

## Расчет смещений поверхности океана в очаге цунами, вызываемых мгновенной вертикальной подвижкой дна при подводном землетрясении\*

И. В. Файн<sup>1</sup>, Е. А. Куликов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт морских наук, Сидни, Британская Колумбия, Канада*

<sup>2</sup>*Институт океанологии РАН, Москва, Россия*

e-mail: finei@pac.dfo-mpo.gc.ca, kulikove@ocean.ru

Рассмотрено решение задачи о расчете отклонений свободной поверхности жидкости, вызванных мгновенным смещением дна бассейна на ограниченном участке. Задача сформулирована для идеальной несжимаемой жидкости в бассейне с медленно меняющейся глубиной. Решение основано на использовании электростатической аналогии в задаче о потенциале и представлено в виде итерационной процедуры. Оценки показывают, что при моделировании цунами учет негидростатичности является важным, когда размеры сейсмического источника невелики и сопоставимы с глубиной океана.

*Ключевые слова:* землетрясение, сейсмический очаг, цунами, теория потенциала.

### Введение

Обычно при моделировании цунами используют так называемое приближение мелкой воды, корректное, когда длина волны значительно превышает глубину океана. В этом случае можно использовать условие гидростатики и пренебречь изменениями горизонтальных скоростей жидкости с глубиной. Это приближение, иногда называемое длинноволновым, для океана применимо при масштабах волн, больших 50–100 км. Считается, что формирование очага цунами в области сильного подводного землетрясения происходит почти мгновенно. Согласно представлению о “поршневом” (piston-like) механизме возбуждения цунами остаточные (постсейсмические) вертикальные изменения рельефа дна образуются в течение короткого промежутка времени (обычно менее 1–2 мин) в результате сеймотектонического разрыва, возникающего как следствие основного или одного из последующих сильнейших толчков. Как показывают подробные натурные исследования, таким был механизм возникновения разрушительного Ниигатского цунами 1964 г. [1].

Характерное время реакции океана на распределенное воздействие литосферы определяется временем пробега волны через очаг, т. е.  $\tau \approx D/\sqrt{gh}$  ( $h$  — глубина океана,  $D$  — пространственный масштаб сейсмического очага), для  $D \approx 10^2$ – $10^3$  км составляет около  $10^3$  –  $10^4$  с, что значительно превышает “характерную длительность” отдельного сейсмического толчка ( $10^2$  с). В рамках приближения гидростатики возмущения свободной поверхности океана, образованные в результате такого мгновенного вытеснения водных

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-05-01125).

масс, повторяют форму остаточных вертикальных смещений дна океана. Поэтому обычно при гидродинамическом моделировании цунами в задачах типа Коши — Пуассона начальные условия в очаге цунами (отклонения поверхности океана) задаются равными вертикальным смещениям дна. Однако в реальности форма постсейсмических смещений может иметь довольно сложную структуру, имеющую особенности с характерными горизонтальными масштабами в десятки километров и меньше. В этом случае использование длинноволнового приближения (и гидростатики) искажает форму образовавшейся волны, а величина общей энергии цунами оказывается завышенной. Впервые расчет негидростатического отклика уровня океана в очаге цунами был выполнен Каджиурой еще в 1963 г. [2]. Для бассейна постоянной глубины рассмотрена задача о расчете отклонений свободной поверхности идеальной жидкости в результате мгновенного смещения участка дна. Используя функцию Грина для потенциала скоростей жидкости с учетом свободной поверхности, Каджиура представляет решение в виде ряда, состоящего из суммы интегралов, соответствующих многократным последовательным отражениям источника от поверхности и дна. К сожалению, для практических расчетов такой подход оказывается малопригодным, поскольку ряд сходится очень медленно. В настоящей работе представлено решение задачи о расчете формы поверхности океана над очагом подводного землетрясения в линейном приближении в более общей постановке — для бассейна переменной глубины.

## 1. Постановка задачи

Будем рассматривать неограниченный бассейн, в котором глубина жидкости  $h(x, y)$  меняется достаточно медленно, так что  $|\nabla h| \ll 1$ . Здесь  $x$  и  $y$  — горизонтальные координаты,  $z$  — вертикальная ось, при этом  $z = 0$  соответствует невозмущенной свободной поверхности жидкости.

