{4} g_i \bar{\rho}^i, \quad H(\bar{\rho}) = \sum_{i=0}^{4} p_i \bar{\rho}^i,\\
&g_0 = 144, \quad p_0 = 144,\\
&g_1 = c(144 - 48d), \quad p_1 = c(-144 - 48d),\\
&g_2 = 48c^2 + d^2 - 48c^2 d + 12, \quad p_2 = 48c^2 + d^2 + 48c^2 d + 12,\\
&g_3 = 4d^2 c - 16dc + 12c, \quad p_3 = -4d^2 c - 16dc - 12c,\\
&g_4 = 1 - 2d + d^2, \quad p_4 = 1 + 2d + d^2.
\end{aligned}$$

Разность между знаменателем и числителем в (12)

$$H - G = -\,c\bar{\rho}(\,288 + 8\bar{\rho}^2 d^2 + 24\bar{\rho}^2) + d\bar{\rho}^2(96c^2 + 4\bar{\rho}^2)$$

положительна при достаточном условии $d \geq 0$ ($c < 0$ по условию задачи (9)). Так как $G > 0, H > 0$, то $|q(\bar{\rho})| < 1$ при $s \geq 1/2$ для любого $\bar{\rho}$, откуда следует справедливость первого утверждения теоремы. Из приведенных соотношений следует

$$\lim_{\bar{\rho}\to\infty} |q(\bar{\rho})| = \sqrt{\frac{g_4}{p_4}} = \frac{1-d}{1+d} = \frac{1-s}{s},$$

что доказывает второе утверждение теоремы.

3. Расчет локальной и глобальной ошибки

Вычисление ошибки $\delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}$ на шаге h производится путем следующей процедуры. Исходная система

$$\frac{d\mathbf{y}(\xi)}{d\xi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, \xi), \quad \xi \in [0,1], \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{13}$$

Приближенная система

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}(\xi)}{d\xi} = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi), \quad \xi \in [0,1], \quad \tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{14}$$

При $|\delta\mathbf{y}| << 1$ с погрешностью $o(|\delta\mathbf{y}|)$ справедлива оценка

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{y},\xi) \approx \mathbf{\Phi}(\tilde{\mathbf{y}},\xi) + \bar{\mathbf{J}}(\xi)\delta\mathbf{y}, \tag{15}$$

где $\bar{\mathbf{J}}(\xi) = h\mathbf{J}(\xi)$. Из (13), (14), (15) получим уравнение для вычисления ошибок

$$\frac{d\delta\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{Q}(\xi) + \bar{\mathbf{J}}(\xi)\delta\mathbf{y} = \mathbf{R}(\delta\mathbf{y},\xi), \quad \mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{\Phi}(\tilde{\mathbf{y}},\xi) - \tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi). \tag{16}$$

Ошибка аппроксимации функции $\phi(t)$ интерполяционным полиномом Эрмита $H_m(t)$ равна [4]

$$\begin{gathered}\phi(t) - H_m(t) = \frac{\phi^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}\Omega(t),\\ \Omega(t) = (t-t_0)^{\alpha_0}(t-t_1)^{\alpha_1}\cdots(t-t_n)^{\alpha_n},\\ m+1 = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n.\end{gathered} \tag{17}$$

Для приближенного значения $\mathbf{Q}(\xi)$ будем использовать представление (17). В случае LRM$(0,0,0,s)$- метода $\alpha_0 = \alpha_s = \alpha_1 = 1,\ m+1 = 3$ и

$$\mathbf{Q}(\xi) \approx \tilde{\mathbf{Q}}(\xi) = \mathbf{C}_1\Omega(\xi), \quad \Omega(\xi) = \xi(\xi - s)(\xi - 1). \tag{18}$$

Коэффициент $\mathbf{C}_1$ определим из условия

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\xi_*) = \mathbf{Q}(\xi_*),$$

где ξ_* соответствует максимуму $\Omega(\xi)$, $\Omega(\xi_*) = \max\ \Omega(\xi),\ \xi \in (0,1)$. Получим

$$\xi_* = \frac{(s+1) - \sqrt{(s+1)^2 - 3s}}{3},$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{\Phi}(\tilde{\mathbf{y}}_*) - \tilde{\mathbf{\Phi}}(\xi_*)}{\xi_*(\xi_* - s)(\xi_* - 1)}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_* = \tilde{\mathbf{y}}(\xi_*). \tag{19}$$

