

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОТРАЖАЮЩИХ УСЛОВИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. А. АНИСИМОВ, В. Д. КУРГУЗОВ

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Simulated and investigated in the paper are the conditions on artificial boundaries of the calculated area, which describe the passing of shock waves without reflection on these boundaries. The problem of forming such conditions arises when solving a number of elasticity problems, where the domain of the unknown function is a half-plane. Making use of the finite-difference methods necessitates the limitation of integrating domain by the external artificial boundaries on which the conditions should be created that simulate the absence of the reflecting effect.

Для одномерных задач неотражающие условия могут быть сформулированы точно (в дифференциальном виде) и проблема заключается только в их "правильной" разностной аппроксимации. В случае решения многомерных задач динамики нельзя полностью построить неотражающие условия, т. е. применяемые условия уже на дифференциальном уровне носят приближенный характер. Это приводит к тому, что при численных расчетах возмущения, дошедшие до искусственных границ, с течением времени частично отражаются от них, искажая при этом решение внутри области. Таким образом, конечные размеры расчетной области всегда ограничивают длительность решения поставленной задачи, и поэтому одним из основных критериев при построении условий неотражения является более точное описание решения на длительном интервале времени в выделенной области интегрирования.

Различным способам построения условий на искусственных границах посвящено довольно много работ (полную библиографию можно найти, например, в [1]). Вопросы практической применимости неотражающих условий в тех или иных разностных схемах рассматривались в работах [2–10], анализ которых позволяет выделить два универсальных способа построения неотражающих условий при изучении многомерных нестационарных процессов в механике сплошных сред: моделирование, основанное на аналогии с точными условиями для одномерных задач; использование пространственных и пространственно-временных экстраполяций. Рассмотрим более подробно эти способы применительно к двумерным динамическим задачам теории упругости.

1. Использование аналогии с одномерной задачей

Уравнения одномерной задачи динамики, описывающие распространение плоских волн в полубесконечном стержне $x \geq 0$ имеют вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\sigma(0, x) = \sigma_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \alpha u(t, 0) + \beta \sigma(t, 0) = \varphi(t), \quad (2)$$

где u — скорость частиц стержня, σ — напряжение, E — модуль упругости, ρ — плотность, α, β — постоянные коэффициенты.

Решение задачи (1), (2) можно представить в виде двух соотношений

$$\sigma(x, t) \pm \sqrt{\rho E} u(x, t) = c^\pm, \quad (3)$$

где величины c^\pm принимают постоянные значения, определяемые начальными и граничными условиями, вдоль каждой из характеристических линий

$$\frac{dx}{dt} = \pm c, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Предположим для простоты, что в начальный момент $t = 0$ стержень не возмущен:

$$u_0(x) = \sigma_0(x) = 0, \quad x \geq 0. \quad (4)$$

Для того, чтобы волна проходила некоторую точку $x = L$ без отражения, необходимо в этой точке сформулировать условия, отсекающие волны, приходящие из бесконечности. В силу (3), (4) эти условия имеют вид

$$\sigma(L, t) + \sqrt{\rho E} u(L, t) = 0. \quad (5)$$

Разбив отрезок $[0, L]$ на N равных интервалов h и обозначив границы расчетных ячеек целыми индексами i , а середины ячеек — полуцелыми индексами $i - 1/2$ ($i = 0, 1, \dots, N$), аппроксимируем условие (5) в точке $x = L = Nh$ соотношением

$$\sigma_N \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + \sqrt{\rho E} u_N \left(t + \frac{\tau}{2} \right) = 0. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что если разностная схема решения задачи (1), (2) допускает формулировку граничных условий в виде линейной комбинации напряжения и скорости, то соотношение (6) является точным неотражающим условием для такой схемы. Иными словами, разностные граничные условия (6) обеспечивают полное поглощение приходящих в точку L возмущений, не искажая численного решения задачи в выделенной расчетной области $[0, L]$. Заметим, что для схемы Годунова [11] функции σ_N, u_N в (6) имеют смысл вспомогательных “больших” величин на искусственной границе $x = L$, а в алгоритме решения задач динамики на основе нескольких аппроксимаций [12, 13] функции σ_N, u_N — значения пространственных полиномов σ' и u' в точке L .

Обобщим соотношение (6) на случай решения двумерных задач теории упругости. Пусть прямоугольная область $\Omega = \{x, y : x \in [0, L_x], y \in [0, L_y]\}$ покрыта регулярной сеткой, составленной из прямоугольников или квадратов. Линии $x = Nh_x = L_x$ и

$y = Mh_y = L_y$ будем считать искусственными границами, на которых необходимо сформулировать условия, обеспечивающие полное или частичное поглощение приходящих возмущений. По аналогии с одномерным условием (6) на фиктивных границах $x = L_x, y = L_y$ примем

$$[\sigma_{xx} + \sqrt{\rho a} u_x]_{N, j-1/2}^{t+\tau/2} = 0, \quad (7)$$

$$[\sigma_{yx} + \sqrt{\rho b} u_y]_{N, j-1/2}^{t+\tau/2} = 0, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$[\sigma_{xy} + \sqrt{\rho b} u_x]_{i-1/2, M}^{t+\tau/2} = 0, \quad (8)$$

$$[\sigma_{yy} + \sqrt{\rho a} u_y]_{i-1/2, M}^{t+\tau/2} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ — компоненты тензора напряжений, u_x, u_y — компоненты вектора скорости, $a = \lambda + 2\mu, b = \mu, \lambda, \mu$ — упругие постоянные.