Предположим, что на дне в ограниченной области  $\Omega$  за короткое время  $\Delta t \ll \sqrt{h/g}$  образовались вертикальные смещения дна  $\eta_0 = \eta(x, y, \Delta t)$ . Необходимо найти смещения свободной поверхности жидкости  $\zeta_0(x, y) = \zeta(x, y, \Delta t)$ .

В предположении потенциальности поля скоростей идеальной жидкости можно представить поле скоростей в виде  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ , где  $\mathbf{u} \equiv (u, v, w)$  — вектор скорости частицы жидкости,  $\varphi$  — потенциал скоростей.

Уравнения движения жидкости заданы в виде уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1)$$

При этом граничные условия включают условие на дне

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{z=-h(x,y)} = \begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial t}, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

кинематическое условие на поверхности

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (3)$$

и динамическое условие на поверхности

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{z=0} = -g\zeta. \quad (4)$$

Начальные условия зададим в виде

$$\varphi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Предположим, что поверхность дна на участке  $\Omega$  приходит в движение с некоторой скоростью

$$\eta(x, y, \Delta t) = w(x, y)\Delta t.$$

Очевидно, для малых значений  $\Delta t$  все остальные переменные также становятся порядка  $\Delta t$ :

$$\varphi(x, y, z, \Delta t) = O(\Delta t); \quad \zeta(x, y, \Delta t) = O(\Delta t).$$

Но тогда согласно (4) на поверхности производная  $\varphi$  по времени будет порядка  $\Delta t$ . Соответственно сама функция будет второго порядка малости по  $\Delta t$

$$\varphi(x, y, 0, \Delta t) \sim O(\Delta t^2),$$

а поэтому для малых времен  $\Delta t$  можно считать, что  $\varphi(x, y, 0, \Delta t) = 0$ .

Опуская далее  $\Delta t$  как параметр, получим следующую граничную задачу, состоящую из уравнения (1) и граничных условий:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{z=-h(x,y)} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \phi_0(x, y), \quad (5)$$

$$\varphi|_{z=0} = 0. \quad (6)$$

Данная задача имеет единственное решение, для нахождения которого сформулируем ее так, чтобы условия на свободной границе (6) выполнялись автоматически. Для этого будем искать решение в слое двойной толщины  $(-h(x, y), h(x, y))$ , причем на верхней границе зададим условие, антисимметричное условию на нижней границе:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{z=h(x,y)} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\phi_0(x, y). \quad (7)$$

Теперь уравнение (1) и условия (5) и (7) составляют классическую внутреннюю задачу Неймана (см., например, [3]). Согласно электростатической аналогии в этом случае двойной слой жидкости можно рассматривать как конденсатор переменной толщины, в котором поверхностная плотность зарядов  $\sigma(x, y)$  распределена на пластинах неравномерно (рис. 1). При этом условие на поверхности (6), очевидно, выполнится автоматически. Решение (1) с учетом (5), (7) в произвольной точке  $(x, y, z)$  записывается в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y') \left[ \frac{1}{|\mathbf{R}(z, -h)|} - \frac{1}{|\mathbf{R}(z, h)|} \right] dx' dy', \quad (8)$$

где  $\mathbf{R}(z, z') = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы. Искомая функция смещений на поверхности будет иметь вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y') \frac{h(x', y')}{|\mathbf{R}(0, h)|^3} dx' dy'. \quad (9)$$