Аппроксимация Якобиана. Якобиан аппроксимируем квадратичной функцией от ξ

$$\bar{\mathbf{J}}(\xi) = (1-\xi)\mathbf{A} + \xi\mathbf{B} + \xi(1-\xi)\mathbf{D} \tag{20}$$

при условиях $\bar{\mathbf{J}}(0) = \bar{\mathbf{J}}_0,\ \bar{\mathbf{J}}(1) = \bar{\mathbf{J}}_1,\ \bar{\mathbf{J}}(s) = \bar{\mathbf{J}}_s$. Получим

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{J}}_0, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{J}}_1, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{s}[(\bar{\mathbf{J}}_1 - \bar{\mathbf{J}}_0) - \frac{\bar{\mathbf{J}}_1 - \bar{\mathbf{J}}_s}{1-s}].$$

Все функции в (16) определены, и интегрирование системы квазилинейных дифференциальных уравнений (16) производится методом LR$(1,1)$ [1], модифицированным на случай неавтономной системы, пятого порядка погрешности при начальном значении $\delta\mathbf{y}_0$, равном глобальной ошибке интегрирования на предыдущем шаге.

Модификация $\mathbf{LR}(1,1)$-метода для интегрирования системы квазилинейных ОДУ. В данном случае интерполяционный полином Эрмита записывается следующим образом:

$$\mathbf{R}(\delta\mathbf{y},\xi) \approx \mathbf{g}(\xi) = \mathbf{R_0}\psi_{\mathbf{0,0}}(\xi) + \mathbf{R'}_{\xi\mathbf{0}}\psi_{\mathbf{0,1}}(\xi) + \mathbf{R}_1\psi_{1,0}(\xi) + \mathbf{R'}_{\xi 1}\psi_{1,1}(\xi),$$
$$\psi_{0,0}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \psi_{0,1}(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3,$$

$$\psi_{1,0}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \psi_{1,1}(\xi) = -\xi^2 + \xi^3,$$

$$\mathbf{R'}_{\xi}(\delta\mathbf{y},\xi) = \frac{d\mathbf{Q}(\xi)}{d\xi} + \frac{d\bar{\mathbf{J}}(\xi)}{d\xi}\delta\mathbf{y} + \bar{\mathbf{J}}(\xi)(\mathbf{Q}(\xi) + \bar{\mathbf{J}}(\xi)\delta\mathbf{y}). \tag{21}$$

Интегрируя (16) с учетом (21), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения глобальной ошибки на шаге h

$$\delta\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{R}_0 + \frac{1}{12}\mathbf{R'}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_1 - \frac{1}{12}\mathbf{R'}_1\mathbf{R}_0 = \bar{\mathbf{J}}_0\delta\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{R}_1 = \bar{\mathbf{J}}_1\delta\mathbf{y}_1,$$

$$\mathbf{R'}_0 = \mathbf{C}_1 s + [(-\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{D}) + \bar{\mathbf{J}}_0^2]\delta\mathbf{y}_0,$$

$$\mathbf{R'}_1 = \mathbf{C}_1(1-s) + [(-\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{D}) + \bar{\mathbf{J}}_1^2]\delta\mathbf{y}_1. \tag{22}$$

Для регулирования шага интегрирования h используется локальная ошибка $\delta\mathbf{y}_{loc} = \delta\mathbf{y}_1 - \delta\mathbf{y}_0$. Задается какая-либо монотонно убывающая функция $K(u)$, $u = \frac{|\delta\mathbf{y}_{loc}|}{\varepsilon}$, $K(1) = 1$, ε — заданная локальная точность. Если на полученном решении $K(u_i) > 1$, то расчет повторяется с уменьшенным шагом $h_i = \frac{h_i}{K(u_i)}$. В противном случае вычисляется величина следующего шага $h_{i+1} = \frac{h_i}{K(u_i)}$.

4. Тестовые расчеты

Для тестовых расчетов взяты следующие системы дифференциальных уравнений (λ_i — собственные числа матрицы Якоби при $t = t_0$).

