

НЕЯВНЫЙ МЕТОД ДРОБНЫХ ШАГОВ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ СМЕШАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Ф. ФОРМАЛЕВ, О. А. ТЮКИН

Московский государственный авиационный институт, Россия

e-mail: pirumov@k806.mainet.msk.su

A new resource-sparing, totally stable method of fractional steps for the numerical solution of parabolic problems with mixed differential operators which are split on an asymmetric pattern into coordinate directions is suggested. Theorems of approximation are proved as well as those of stability and convergence. The results of comparative numerical experiments are presented in comparison with the well-known classical methods.

1. Введение

Идеи академика Н. Н. Яненко по разработке полностью неявных и в то же время экономичных схем численного решения задач механики сплошных сред привели его к созданию метода дробных шагов [1], широко используемого в настоящее время. Однако он неоднократно высказывал идеи о более полном расщеплении задач механики сплошных сред не только по независимым переменным и физическим процессам, но и о расщеплении отдельных дифференциальных операторов [2].

Проблема разработки экономичных, абсолютно устойчивых схем численного решения задач механики сплошных сред всегда была актуальной, и одним из направлений этой проблемы, активно развиваемых авторами, является более полное использование информации о решении, получаемой в процессе счета, в частности информации на нижних временных и пространственных слоях.

В данной работе предлагается неявный экономичный метод дробных шагов численного решения параболических задач со смешанными дифференциальными операторами, в котором именно смешанные производные второго порядка расщеплены по координатным направлениям.

Существо метода рассмотрим на примере следующей трехмерной задачи параболического типа (хотя метод разработан для задач произвольной размерности по пространственным переменным):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 L_{\alpha\beta}u, \quad (1)$$
$$L_{\alpha\beta}u = k_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad x \in Q, \quad t \in (0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{Q}, \quad t = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$k_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^3 k_r \nu_{r\alpha} \nu_{r\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}, \quad (4)$$

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^3 \eta_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^3 k_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^3 \eta_\alpha^2. \quad (5)$$

Здесь η — произвольный вектор $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$.

Все существующие экономичные численные схемы для параболических задач со смешанными дифференциальными операторами используют явную аппроксимацию этих операторов и по этой причине являются условно устойчивыми либо абсолютно устойчивыми, но с ограничениями, накладываемыми на коэффициенты $k_{\alpha\beta}$, более жесткими, чем условие сильной эллиптичности (5) [1].

2. Метод полного расщепления

На пространственно-временной сетке $\bar{\omega}_h = \{x = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t = t_j + \alpha\tau/3, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1; j_0\tau = T, \alpha = 1, 2, 3\}$ рассматривается следующая конечно-разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную задачу (1)–(5):

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}_\alpha} &= \Lambda_\alpha y_{(\alpha)}, \quad x \in \omega_h; \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ y_{(\alpha)} &= 0, \quad x \in \partial\omega_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}_\alpha} &= \frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau}, \quad y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/3} = y(x, t_j + \alpha\tau/3), \\ \Lambda_\alpha &= \Lambda_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left[\left(\frac{1 - \sigma_{\alpha\beta}}{2} \right) \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}^+ + \left(\frac{1 + \sigma_{\alpha\beta}}{2} \right) \Lambda_{\alpha\beta}^+ \right] + \\ &+ \sum_{\beta=\alpha+1}^3 \left[\left(\frac{1 - \sigma_{\alpha\beta}}{2} \right) \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}^- + \left(\frac{1 + \sigma_{\alpha\beta}}{2} \right) \Lambda_{\alpha\beta}^- \right], \\ \Lambda_{\alpha\alpha} y &= k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \text{sign } k_{\alpha\beta}, \\ \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}^+ y &= k_{\alpha\beta} y_{x_\beta x_\alpha}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^+ y = k_{\alpha\beta} y_{x_\beta \bar{x}_\alpha}, \\ \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}^- y &= k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta \bar{x}_\alpha}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^- y = k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta x_\alpha}, \\ \alpha, \beta &= \overline{1, 3}, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Для двумерных параболических задач конечно-разностная схема метода полного расщепления на шаблоне, представленном на рис. 1, имеет вид

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_{11} y^{j+1/2} + \left(\frac{1 - \sigma_{12}}{2} \tilde{\Lambda}_{12}^- + \frac{1 + \sigma_{12}}{2} \Lambda_{12}^- \right) y^{j+1/2},$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_{22} y^{j+1} + \left(\frac{1 - \sigma_{21}}{2} \tilde{\Lambda}_{21}^+ + \frac{1 + \sigma_{21}}{2} \Lambda_{21}^+ \right) y^{j+1}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\alpha} y &= k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & \tilde{\Lambda}_{12}^- y^{j+1/2} &= k_{12} y_{\bar{x}_2 \bar{x}_1}^{j+1/2}, \\ \Lambda_{12}^- y^{j+1/2} &= k_{12} y_{\bar{x}_2 x_1}^{j+1/2}, & \tilde{\Lambda}_{21}^+ y^{j+1} &= k_{21} y_{x_2 x_1}^{j+1}, \\ \Lambda_{21}^+ y^{j+1} &= k_{21} y_{x_2 \bar{x}_1}^{j+1}; & \sigma_{\alpha\beta} &= \text{sign } k_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

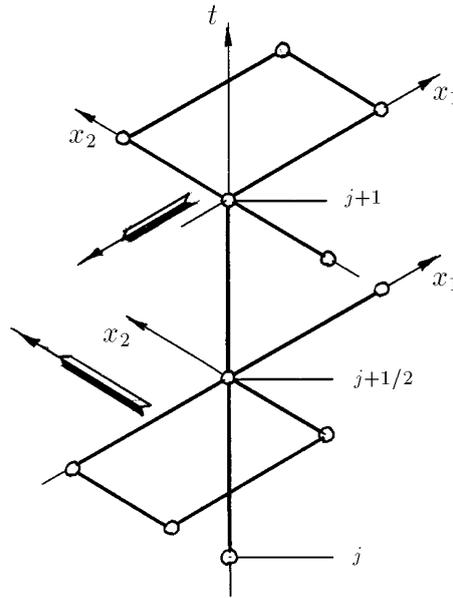


Рис. 1. Шаблон схемы метода полного расщепления в двумерном случае.