Таким образом, предполагается, что вдоль каждой из искусственных границ возмущенное движение близко к одномерному. Разделение движения на два одномерных, создаваемых продольной и поперечной волнами, характерно для процедур расщепления. Поэтому условия (7), (8) являются естественными для схем решения двумерных задач упругости, в основе которых лежит расщепление на одномерные задачи. Используя терминологию, принятую для схемы Годунова, можно сказать, что “большие” величины, вычисляемые на искусственных границах в момент $t + \tau/2$, определяются из решения одномерных задач о распаде произвольного разрыва, возникшего между возмущенным состоянием в момент t в ячейках сетки, примыкающих к искусственным границам $x = L_x, y = L_y$ слева и снизу, и невозмущенным состоянием в фиктивных ячейках, примыкающих к этим границам справа и сверху. Заметим, что условия, аналогичные соотношениям (7), (8), применялись в работе [7] при решении ряда задач о распространении волн в полуплоскости $x \geq 0$, содержащей прямоугольную выемку.

2. Использование пространственно-временных экстраполяций

Описанные выше способы построения условий на искусственных границах основаны на физической аналогии с соответствующими точными условиями для одномерной задачи о распространении упругих волн в полубесконечном стержне. Возможен другой подход к проблеме формулировки неотражающих условий, в основе которого лежит та или иная процедура экстраполяции решения вдоль направления неограниченной протяженности. В отличие от рассмотренного варианта, при использовании пространственно-временных экстраполяций не всегда можно дать четкую механическую интерпретацию построенным граничным условиям.

Во многих работах были проверены неотражающие свойства условий, полученных в результате простейших экстраполяций:

$$\mathbf{f}_N(t + \tau) = \mathbf{f}_{N-1}(t + \tau), \quad \mathbf{f}_N(t + \tau) = 2\mathbf{f}_{N-1}(t + \tau) - \mathbf{f}_{N-2}(t + \tau), \quad (9)$$

где \mathbf{f}_N — вектор решения в точках искусственной границы. Первое из условий (9), названное в работе [8] условием полного поглощения, использовалось при решении задачи о распространении упругих волн в слоистом полупространстве. Как отмечается в [9], вычислительные эксперименты показывают, что при таком подходе в волновую картину

вносятся существенные искажения после достижения фронтом возмущений искусственной границы. Второе условие в (9) представляет собой линейную экстраполяцию решения по пространству и также не всегда является удовлетворительным.

Для ряда схем решения двумерных задач теории упругости, в которых решение на верхнем слое вычисляется в серединах элементов сетки, формулировка условий на искусственных границах может быть заменена процедурой построения решения в элементах, примыкающих к этим границам. При этом обычно используется экстраполяция известных значений искомым функций, найденных внутри расчетной области. Один из вариантов такой экстраполяции, указанный в [9, 10], состоит в следующем. Предположим, что вектор решения на нижнем слое по времени $\mathbf{f}(t)$ известен во всех ячейках области. По явной схеме определяем решение на верхнем слое $\mathbf{f}(t + \tau)$ во всех элементах, не примыкающих к фиктивным границам, т. е. в ячейках, номера которых не содержат индекса $N - 1/2$. Для вычисления вектора $\mathbf{f}_{N-1/2}(t + \tau)$ представим его в виде линейной комбинации векторов с нижнего слоя:

$$\mathbf{f}_{N-1/2}(t + \tau) = \alpha_1 \mathbf{f}_{N-1/2}(t) + \alpha_2 \mathbf{f}_{N-3/2}(t) + \alpha_3 \mathbf{f}_{N-5/2}(t) + \boldsymbol{\xi}_{N-1/2}(t + \tau),$$

где $\boldsymbol{\xi}_{N-1/2}(t + \tau)$ — некоторая векторная поправка, α_k — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Используя для известных векторов $\mathbf{f}_{i-1/2}(t + \tau)$ аналогичное представление

$$\mathbf{f}_{i-1/2}(t + \tau) = \alpha_1 \mathbf{f}_{i-1/2}(t) + \alpha_2 \mathbf{f}_{i-3/2}(t) + \alpha_3 \mathbf{f}_{i-5/2}(t) + \boldsymbol{\xi}_{i-1/2}(t + \tau),$$

можно вычислить соответствующие поправки для $i < N$. Определив $\boldsymbol{\xi}_{N-1/2}(t + \tau)$ экстраполяцией по предыдущим значениям $\boldsymbol{\xi}_{i-1/2}(t + \tau)$, получим решение в ячейках, примыкающих к искусственной границе. Численные расчеты [9, 10] свидетельствуют об эффективности предложенного подхода. Максимальная относительная погрешность в пределах точности метода не превышает 2%. К недостаткам подхода можно отнести неопределенность в задании коэффициентов α_k , значения которых необходимо подбирать путем численных экспериментов для каждой конкретной задачи.

