Вычислительные технологии **Том 15, № 5, 2010**

О некоторых точных решениях трехмерных уравнений идеальной жидкости*

Ю.В. Шанько
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: shy70@mail.ru

Построены несколько новых классов точных решений для уравнений однородной и неоднородной идеальной жидкости. Полученные решения имеют произвол в две функции двух переменных.

Ключевые слова: частично-инвариантные решения, уравнения идеальной жидкости, решения с функциональным произволом.

Исследуются трехмерные уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости

$$D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, p — давление, $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}$ — оператор дифференцирования вдоль траекторий, плотность считается постоянной. Различные решения уравнений Эйлера представлены в [1]. Допускаемая алгебра Ли точечных симметрий системы (1) является бесконечномерной [2], классификация одномерных и двумерных подалгебр выполнена в [3].

Цель данной работы — нахождение частично-инвариантных решений, зависящих от произвольных функций двух переменных.

Рассмотрим пятимерную подалгебру допускаемой алгебры, которая порождается операторами ∂_x, ∂_y, $t\partial_x + \partial_u$, $t\partial_y + \partial_v$, ∂_p. Поскольку данная подалгебра имеет инварианты t, z, w, то можно построить частично-инвариантное решение ранга два, дефекта три. Подставляя представление частично-инвариантного решения $u = u(t, x, y, z)$, $v = v(t, x, y, z)$, $w = w(t, z)$, $p = p(t, x, y, z)$ в систему (1), получаем

$$Du + p_x = 0, \tag{2}$$

$$Dv + p_y = 0, \tag{3}$$

$$w_t + ww_z + p_z = 0, \tag{4}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{5}$$

Так как функция w зависит только от t и z, то, согласно (4), производные p_{xz}, p_{yz} равны нулю. Последовательно действуя оператором D на уравнение (5) и используя (2)–(4), имеем

$$2(u_x v_y - u_y v_x) + D(w_z) - w_z^2 - p_{xx} - p_{yy} = 0, \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00489) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 103.

$$D(D(w_z) - w_z^2 - p_{xx} - p_{yy}) - w_z(D(w_z) - w_z^2 - p_{xx} - p_{yy}) -$$
$$-2p_{xx}v_y + 2p_{xy}(v_x + u_y) - 2p_{yy}u_x = 0. \tag{7}$$

Потребуем теперь, чтобы соотношение (7) (как уравнение относительно u и v) выполнялось в силу (5) и (6). Из этого с необходимостью вытекает, что $p_{xy} = 0$, $p_{xx} = p_{yy}$. Следовательно, давление представляется в виде

$$p = \chi(t, z) + k_1(t)x + k_2(t)y - k(t)\frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Коэффициенты $k_1(t)$, $k_2(t)$ не существенны и могут быть убраны с помощью групповых преобразований (отвечающих за инвариантность исходных уравнений при переходе в произвольную движущуюся систему координат). Итак, считаем что давление имеет вид

$$p = \chi(t, z) - k(t)\frac{x^2 + y^2}{2}. \tag{8}$$

Отметим, что в работах [4, 5] исследованы решения системы (1) с квадратичным давлением

$$p = k(t)(x^2 + y^2 + z^2)/2.$$

Подставляя представление (8) в (2)–(7), получаем систему

$$Du - kx = 0, \tag{9}$$

$$Dv - ky = 0, \tag{10}$$

$$w_t + ww_z + \chi_z = 0, \tag{11}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0. \tag{12}$$

$$2(u_xv_y - u_yv_x) + D(w_z) - w_z^2 + 2k = 0, \tag{13}$$

$$D(D(w_z) - w_z^2 + 2k) - w_z(D(w_z) - w_z^2 + 4k) = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) является единственным уравнением инвариантной подсистемы [6]. Оно представляет собой нелинейное уравнение третьего порядка, и прямое его интегрирование является чрезвычайно сложной задачей.