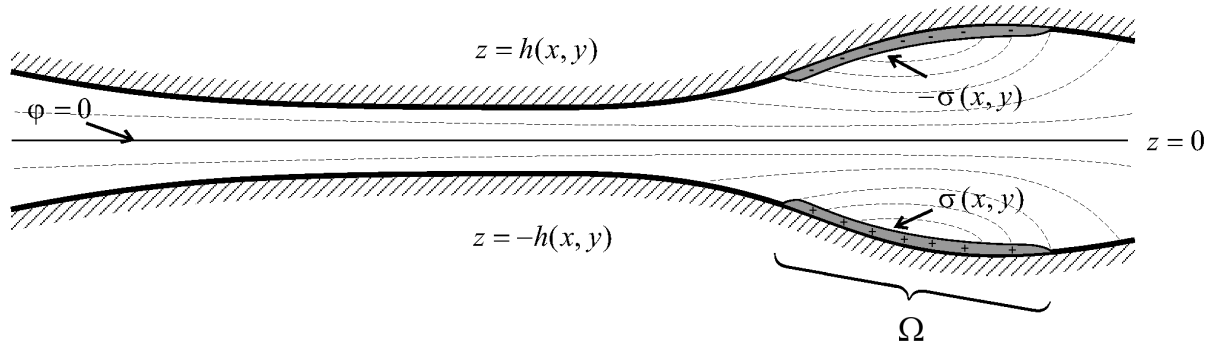


Рис. 1. Геометрия задачи о потенциале в слое двойной толщины; как аналог рассматривается конденсатор переменной толщины с неравномерно распределенной поверхностной плотностью заряда  $\sigma(x, y)$

Чтобы определить неизвестную функцию  $\sigma(x, y)$ , используем граничное условие (5). Вычислив производную от (8) по нормали к границе, получим следующее граничное интегральное уравнение:

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} \right|_{z=-h(x, y)} = I_1 + I_2 = \phi_0(x, y), \quad (10)$$

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y') \frac{\mathbf{R}(-h, h) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{R}(-h, h)|^3} dx' dy',$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y') \frac{\mathbf{R}(-h, -h) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{R}(-h, -h)|^3} dx' dy',$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности в точке  $z = -h(x, y)$ . Второй интеграл содержит сингулярность при  $x = x'$ ,  $y = y'$ . Чтобы разрешить эту сингулярность, разобьем интеграл на две части: по области  $\Omega_1$  вблизи точки  $(x, y)$  и по оставшейся области  $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$ ,  $I_2 = I_{21} + I_{22}$ . Первая часть интеграла согласно теореме Гаусса может быть записана в виде  $I_{21} = \sigma(x, y)/2$ , вторая его часть обычно невелика (в частности, она обращается в ноль для плоского дна или для дна, имеющего постоянный наклон). При постоянной глубине  $h(x, y) = H$  уравнение (10) упрощается к виду

$$\phi_0(x, y) = \sigma(x, y)/2 + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \sigma(x', y') \frac{2H}{|\mathbf{R}(-H, H)|^3} dx' dy'. \quad (10a)$$

В практически важном случае малых наклонов дна,  $|\nabla h| \ll 1$ , выражения в числителях в интегралах (10) имеют вид

$$\mathbf{R}(-h, h) \cdot \mathbf{n} = -[h(x', y') + h(x, y)] + \frac{\partial h}{\partial x}(x - x') + \frac{\partial h}{\partial y}(y - y'),$$

$$\mathbf{R}(-h, -h) \cdot \mathbf{n} = h(x', y') - h(x, y) + \frac{\partial h}{\partial x}(x - x') + \frac{\partial h}{\partial y}(y - y').$$

## 2. Итерационный метод интегрирования

Решение (8) будем искать в виде итерационной процедуры. В качестве начального приближения примем

$$\sigma_0(x, y) = \phi_0(x, y),$$

вычислим согласно (6) невязку

$$\varepsilon_1(x, y) = I_1(\sigma_0) + I_2(\sigma_0) - \phi_0(x, y)$$

и далее скорректируем решение с учетом невязки

$$\sigma_1(x, y) = \sigma_0(x, y) - \alpha\varepsilon_1(x, y).$$

Параметр  $\alpha \sim 1$ , для более надежной сходимости выберем  $\alpha < 1$ . В дальнейшем процедура повторяется:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}(x, y) &= I_1(\sigma_n) + I_2(\sigma_n) - \phi_0(x, y), \\ \sigma_{n+1}(x, y) &= \sigma_n(x, y) - \alpha\varepsilon_{n+1}(x, y). \end{aligned}$$

Отметим, что для корректности вычисления (8) требуется, чтобы шаг по  $x$  и  $y$  при расчете интегралов был существенно меньше глубины. К сожалению, это не всегда возможно, поскольку источник может располагаться близко к берегу и при этом часть его простирается на мелководье. На самом деле эта проблема возникает только при расчете первого интеграла и лишь вблизи  $x = x'$ ,  $y = y'$ , когда глубина меньше расчетного шага. Если две расчетные ячейки расположены непосредственно друг над другом, скорректированная зависимость имеет вид

$$I_{10} = \frac{\sigma H \Delta x \Delta y}{4\pi H^3 + 2H \Delta x \Delta y}.$$

Эта формула дает хорошее приближение при малых и больших  $H$ .