Заметим, что в общем случае нельзя построить полностью неотражающие условия, точно передающие волновую картину в окрестности угловых точек (точек пересечения двух искусственных границ, искусственной и естественной границы). Поэтому в большинстве работ, посвященных этой проблеме, точные условия неотражения или их достаточно высокие приближения строятся для выделенной в неограниченном упругом пространстве линии, например для прямой $x = x_0 = \text{const}$.

3. Примеры использования неотражающих условий

Рассмотрим прямоугольную область Ω^* на плоскости переменных x, y декартовой прямоугольной системы координат. Пусть Ω — некоторая прямоугольная подобласть Ω^* , на границах которой необходимо сформулировать условия неотражения. Численное решение задачи, полученное в Ω без использования условий на искусственных границах, т. е. при расчете всей области Ω^* , в дальнейшем будем называть эталонным или точным решением. В качестве численного метода решения динамической задачи теории упругости использовался алгоритм векторного расщепления задач динамики упругопластического деформирования на основе нескольких аппроксимаций каждой из искомым функций [12, 13].

Соотношения (7), (8), построенные по аналогии с условием для одномерной задачи, обозначим как вариант 1. В качестве варианта 2 на границах $x = L_x$, $y = L_y$ рассмотрим следующие условия:

$$\begin{aligned} [\sigma_{xx} + \sqrt{\rho a} u_x]_{N, j-1/2}^{t+\tau/2} &= [\sigma_{xx} + \sqrt{\rho a} u_x]_{N-1/2, j-1/2}^t, \\ [\sigma_{yx} + \sqrt{\rho b} u_y]_{N, j-1/2}^{t+\tau/2} &= [\sigma_{yx} + \sqrt{\rho b} u_y]_{N-1/2, j-1/2}^t, \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{xy} + \sqrt{\rho b} u_x]_{i-1/2, M}^{t+\tau/2} &= [\sigma_{xy} + \sqrt{\rho b} u_x]_{i-1/2, M-1/2}^t, \\ [\sigma_{yy} + \sqrt{\rho a} u_y]_{i-1/2, M}^{t+\tau/2} &= [\sigma_{yy} + \sqrt{\rho a} u_y]_{i-1/2, M-1/2}^t, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя формулы явной схемы решения одномерных задач в алгоритме [13], нетрудно показать, что условия (10), (11) представляют собой простейшую экстраполяцию: значения искомых функций в точках искусственной границы на среднем слое по времени равны известным значениям этих функций с нижнего слоя в ячейках из Ω , примыкающих к искусственным границам:

$$\sigma_{xx}(t + \tau/2, N, j - 1/2) = \sigma_{xx}(t, N - 1/2, j - 1/2),$$

$$\sigma_{yy}(t + \tau/2, i - 1/2, M) = \sigma_{yy}(t, i - 1/2, M - 1/2),$$

...

Заметим, что одномерный аналог условий (10), (11)

$$\sigma_N \left(t + \frac{\tau}{2} \right) + \sqrt{\rho E} u_N \left(t + \frac{\tau}{2} \right) = \sigma_{N-1/2}(t) + \sqrt{\rho E} u_{N-1/2}(t)$$

так же, как и соотношение (6), является точным условием неотражения для задачи о распространении упругой волны в полубесконечном стержне.

Таким образом, условия (10), (11) (вариант 2) можно трактовать, с одной стороны, как условия, полученные в результате пространственно-временной экстраполяции, а с другой стороны, как соотношения, построенные по аналогии с точным условием для одномерной задачи.

Рассмотрим модельную задачу, в которой область интегрирования имеет одну искусственную границу: на торце $y = 0$ прямоугольного стержня $\Omega^* = \{x, y : x \in [0, 0.01], y \in [0, 1]\}$ задана нагрузка $\sigma_{yy} = -\sin \pi t$, боковые поверхности $x = 0$, $x = 0.01$ и противоположный торец $y = 1$ свободны от напряжений. В численных расчетах область Ω^* покрывалась квадратной сеткой с шагом $h = 0.01$, искусственная граница вводилась соотношением $y = Mh$ ($M < 100$), параметр M варьировался от 5 до 50.

На рис. 1, 2 представлены графики изменения во времени скорости u_y и напряжения σ_{yy} в точке с координатами $x = 0.005$, $y = 0.045$. Цифрой 0 отмечена кривая, соответствующая эталонному решению, цифрами 1 и 2 — кривые, полученные по вариантам 1 и 2 соответственно при $M = 10$. Расчеты по обоим вариантам проводились до момента времени $t = 1.9$, т. е. до момента прихода к искусственной границе отраженной от свободного торца $y = 1$ волны.