Интегрируя (11) по z, найдем функцию $\chi(t, z)$:

$$\chi(t, z) = -\int (w_t + ww_z)\,dz. \tag{15}$$

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что система из оставшихся пяти уравнений (9), (10), (12)–(14) допускает бесконечномерную группу, порождаемую оператором

$$X = \mu\partial_t + \frac{1}{2}\mu_t x\partial_x + \frac{1}{2}\mu_t y\partial_y - \mu_t z\partial_z + \frac{1}{2}(\mu_{tt}x - \mu_t u)\partial_u + \frac{1}{2}(\mu_{tt}y - \mu_t v)\partial_v -$$
$$-(2\mu_t w + \mu_{tt}z)\partial_w + \left(\frac{1}{2}\mu_{ttt} - 2\mu_t k\right)\partial_k,$$

здесь $\mu = \mu(t)$ — произвольная, достаточно гладкая функция.

Интегрируя соответствующие уравнения Ли, найдем закон преобразования переменных под действием группы (штрихом помечены новые переменные):

$$t' = \varepsilon, \quad x' = \dot{\varepsilon}^{1/2}x, \quad y' = \dot{\varepsilon}^{1/2}y, \quad z' = \dot{\varepsilon}^{-1}z,$$
$$u' = \dot{\varepsilon}^{-1/2}u + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-3/2}\ddot{\varepsilon}x, \quad v' = \dot{\varepsilon}^{-1/2}v + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-3/2}\ddot{\varepsilon}y, \quad w' = \dot{\varepsilon}^{-2}w - \dot{\varepsilon}^{-3}\ddot{\varepsilon}z,$$
$$k' = \dot{\varepsilon}^{-2}(k + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-1}\dddot{\varepsilon} - \frac{3}{4}\dot{\varepsilon}^{-2}\ddot{\varepsilon}^2),$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — произвольная функция. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $u = U(t,x,y,z)$, $v = V(t,x,y,z)$, $w = W(t,z)$, $k = K(t)$ — *решение системы уравнений* (9), (10), (12)–(14), *тогда для произвольной, достаточно гладкой функции* $\varepsilon = \varepsilon(t)$

$$u = \dot{\varepsilon}^{1/2}U(\varepsilon, \dot{\varepsilon}^{1/2}x, \dot{\varepsilon}^{1/2}y, \dot{\varepsilon}^{-1}z) - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-1}\ddot{\varepsilon}x,$$
$$v = \dot{\varepsilon}^{1/2}V(\varepsilon, \dot{\varepsilon}^{1/2}x, \dot{\varepsilon}^{1/2}y, \dot{\varepsilon}^{-1}z) - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-1}\ddot{\varepsilon}y,$$
$$w = \dot{\varepsilon}^{2}W(\varepsilon, \dot{\varepsilon}^{-1}z) + \dot{\varepsilon}^{-1}\ddot{\varepsilon}z,$$
$$k = \dot{\varepsilon}^{2}K(\varepsilon) - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-1}\dddot{\varepsilon} + \frac{3}{4}\dot{\varepsilon}^{-2}\ddot{\varepsilon}^2 \tag{16}$$

также являются решением той же системы.

Следовательно, зная решение системы с некоторой заданной функцией $k = k(t)$, можно построить решения для произвольной k.

Система, аналогичная (9), (10), (12), рассматривалась в работе [7].

Опишем теперь схему решения системы при $k(t) \equiv 0$. Перейдем к (произвольным) лагранжевым координатам, выбрав в качестве независимых переменных t, α, β, $\gamma = z|_{t=0}$, а в качестве неизвестных функций $x = x(t,\alpha,\beta,\gamma)$, $y = y(t,\alpha,\beta,\gamma)$, $z = z(t,\gamma)$. В результате получается система

$$x_{tt} = 0, \quad y_{tt} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha)z_\gamma) = 0. \tag{18}$$