## 3. Расчет смещений свободной поверхности жидкости для модельного осесимметричного источника

Расчеты выполнялись для модельного источника, заданного в виде осесимметричного поднятия дна  $\eta_b(x, y) = e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}$ , где  $r$  — расстояние от центра источника,  $2\lambda$  — характерный горизонтальный размер источника. Для широкого диапазона отношений глубины жидкости к размеру источника ( $H/\lambda$ ) были вычислены профили смещений поверхности (рис. 2). Из приведенных графиков видно, что уже для  $H/\lambda = 0.5$  высота горба на поверхности жидкости примерно на 20 % ниже максимальной высоты поднятия дна. Отметим, что объем вытесненной жидкости равен объему поднятия дна, поэтому форма деформаций поверхности оказывается более растянутой в пространстве.

Интересно оценить, как зависит потенциальная энергия образующегося горба на поверхности жидкости от горизонтального размера источника. На рис. 3 представлен график отношения потенциальной энергии горба на поверхности жидкости

$$E_s = \iint_{\Omega} \zeta^2(x, y) dx dy$$

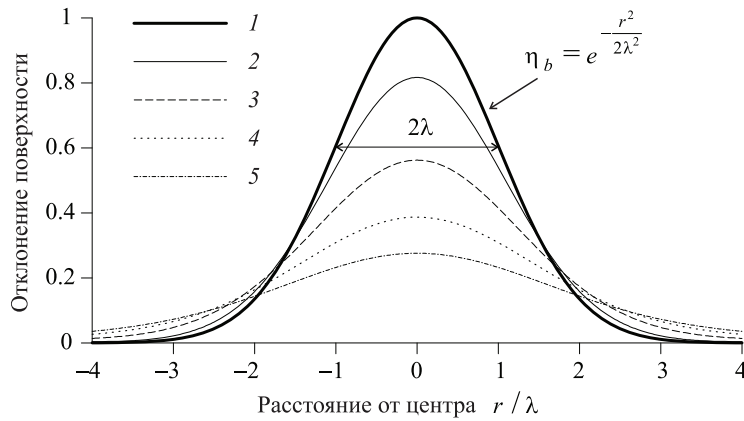


Рис. 2. Профили смещений дна (1) и поверхности воды ( $H/\lambda = 0.5$  (2),  $0.67$  (3),  $1.0$  (4),  $2.0$  (5)) в результате мгновенного поднятия дна; разрез через центр

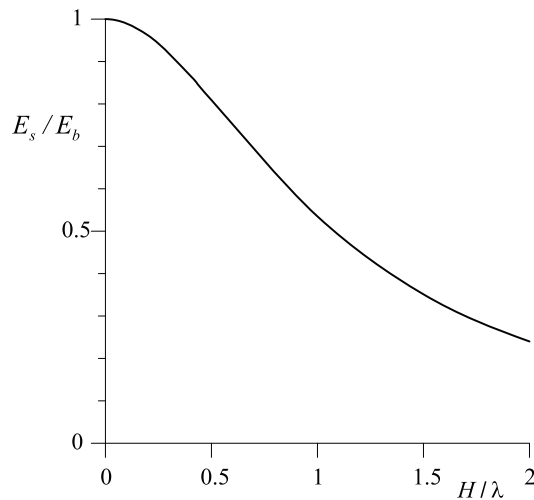


Рис. 3. График отношения потенциальной энергии горба на поверхности жидкости к энергии гидростатического отклика в зависимости от  $H/\lambda$

к потенциальной энергии гидростатического отклика  $E_b = \iint_{\Omega} \eta_b^2(x, y) dx dy$  в зависимости от величины  $H/\lambda$ . Видно, что с уменьшением  $H/\lambda$  наблюдается монотонное убывание этого отношения. Деформация дна с характерным размером ( $2\lambda$ ), в шесть раз превышающим глубину, вызывает отклик на поверхности жидкости, потенциальная энергия которого примерно на 10 % меньше энергии чисто гидростатического отклика.