Нетрудно заметить, что оба варианта условий неотражения правильно передают фронт волны нагружения. Однако в случае использования условий варианта 1 значения скорости u_y занижены по сравнению с эталонным вариантом, а абсолютные значения напряжения

σ_{yy} завышены, и наоборот, для варианта 2 характерны завышенные значения u_y и заниженные σ_{yy} . Максимальная относительная погрешность (по скорости u_y) в рассматриваемом интервале времени при $M = 10$ составляет для варианта 1 — 10.2%, для варианта 2 — 12.1%. Наибольшее отличие от эталонного решения наблюдается при $t \in [0.5, 0.6]$, т. е. в моменты времени, соответствующие максимальным значениям u_y и σ_{yy} на фронте волны нагружения. Далее, при $t > 0.6$ величина относительной погрешности не возрастает. С увеличением M , т. е. при движении искусственной границы в положительном направлении оси y , распределение функций u_y и σ_{yy} приближается к точному решению.

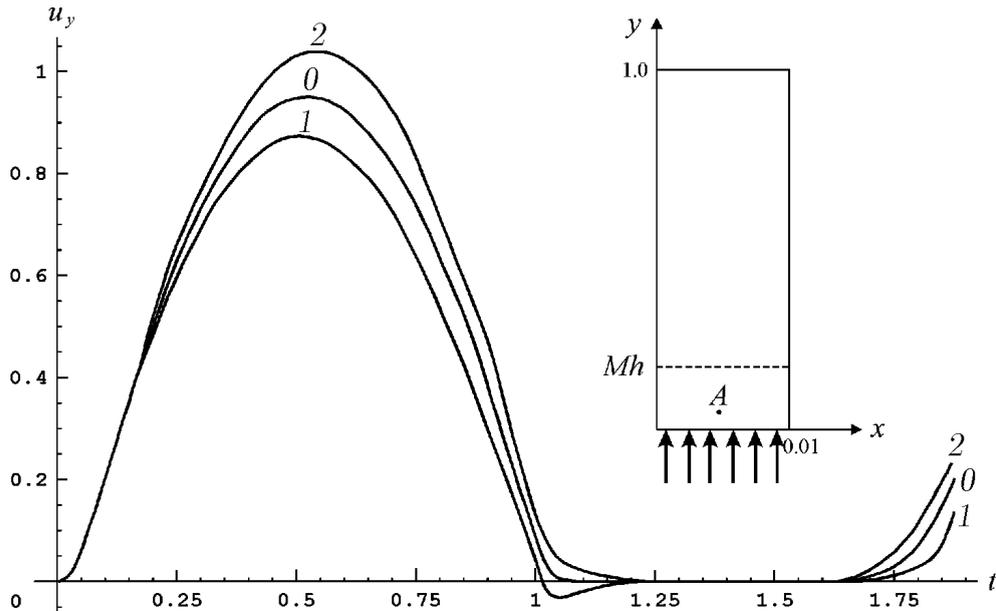


Рис. 1.

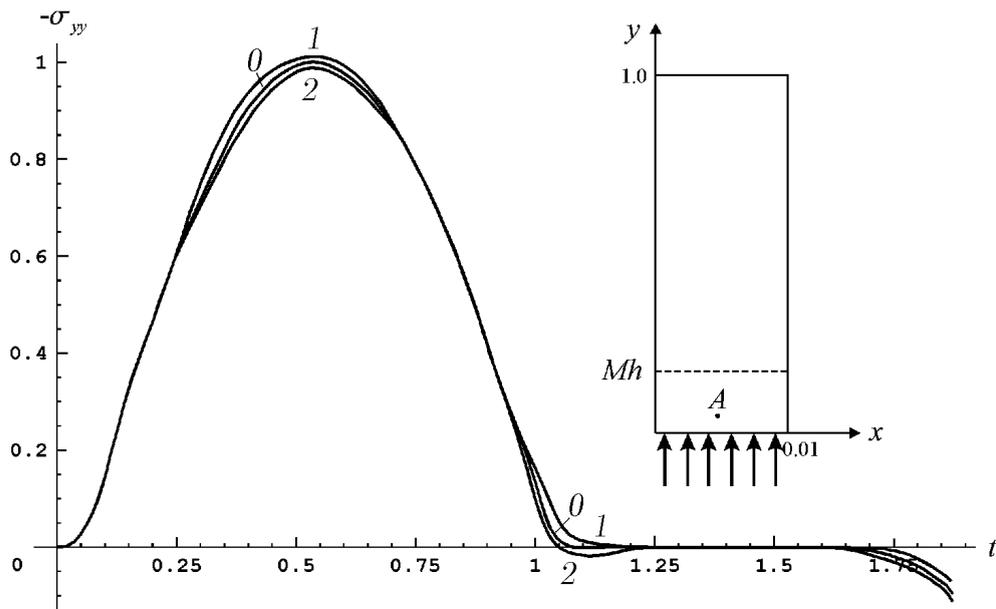


Рис. 2.