Из уравнений (17) следует, что функции x и y линейны по t. Тогда из (18) и условия $\gamma = z|_{t=0}$ вытекает соотношение

$$z_\gamma(t,\gamma) = \frac{1}{z_2(\gamma)t^2 + z_1(\gamma)t + 1},$$

интегрируя которое, находим

$$z(t,\gamma) = \int\limits_0^\gamma \frac{d\gamma}{z_2(\gamma)t^2 + z_1(\gamma)t + 1} + \sigma(t), \quad \sigma(0) = 0. \tag{19}$$

Выберем лагранжевы координаты α и β так, чтобы

$$x = \alpha t + \beta. \tag{20}$$

Поскольку функция y линейна по t, то она представляется в виде

$$y = \varphi t + \psi, \tag{21}$$

где φ, ψ — функции от α, β, γ. Тогда из (18), (20) и (21) следует, что φ и ψ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\frac{\varphi_\beta}{z_2} = \frac{\psi_\beta - \varphi_\alpha}{z_1} = \frac{-\psi_\alpha}{1}. \tag{22}$$

Дальнейший анализ системы (22) зависит от того, положителен, отрицателен или равен нулю дискриминант $\delta = z_1^2 - 4z_2$. Во всех трех случаях (22) интегрируется явно либо заменами переменных сводится к системе уравнений Коши—Римана.

Так как справедливы равенства $\alpha = u$, $\beta = x - tu$, $\varphi = v$, $\psi = y - tv$, то, задавая произвольные функции φ, ψ, получаем представление решений исходной системы в неявном виде:

$$\begin{aligned} v &= \varphi(u, x - tu, \gamma), \\ y - tv &= \psi(u, x - tu, \gamma), \\ w &= z_t, \end{aligned}$$

причем γ выражается через z и t из уравнения (19).

Чтобы упростить систему (22), выполним замену переменных

$$\alpha = m\tilde{\alpha} + l\beta,$$

$$\varphi = m\tilde{\varphi} + l\psi,$$

формулы для $m = m(\gamma)$ и $l = l(\gamma)$ будут выписаны отдельно для каждого из трех случаев. Вначале рассмотрим случай положительного дискриминанта. Пусть

$$m^2 = \delta/4 > 0.$$

Положим $l = z_1/2$, тогда после замены переменных система (22) примет вид

$$\tilde{\varphi}_\beta - \psi_{\tilde{\alpha}} = 0, \quad \psi_\beta - \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} = 0.$$

Ее решением являются функции

$$\tilde{\varphi} = f(\tilde{\alpha} + \beta, \gamma) + g(\tilde{\alpha} - \beta, \gamma), \quad \psi = f(\tilde{\alpha} + \beta, \gamma) - g(\tilde{\alpha} - \beta, \gamma).$$

В случае нулевого дискриминанта $\delta = 0$, возьмем $m = 1$, $l = z_1/2$. После замены получим систему

$$\tilde{\varphi}_\beta = 0, \quad \psi_\beta - \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} = 0,$$

которая имеет решение

$$\tilde{\varphi} = f(\tilde{\alpha}, \gamma), \quad \psi = f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha}, \gamma)\beta + g(\tilde{\alpha}, \gamma).$$

Наконец, рассмотрим случай отрицательного дискриминанта. Полагая

$$-m^2 = \delta/4 < 0, \quad l = z_1/2,$$

в результате замены переменных приходим к системе Коши—Римана

$$\tilde{\varphi}_\beta + \psi_{\tilde{\alpha}} = 0, \quad \psi_\beta - \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} = 0.$$

Перейдем к обсуждению конкретных примеров решений.