1. Жесткая система с пограничным слоем на левом конце

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = -10\,\dot{y}_2 + 3000(1 - y_1^2),\\
&\dot{y}_2 = 0.04(1 - y_2) - (1 - y_1)y_2 + 10^{-4}(10^{-1} - y_1^2),\\
&0 \le t \le 2.6, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0,\\
&\lambda_1 = -6000, \quad \lambda_2 = -0.04.
\end{aligned}$$

2. Жесткая система с периодически повторяющимся пограничным слоем

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = -2000y_1 + 1000y_2 + 1 + \sin(10t),\\
&\dot{y}_2 = y_1 - y_2,\\
&0 \le t \le 4, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0,\\
&\lambda_1 = -2000, \quad \lambda_2 = -0.5.
\end{aligned}$$

3. Жесткая система с пограничным слоем на левом конце для первых двух компонент и на правом конце для третьей компоненты вектора решения

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = -(55 + y_3)y_1 + 65y_2,\\
&\dot{y}_2 = 0.0785(y_1 - y_2),\\
&\dot{y}_3 = 0.1y_1,\\
&0 \le t \le 500, \quad y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0,\\
&\lambda_1 = -55, \quad \lambda_{2,3} = 0.00625 \pm 0.01i.
\end{aligned}$$

4. Слабо жесткая задача с пограничным слоем на правом конце. Сильная чувствительность к возмущениям начальных условий и очень быстрое возрастание на правом конце (тест Троеша [5]):

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = y_2,\\
&\dot{y}_2 = sh(y_1),\\
&0 \le t \le 10,\\
&y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 3.585 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Расчеты выполнены LRM$(0,0,0,s)$-методом, а также неявным методом Рунге — Кутты пятого порядка точности (РК5), использующим вторую производную от решения [6] (программная версия 1995 г.), и стандартным методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности (РКСТ). Результаты решения сведены в таблицу, где представлены шаги интегрирования: минимальный $h_{\min}$, максимальный $h_{\max}$. Эти данные характеризуют эффективность используемого способа автоматического выбора шага интегрирования по локальной точности. Затрачиваемые ресурсы характеризуются числом вычислений правых частей системы k_f, ε — задаваемая локальная точность интегрирования, δy_{glob} — получаемая глобальная точность. Глобальная точность решения задач методами РКСТ и РК5 оценивалась сравнением с решениями, полученными методом LRM$(0,0,0,0.9)$ (столбец δy).

Из приведенных в таблице данных видно, что эффективность рассматриваемого метода по критерию быстродействия, которому отвечает количество вычислений правых

Сравнительная таблица решений тестовых задач различными методами

Задача	Метод	$h_{\min}$	$h_{\max}$	k_f	ε	δy_{glob}	δy
1	РКСТ	8.0E-05	1.9E-03	51352	1.0E-07	—	3.9E-06
	РК5	1.7E-04	1.3	53	1.0E-07	—	1.0E-09
	LRM$(000,0.9)$	1.0E-04	1.0	70	1.0E-07	1.0E-06	—
2	РКСТ	2.7E-05	2.0E-03	88864	1.0E-07	—	5.7E-07
	РК5	1.7E-04	1.0E-01	586	1.0E-07	—	1.0E-07
	LRM$(000,0.9)$	1.0E-05	0.4	553	1.0E-07	1.0E-06	—
3	РКСТ	1.7E-03	1.9E-01	14261	1.0E-07	—	4.7E-07
	РК5	1.0E-03	12	2405	1.0E-07	—	1.0E-07
	LRM$(000,0.9)$	0.12	49	1107	1.0E-07	1.0E-08	—
4	РКСТ	3.8E-04	1.8E-01	3588	1.0E-07	—	7.3E-05
	РК5	1.4E-04	2.2E-01	2405	1.0E-06	—	1.0E-04
	LRM$(000,0.9)$	1.0E-04	1.0	1330	1.0E-07	1.0E-03	—

частей системы, для разных задач различна. Для задачи 1 в методе РК5 количество вычислений правых частей минимально, однако для других задач видны преимущества нового метода. Представленный метод позволяет получать решения с высокой точностью. Это свойство особенно важно для систем с наличием неустойчивости решений к возмущениям начальных значений фазовых переменных, к которым, например, относятся системы уравнений движения небесной механики.

Для нежестких систем и систем с умеренной жесткостью предпочтительно значение $s = 0.5$.

Список литературы

[1] Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Численные методы решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2007. Т. 47, № 2. С. 234–244.

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.

[3] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Ред. Дж. Холл и Дж. Уатт. М.: Мир, 1979.

[4] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1970.

[5] Roberts S.M., Shipmen J.S. Solution of Troesch's two-point boundary value problem by a combination of techniques // J. Comput. Phys. 1972. Vol. 10, No. 2.

[6] Хариер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

Поступила в редакцию 14 октября 2009 г.,
с доработки — 29 сентября 2010 г.