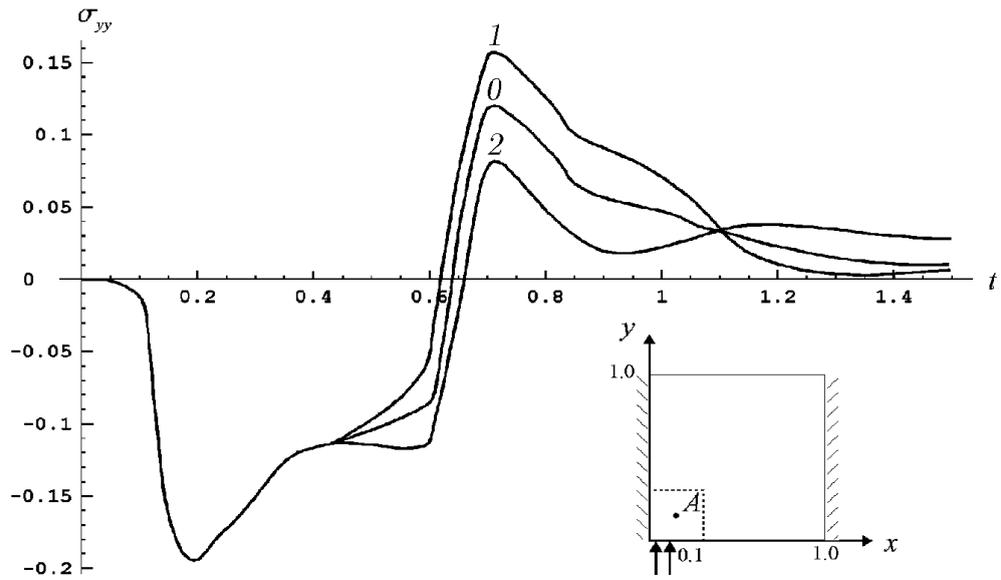


Рис. 3.

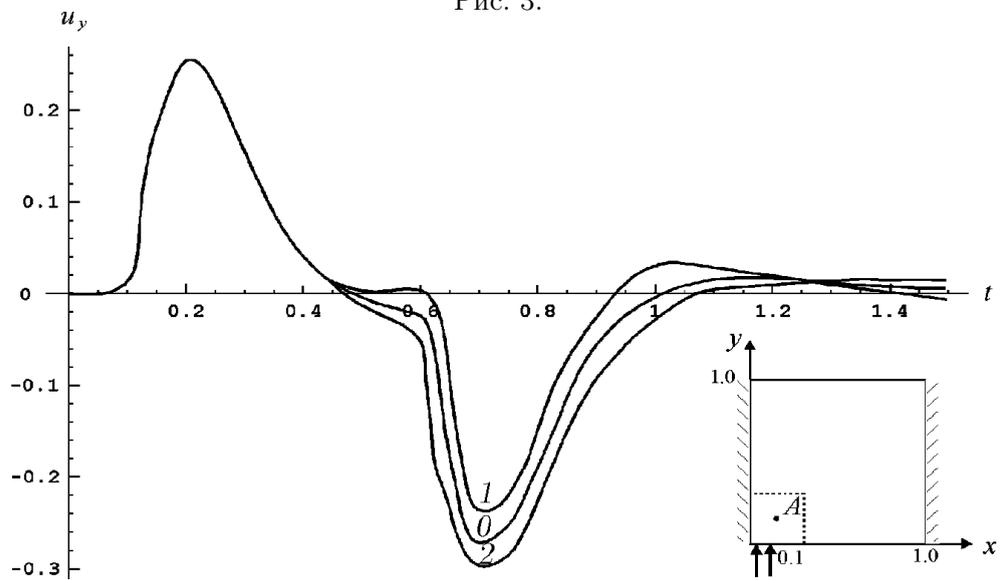


Рис. 4.

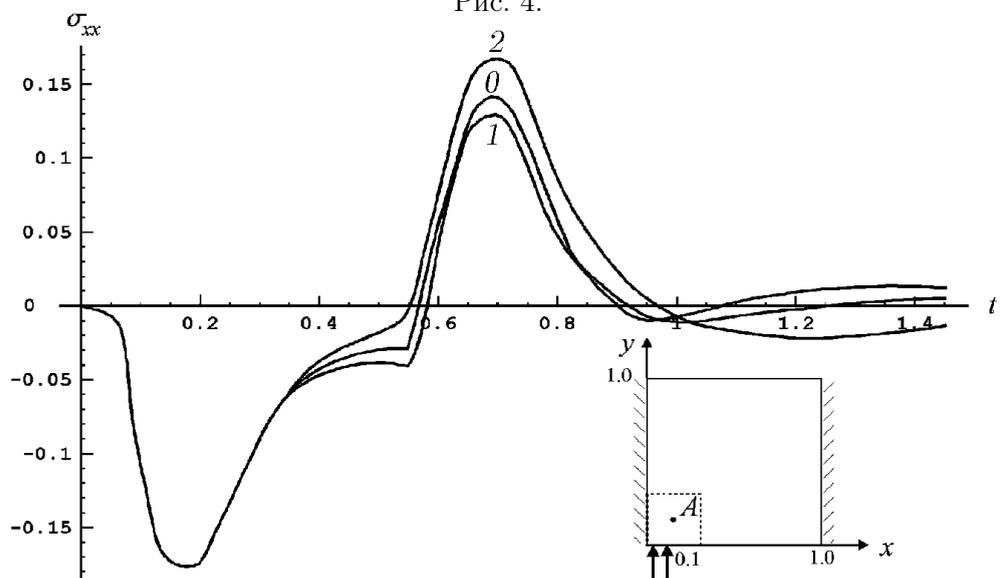


Рис. 5.