Пример 1. Положим $k(t) \equiv 0$, $z_2 = \gamma^2$, $z_1 = 0$, $\sigma(t) \equiv 0$. Из формулы (19) найдем z:

$$z = \int\limits_0^\gamma \frac{d\gamma}{\gamma^2 t^2 + 1} = t^{-1} \operatorname{arctg}(t\gamma).$$

Определим вертикальную компоненту скорости:

$$w = z_t = -t^{-2} \operatorname{arctg}(t\gamma) + \frac{\gamma}{t + t^3\gamma^2} = -t^{-1} z + \frac{1}{2} t^{-2} \sin(2tz).$$

С помощью соотношения (15) определим давление:

$$p = \chi(t, z) = -\int (w_t + w w_z)\, dz = t^{-4} \left(\sin^2(tz) + \frac{1}{2} \sin^4(tz) \right) - t^{-2} z^2.$$

Подставив выражения для z_2 и z_1 в (22), получим систему

$$\psi_\beta - \varphi_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta + \gamma^2 \psi_\alpha = 0.$$

Замена переменных $\alpha = \gamma\tilde{\alpha}$, $\varphi = \gamma\tilde{\varphi}$ приводит ее к системе Коши—Римана

$$\psi_\beta - \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} = 0, \quad \tilde{\varphi}_\beta + \psi_{\tilde{\alpha}} = 0. \tag{23}$$

Функции u и v определяются неявно посредством соотношений

$$u = \gamma\tilde{\alpha}, \quad v = \gamma\tilde{\varphi}, \quad x = \gamma\tilde{\alpha} t + \beta, \quad y = \gamma\tilde{\varphi} t + \psi,$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}, \beta, \gamma)$, $\psi = \psi(\tilde{\alpha}, \beta, \gamma)$ связаны уравнениями (23).

Пример 2. В работе [8] найдено следующее решение системы (1) (Φ и Ψ — произвольные функции):

$$\begin{gathered} \Phi(x + u(\operatorname{th} z + 1)) = y + v(\operatorname{th} z + 1), \\ \Psi(x + u(\operatorname{th} z - 1)) = y + v(\operatorname{th} z - 1), \\ w = -\operatorname{ch}^2 z. \end{gathered}$$

Исходя из доказанного выше утверждения, следующие соотношения также задают решение (1):

$$\begin{gathered} \Phi\left(\dot{\varepsilon}^{1/2} x + \left(\dot{\varepsilon}^{-1/2} u + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-3/2}\ddot{\varepsilon} x\right)\left(\operatorname{th}\frac{z}{\dot{\varepsilon}} + 1\right)\right) = \dot{\varepsilon}^{1/2} y + \left(\dot{\varepsilon}^{-1/2} v + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-3/2}\ddot{\varepsilon} y\right)\left(\operatorname{th}\frac{z}{\dot{\varepsilon}} + 1\right), \\ \Psi\left(\dot{\varepsilon}^{1/2} x + \left(\dot{\varepsilon}^{-1/2} u + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-3/2}\ddot{\varepsilon} x\right)\left(\operatorname{th}\frac{z}{\dot{\varepsilon}} - 1\right)\right) = \dot{\varepsilon}^{1/2} y + \left(\dot{\varepsilon}^{-1/2} v + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{-3/2}\ddot{\varepsilon} y\right)\left(\operatorname{th}\frac{z}{\dot{\varepsilon}} - 1\right), \\ w = -\dot{\varepsilon}^2 \operatorname{ch}^2\frac{z}{\dot{\varepsilon}} + \dot{\varepsilon}^{-1}\ddot{\varepsilon} z, \end{gathered}$$

здесь $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Пример 3. Положим $k(t) \equiv 0$, $z_1(\gamma) = 2\mathrm{e}^\gamma$, $z_2(\gamma) = \mathrm{e}^\gamma$, $\sigma(t) \equiv 0$. Из (19) определим z:

$$z = \int\limits_0^\gamma \frac{d\gamma}{\mathrm{e}^\gamma t^2 + 2\mathrm{e}^\gamma t + 1} = \ln \frac{(1+t)^2}{t^2 + 2t + \exp(-\gamma)}. \tag{24}$$

В качестве решения системы (22)

$$\frac{\varphi_\beta}{\mathrm{e}^\gamma} = \frac{\psi_\beta - \varphi_\alpha}{2\mathrm{e}^\gamma} = \frac{-\psi_\alpha}{1}$$