#### 4. Расчет смещений свободной поверхности океана для источника цунами 13 января 2007 г. вблизи о. Симушир (Курильские о-ва)

Очаг землетрясения 13 января 2007 г. располагался под океаническим склоном глубоководного желоба на расстоянии около 20 км от оси желоба вблизи о. Симушир (Курильские о-ва). Наиболее вероятная плоскость разрыва в очаге размером  $200 \times 35$  км

простиралась параллельно оси желоба ( $Az\ 43^\circ$ ) на глубине 9–17 км и круто ( $59^\circ$ ) наклонялась в сторону океана [4].

Тип движений в очаге — сбросо-сдвиг, максимальное смещение по вертикали около 17 м, величина правостороннего сдвига по горизонтали около 11 м. Для оценки параметров источника цунами 2007 г. использовались результаты Ч. Джи, который с помощью модели разлома конечных размеров восстановил смещения вдоль плоскости разрыва для рассматриваемого землетрясения [4]. Далее в расчете применялась широко известная модель Окады [5], которая позволяет пересчитать эти смещения в вертикальные деформации морского дна, обусловленные однородным смещением по разлому, имеющему форму конечного прямоугольного источника, в упругом полупространстве. На рис. 4, а показаны изолинии смещений дна океана, рассчитанные в соответствии с моделями Джи и Окады. Наибольшие отрицательные отклонения достигают почти 8 м, максимальные положительные отклонения составляют примерно 1.5 м (рис. 4, в). По-