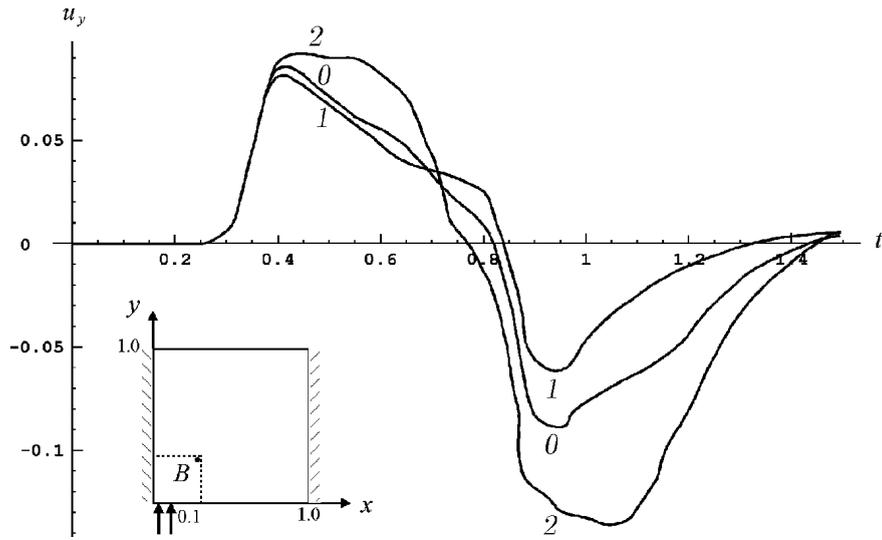


Рис. 6.

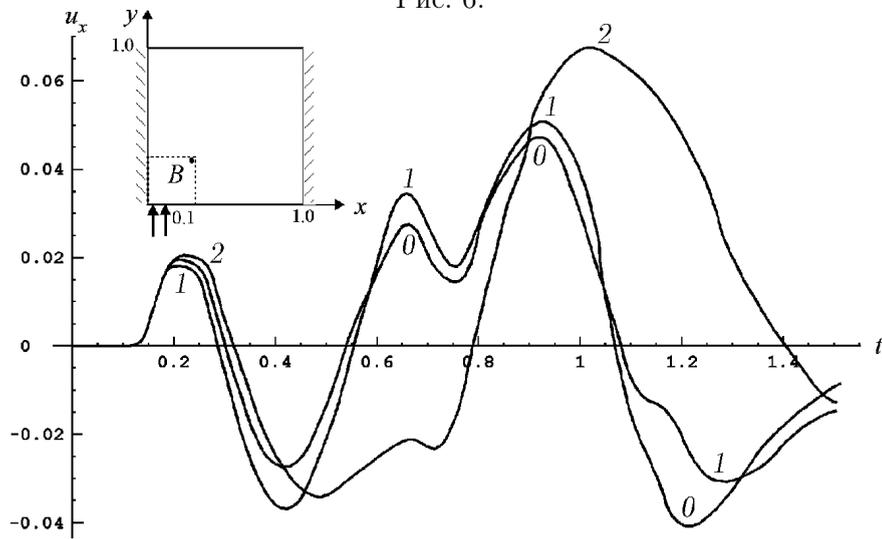


Рис. 7.

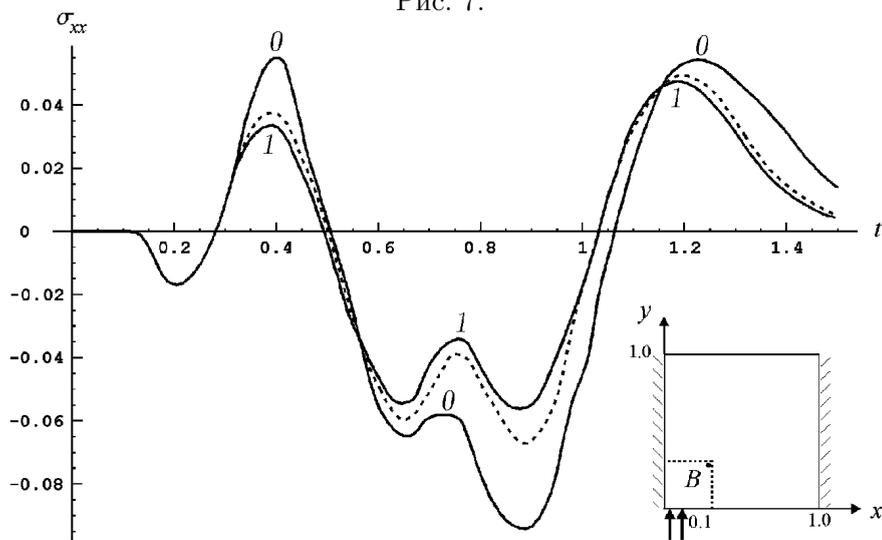


Рис. 8.