выберем $\varphi = \mathrm{e}^\gamma(\beta - \alpha)(\mathrm{e}^\gamma - \mathrm{e}^{2\gamma})^{-1/2}$, $\psi = (\mathrm{e}^\gamma\beta - \alpha)(\mathrm{e}^\gamma - \mathrm{e}^{2\gamma})^{-1/2}$. Считаем, что $\gamma < 0$. В этом случае скорости и давление задаются элементарными функциями:

$$u = (1+t)^{-1}(\mathrm{e}^z x - (\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{2z})^{1/2} y), \quad v = (1+t)^{-1}((\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{2z})^{1/2} x + \mathrm{e}^z y),$$
$$w = 2(1+t)^{-1}(1 - \mathrm{e}^z), \quad p = p_0(t) + 2(1+t)^{-2}(z + \mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{2z}).$$

При $t \to +\infty$ скорость жидкости стремится к нулю.

Данное решение описывает нестационарное вращательно-симметричное течение в полупространстве, которому можно дать следующую интерпретацию. Ограничим объем жидкости сбоку твердой стенкой — поверхностью (рис. 1)

$$(x^2 + y^2)(1 - \mathrm{e}^z) = \mathrm{const},$$

а сверху и снизу двумя свободными границами — горизонтальными плоскостями, которые определяются исходя из (24):

$$z = z_i(t) = \ln \frac{(1+t)^2}{t^2 + 2t + \exp(-\gamma_i)},$$

где $i = 1, 2$, $\gamma_i < 0$. По меньшей мере на одной из свободных границ давление должно зависеть от времени.

Несмотря на нестационарный характер течения, линии тока остаются неподвижными. При росте t скорость в каждой заданной точке полупространства $z < 0$ стремится к нулю. Незамкнутые линии на рис. 1 являются траекториями движения частиц жидкости вдоль стенок. Остальные траектории имеют ту же форму и получаются из представленных путем сжатия в направлении оси симметрии.

Пример 4. Выберем $k(t) \equiv 0$, $z_1(\gamma) = 2\sqrt{3}\cos\gamma$, $z_2(\gamma) = 7 - 4\sqrt{3}\sin\gamma$. В качестве решения системы (22) примем

$$\varphi = \frac{-\sqrt{3}\alpha\cos\gamma + (7 - 4\sqrt{3}\sin\gamma)\beta}{2 - \sqrt{3}\sin\gamma}, \quad \psi = \frac{-\alpha + \sqrt{3}\beta\cos\gamma}{2 - \sqrt{3}\sin\gamma}.$$

К полученному решению применим преобразование (16) с $\varepsilon = \operatorname{tg} t$, которое даст решение с $k(t) \equiv -1$. В результате получим решение, описывающее стационарное вращательно-симметричное течение:

$$u = (\sqrt{3}\cos z)x - (2 - \sqrt{3}\sin z)y, \quad v = (2 - \sqrt{3}\sin z)x + (\sqrt{3}\cos z)y,$$
$$w = 4 - 2\sqrt{3}\sin z, \quad p = p_0 - 2(2 - \sqrt{3}\sin z)^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