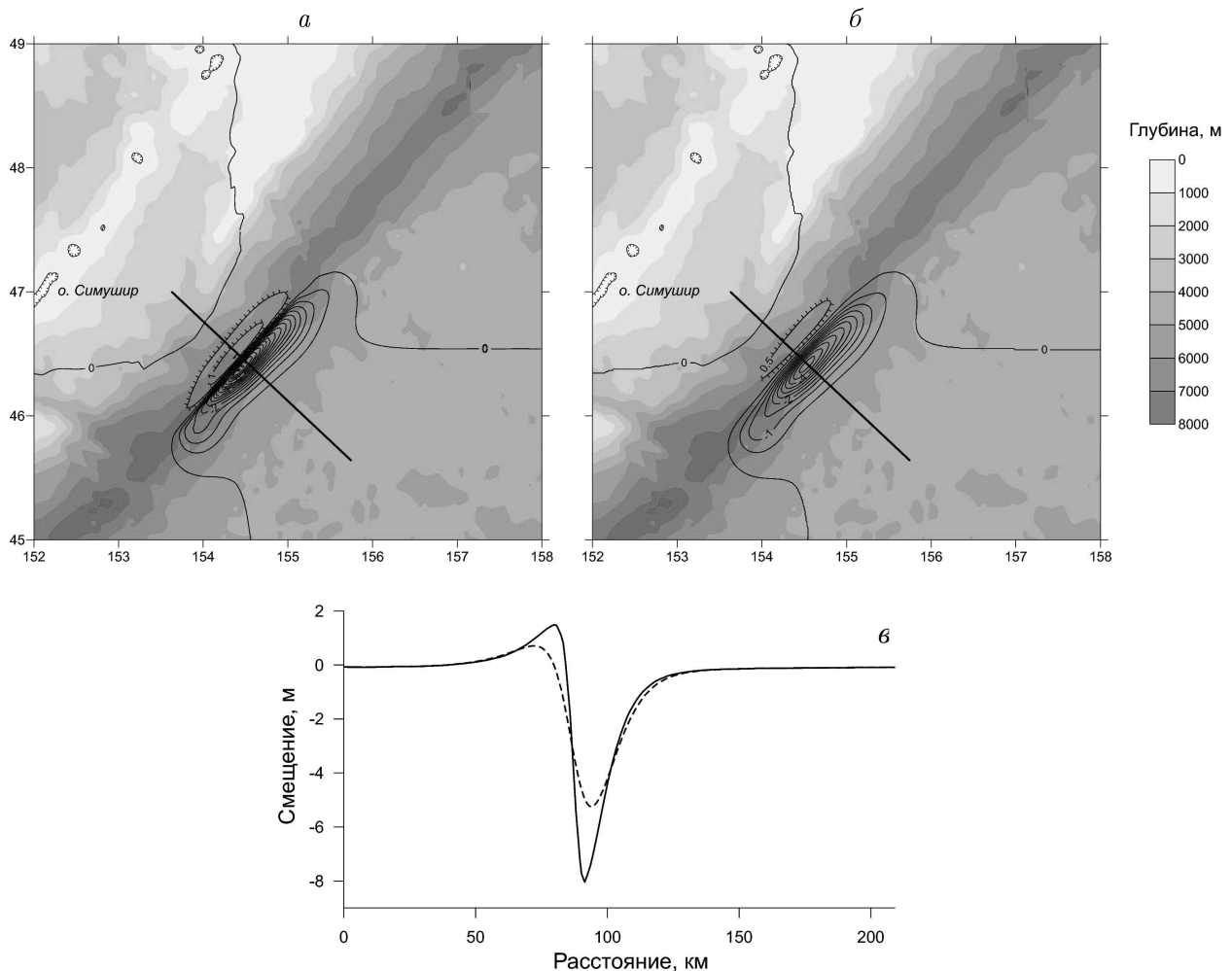


Рис. 4. Карта деформаций дна океана, образовавшихся в результате землетрясения 13 января 2007 г. (а). В серых тонах показана батиметрия океана в данном районе; прямая линия — разрез поверхности смещений дна, перпендикулярный к линии сейсмотектонического разлома; б — карта распределения смещений поверхности океана над очагом цунами; в — профили поверхности смещений дна (сплошная линия) и поверхности океана (штрих) вдоль разреза (см. прямую линию на рис. а, б)

скольку верхняя кромка разлома близко подходит к поверхности дна, изменения вертикальных деформаций очень резки в области перехода от положительных смещений к отрицательным. Как видно из рис. 4, *а*, *б*, глубина океана в области очага варьируется от 5000 до 7000 м, т. е. очаг землетрясения находится фактически на дне глубоководного желоба.

Учитывая большую глубину океана над сейсмическим источником (около 7 км), относительно малую ширину плоскости разрыва (35 км) и угол ее наклона ( $59^\circ$ ), можно предположить существенное влияние эффекта негидростатичности при формировании смещений поверхности океана над очагом. Действительно, расчеты по формуле (8) приводят к решению, для которого форма свободной поверхности оказывается заметно сглаженной. Предельное отрицательное отклонение составляет около 5 м, а положительные смещения не превышают 1 м (см. рис. 4, *а*, *в*). Расчет потенциальной энергии такого очага цунами по формуле (8) дал величину примерно на 38 % меньшую, чем расчет смещений в гидростатическом приближении.

## Выводы

Представленный метод расчета негидростатического отклика поверхности океана на мгновенное смещение дна океана с учетом переменной глубины бассейна является важным при моделировании источников цунами. При решении задачи о потенциале был использован оригинальный метод антисимметричного отражения, который позволил в линейной постановке не учитывать граничные условия на свободной поверхности жидкости и свести проблему к классической внутренней задаче Неймана. Согласно сделанным в работе оценкам учет эффекта негидростатичности может приводить к существенной поправке в распределении смещений поверхности океана в очаге цунами по сравнению с гидростатическим решением. На примере Курильского цунами 13 января 2007 г. показано, что использование длинноволнового приближения значительно завышает величины амплитуд возникающих волн. В отличие от метода Каджиуры [2] при данном подходе вычислительных проблем не возникает. Итерационная процедура для характерных размеров очага цунами и глубин океана сходится достаточно быстро, приемлемая точность расчета обычно достигается за три — четыре итерации.

## Список литературы

- [1] AIDA I. Numerical experiments for the tsunami propagation the 1964 Niigata tsunami and the 1968 Tokachi-Oki tsunami // Bull. Earthquake Res. Inst. 1969. Vol. 47. P. 673–700.
- [2] КАДЖИУРА К. The leading wave of a tsunami // Ibid. 1963. Vol. 41. P. 535–571.
- [3] МИХЛИН С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
- [4] Ji C. Rupture process of the 2007 January 13 magnitude 8.1 Kuril Island earthquake. ([http://earthquake.usgs.gov/eqcenter/eqint-news/2007/us2007xmae/finite\\_fault.php](http://earthquake.usgs.gov/eqcenter/eqint-news/2007/us2007xmae/finite_fault.php)).
- [5] OKADA Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space // Bull. Seism. Soc. Amer. 1985. Vol. 75. P. 1135–1154.

*Поступила в редакцию 6 июля 2010 г.*