Результаты численных экспериментов свидетельствуют о том, что формулировка на искусственных границах неотражающих условий вариантов 1 и 2 приводит соответственно к возрастанию и замедлению скорости распространения фронта волны нагружения. Заметим, что рассматриваемая задача близка к одномерной: значения функций σ_{xx} , σ_{xy} и u_x на 1–3 порядка меньше значений σ_{yy} , u_y .

Проведенные расчеты показывают, что решения, полученные при использовании неотражающих условий вариантов 1 и 2, как правило, ограничивают эталонное решение “сверху” и “снизу”. Поэтому представляется естественной формулировка на искусственных границах условий, являющихся линейной комбинацией вариантов 1 и 2. Однако, как показывают численные эксперименты, для существенного приближения к точному решению необходимо подбирать коэффициенты линейной комбинации в каждом конкретном случае. Другая принципиальная возможность комбинирования вариантов 1 и 2 состоит в их переменном использовании, например, на шаге n — условия 1, на шаге $n+1$ — условия 2. При таком подходе максимальная относительная погрешность уменьшается на 5–6 %.

В практических задачах наиболее часто возникает необходимость в формулировке условий неотражения на двух искусственных границах. Например, при расчете полуплоскости $x \in (-\infty, \infty)$, $y \geq 0$ в качестве искусственных границ обычно выделяют линии $x = L_x$ и $y = L_y$, а на линии $x = 0$ ставят условия симметрии. Если нагрузка, действующая на границе $y = 0$, не симметрична (относительно прямой $x = 0$) или полуплоскость содержит различного вида неоднородности, как-то свободные полости, жесткие включения и т. п., то условия неотражения должны быть сформулированы на третьей искусственной границе $x = -L_x$. Очевидно, что с увеличением числа искусственных границ происходит возрастание погрешности в решениях, найденных с использованием неотражающих условий на этих границах. При этом основным критерием качества условий неотражения является величина промежутка времени, на котором полученное решение остается близким к эталонному.

С целью исследования отмеченных моментов для вариантов условий 1 и 2 рассмотрим следующую задачу. Пусть исходная область — квадрат с единичными сторонами: $\Omega^* = \{x, y : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$. На участке границы $y = 0$, $x \in [0, 0.1]$ задано нормально напряжение, изменяющееся по закону

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 0.5, \\ 0, & t > 0.5. \end{cases}$$

Граница $y = 1$ предполагается свободной от напряжений, а на границах $x = 0$ и $x = 1$ реализуются условия защемления: $u_x = u_y = 0$.

Разобьем область Ω^* на 50×50 квадратных элементов с размером стороны $h = 0.02$. Линии $x = L_x = Nh$ ($0.1 \leq L_x \leq 1$) и $y = L_y = Mh$ ($0 \leq L_y \leq 1$) будем считать искусственными границами. При проведении расчетов полагалось: $L_x = L_y = 0.3$ ($M = N = 15$). Сопоставление с точным решением проводилось в точках $A(0.13, 0.13)$ — середине выделенной области и $B(0.29, 0.29)$ — точке, лежащей в окрестности пересечения двух искусственных границ.

Результаты вычислений представлены на рис. 3–8. Из приведенных графиков видно, что решения, полученные по вариантам 1 и 2 сохраняют все особенности, отмеченные для случая одной искусственной границы. В частности, эталонные кривые 0, как правило, расположены между кривыми 1 и 2. График продольной составляющей вектора скорости u_y сдвинут по оси t относительно точного решения в варианте 1 — вправо, в варианте 2 — влево.

Отметим, что в середине выделенной области (точка A , рис. 3–5) до момента $t \sim 0.9$ максимальные абсолютные и относительные погрешности для вариантов 1 и 2 практически совпадают и составляют 0.035% и 15.5% соответственно. На интервале времени $t \in [0.9, 1.7]$ относительная погрешность в варианте 1 не увеличивается, при этом характер изменения функций соответствует эталонному решению. Вариант 2 на указанном промежутке времени не обнаруживает даже качественного совпадения с эталоном. При движении к искусственным границам значение момента времени, начиная с которого условия варианта 2 перестают качественно описывать решение, уменьшается. Так, в точке B (см. рис. 6, 7) заметные искажения наблюдаются с момента $t \sim 0.3$.