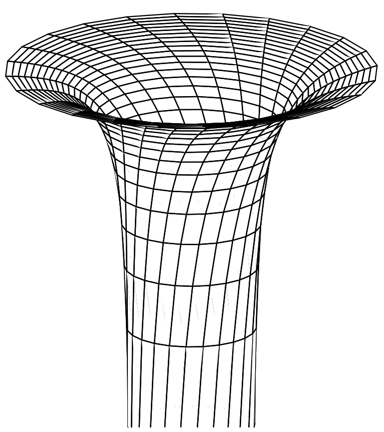

Рис. 1. Картина течения для примера 3

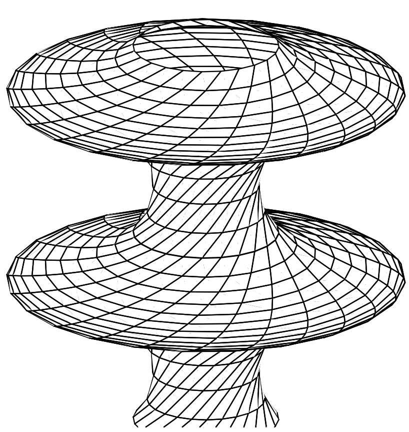

Рис. 2. Картина течения для примера 4

Частицы жидкости движутся по спирали, проекции траекторий на горизонтальную плоскость являются эллипсами. Поверхности (рис. 2) $(x^2 + y^2)(2 - \sqrt{3}\sin z) = \mathrm{const}$ можно рассматривать в качестве твердых стенок. Аналогично предыдущему примеру незамкнутые линии на рис. 2 являются траекториями движения частиц жидкости вдоль стенок. Другие траектории имеют ту же форму и получаются из представленных путем сжатия в направлении оси симметрии.

В заключение приведем один результат, относящийся к системе уравнений идеальной неоднородной жидкости, которая записана в цилиндрических координатах:

$$\begin{gathered} Du - r^{-1}v^2 + \rho^{-1}p_r = 0, \quad Dv + r^{-1}vu + r^{-1}\rho^{-1}p_\theta = 0, \\ Dw + \rho^{-1}p_z = 0, \quad D\rho = 0, \quad u_r + r^{-1}u + r^{-1}v_\theta + w_z = 0, \end{gathered} \tag{25}$$

где t — время; r, θ, z — пространственные переменные; u, v, w — компоненты скорости; p — давление; ρ — плотность, оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + r^{-1}v\frac{\partial}{\partial \theta} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Положим $u = p_\theta = p_z = 0$. Подстановка этих соотношений в (25) дает уравнения

$$Dv = Dw = D\rho = \rho^{-1}p_r - r^{-1}v^2 = r^{-1}v_\theta + w_z = 0.$$

Анализ полученной системы в общих чертах повторяет анализ системы для однородной жидкости, поэтому сразу приведем окончательный результат.

Система (25) при сделанных предположениях имеет следующее точное решение в неявной форме:

$$u = 0, \quad w = \varphi, \quad z - tw = (\theta - tvr^{-1})\varphi' + \psi,$$

где $\varphi = \varphi(r, vr^{-1})$, $\psi = \psi(r, vr^{-1})$ — произвольные функции, φ' — производная функции φ по второму аргументу,

$$p = p(r), \quad \rho = rp_r v^{-2}.$$

Найденное решение обобщает решение А.А. Родионова [9], которое можно получить, положив $\varphi' = 0$.

Автор выражает благодарность О.В. Капцову за ценные советы при выполнении данной работы.

Список литературы

[1] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

[2] Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1971. Вып. 7. С. 212–214.

[3] Шанько Ю.В., Капцов О.В. Оптимальные системы подалгебр и инвариантные решения ранга два для трехмерных уравнений Эйлера // Диф. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1814–1819.

[4] Чупахин А.П. Гидродинамика с квадратичным давлением. 1. Общие результаты // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 27–35.

[5] Чупахин А.П. Гидродинамика с квадратичным давлением. 2. Примеры // Там же. 2002. Т. 43, № 2. С. 22–28.

[6] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[7] Игнатьева М.А., Чупахин А.П. Интегрирование уравнений газовой динамики для 2.5-мерных решений // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 103–115.

[8] Шанько Ю.В. О некоторых точных решениях трехмерных уравнений идеальной несжимаемой жидкости // Материалы конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Ч. 4. Алматы, 2004. С. 290–296.

[9] Родионов А.А. Об одном точном решении уравнений вращательно-симметричного движения жидкости // Тез. докл. Всероссийской конф. “Новые математические модели в механике сплошных сред: Построение и изучение”. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2004. С. 119–120.

Поступила в редакцию 10 декабря 2009 г.,
с доработки — 10 марта 2010 г.