Таким образом, в случае двух искусственных границ использование условий неотражения 2 приводит к неудовлетворительным результатам: абсолютная погрешность в 2–5 раз больше, чем в варианте 1. Вариант 1 дает качественно верное приближение к точному решению при $t \in [0, 1.7]$, т. е. на всем интервале корректного сравнения с эталоном. Более близкое приближение к точному решению можно получить, как и в случае одной искусственной границы, при попеременном использовании условий 1 и 2 на границах $x = L_x$, $y = L_y$. Решение, найденное таким способом, показано на рис. 8 пунктирной линией. Заметим, что уменьшение размеров выделенной области Ω приводит к резкому возрастанию ошибок и сокращению промежутка времени, на котором найденное решение близко к эталонному.

4. Заключение

Анализ результатов многочисленных тестовых расчетов показывает, что решение, полученное с использованием условий варианта 1, можно считать эталонным на интервале времени, соответствующем примерно двукратному пробегу продольной волны от границы $y = 0$ до искусственной границы $y = Mh$. Это обстоятельство дает возможность эффективно применять вариант 1 при решении класса задач, в которых моделирование неотражения достаточно проводить до момента прихода возмущений на искусственные границы. К такому классу относятся задачи с кратковременным импульсом внешнего давления.

Пусть на границе области Ω^* в течение времени t_0 действует некоторая нагрузка, причем величина t_0 много меньше времени пробега волны вдоль характерного размера элементов сетки, покрывающей область Ω^* , т. е. величина максимально допустимого (условиями устойчивости) шага по времени τ_{\max} много больше величины t_0 . Тогда при численном решении возникает необходимость либо уменьшить шаг по времени до величины меньшей или равной t_0 при фиксированной равномерной сетке, либо измельчить сетку в окрестности приложения нагрузки (измельчение сетки во всей расчетной области невозможно в силу ограниченности ресурсов памяти ЭВМ). В первом случае величина шага по времени будет много меньше допустимой ($\tau \ll \tau_{\max}$), что приведет к размазыванию решения во всей расчетной области. Во втором случае $\tau = \tau_{\max}$, однако, в силу неравномерности сетки, аналогичное размазывание будет иметь место в областях, удаленных от окрестности приложения нагрузки.

Другая принципиальная возможность заключается в выделении окрестности приложения нагрузки в отдельную расчетную область, на искусственных границах которой формулируются условия неотражения. Полученное решение осредняется с учетом размеров элементов исходной сетки и служит начальным условием при численном решении поставленной задачи. Предложенный способ наиболее верно отражает передачу величины и характера приложенной нагрузки вовнутрь расчетной области.

Список литературы

- [1] ИЛЬГАМОВ М. А. О неотражающих условиях на границе расчетной области. В “Динамика оболочек в потоке”, Казанский физико-технический институт, вып. 18, 1985, 4–76.
- [2] SMITH W. D. A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems. *J. Comput. Phys.*, **15**, No. 4, 1974, 492–503.
- [3] ENQUIST B., MAJDA A. Absorbing conditions for the numerical simulations of waves. *Math. Comput.*, **31**, No. 139, 1977, 629–651.
- [4] ENQUIST B., MAJDA A. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Commun. Pure Appl. Math.*, **32**, 1979, 313–357.
- [5] BAYLISS A., TURKEL E. Radiation conditions for wave-like equations. *Ibid.*, **33**, 1980, 707–725.
- [6] ТУРОВ В. П. К вопросу о сведении задачи о распространении упругих волн в бесконечной области к задаче для области конечных размеров. В “Сопротивл. материалов и теория сооружений”, вып. 28, Будівельник, Киев, 1976, 186–191.
- [7] СЕРГЕЕВ-АЛЬБОВ Н. Н. Приближенно-аналитический алгоритм расчета акустических волновых полей. *Препр. №566 ВЦ СО АН СССР*, Новосибирск, 1985.
- [8] ГРИГОРЯН С. С., ЧЕРЕДНИЧЕНКО Р. А. Распространение в слоистом полупространстве упругих волн, вызванных поверхностной динамической нагрузкой. *Изв. АН СССР, МТТ*, 1976, №3, 65–73.
- [9] НАВАЛ И. К., РИМСКИЙ В. К. Численный анализ распространения волн в кусочно-неоднородном слое. В “Матем. методы в механике”, вып. 57. Штиинца, Кишинев, 1980, 69–76.
- [10] НАВАЛ И. К., ПАЦЮК В. И., РИМСКИЙ В. К. Нестационарные волны в деформируемых средах. *Там же*, 98–110.
- [11] GOD S. K., ЗАБРОДИН А. В., ИВАНОВ М. А., КРАЙКО А. Н., ПРОКОПОВ Г. П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. Наука, М., 1976.
- [12] КУРГУЗОВ В. Д. Алгоритмы решения задач динамики упругопластического деформирования на основе нескольких аппроксимаций: *Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Новосибирск, 1987.
- [13] АНИСИМОВ С. А. Векторное расщепление плоской динамической задачи теории упругости в областях из произвольных четырехугольников. В “Динамика сплошной среды”, вып. 75, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986, 17–26.

Поступила в редакцию 17 февраля 1998 г.,
в переработанном виде 31 августа 1998 г.