При этом, если скалярная прогонка осуществляется по переменной x_1 , то перемещение шаблона осуществляется вдоль другой переменной x_2 и наоборот (на рис. 1 в первой подсхеме перемещение шаблона осуществляется в направлении от нижней границы к верхней, а во второй подсхеме — от правой границы к левой, показано стрелкой).

3. Аппроксимация

При исследовании аппроксимации схему (6) естественно рассматривать как аддитивную схему, обладающую свойством суммарной аппроксимации, погрешность которой определяется как сумма погрешностей промежуточных подсхем. При этом полная аппроксимация на точном решении дифференциальной задачи достигается после реализации всех подсхем метода.

Будем считать, что задача (1)–(5) имеет единственное решение — функцию $u(x, t) \in C_4^2(\bar{Q}_T)$, где $C_n^m(\bar{Q}_T)$ — класс функций, имеющих непрерывные производные m -го порядка по t и n -го по x_1, x_2, x_3 в области $\bar{Q}_T = \bar{Q} \times [0, T]$. Тогда верна

Теорема 1. *Схема (6) обладает свойством суммарной аппроксимации на решении $u(x, t)$ задачи (1)–(5) с погрешностью аппроксимации $O(\tau + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$.*

Доказательство. Характеристикой точности схемы является разность

$$z^{j+\alpha/3} = y^{j+\alpha/3} - u^{j+1}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в схему (6), получим конечно-разностную задачу для нахождения погрешности

$$\begin{aligned} z_{\bar{t}_\alpha} &= \Lambda_\alpha z_{(\alpha)} + \psi_\alpha, & z(x, 0) &= 0, & x &\in \bar{\omega}_h, \\ z_{(\alpha)} &= 0, & x &\in \partial\omega_h, & t &\in \bar{\omega}_\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha u^{j+1} - \delta_{\alpha,1} u_t, \quad \delta_{\alpha,1} - \text{символ Кронекера.}$$

Используя разложения Тейлора, нетрудно показать, что:

$$\psi_\alpha = O(1), \quad \psi = \sum_{\alpha=1}^3 \psi_\alpha = O(\tau + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2).$$

Следовательно, схема (6) обладает суммарной аппроксимацией и является аддитивной. Теорема доказана.

4. Устойчивость

Пусть G_h — пространство сеточных функций, заданных на внутренних узлах сетки $\bar{\omega}_h$. Вводя в G_h скалярное произведение и норму

$$(u, v) = \sum_{x \in \omega_h} u(x)v(x)H, \quad H = \prod_{\alpha=1}^3 h_\alpha, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

получим гильбертово пространство сеточных функций. В этом случае операторы $\Lambda_{\alpha\alpha}, \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}^-, \Lambda_{\alpha\beta}^-, \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}^+, \Lambda_{\alpha\beta}^+$ можно рассматривать как линейные операторы, отображающие G_h на G_h (их область определения и область значений совпадают со всем пространством G_h), поскольку значения функции на границе равны нулю. Такая интерпретация разностных операторов позволяет вместо схемы (6) рассмотреть операторно-разностную схему

$$(E - \tau\Lambda_\alpha)y^{j+\alpha/3} = y^{j+(\alpha-1)/3}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h,$$

исключая в которой промежуточные значения сеточной функции, получим

$$By^{j+1} = y^j, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad (10)$$

где

$$B = (E - \tau\Lambda_1)(E - \tau\Lambda_2)(E - \tau\Lambda_3).$$

Используя тождество $y^{j+1} - y^j = \tau y_t$, запишем схему (10) в каноническом виде [3]:

$$By_t + Ay^j = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad (11)$$

где

$$A = \frac{1}{\tau} (B - E).$$

Теорема 2. Пусть компоненты $k_{\alpha\beta}$ тензора задачи (1) – (5) удовлетворяют условию сильной эллиптичности (5). Тогда схема (11) устойчива по начальным данным, так что для решения задачи с начальным условием $y(x, 0) = u_0(x)$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y(x, 0)\| = \|u_0(x)\|. \quad (12)$$

Доказательство. Поскольку выполнено условие сильной эллиптичности для коэффициентов $k_{\alpha\beta}$, то оператор $A \geq 0$ и $B = E + \tau A > 0$. Следовательно, существует оператор B^{-1} . Следуя [3], умножим (11) слева на B^{-1} , получим

$$y_t + (E + \tau A)^{-1} A y^j = 0,$$

или, что то же самое,

$$y^{j+1} = S y^j, \quad S = E - \tau(E + \tau A)^{-1} A. \quad (13)$$

Устойчивость схемы (11) эквивалентна выполнению операторного неравенства $S^* S \leq E$ (S^* — оператор, сопряженный S), означающего, что норма оператора S не превышает единицы. Неравенство $S^* S \leq E$ имеет в данном случае вид

$$(E + \tau A^*)^{-1} A^* + A(E + \tau A)^{-1} \geq \tau(E + \tau A^*)^{-1} A^* A(E + \tau A)^{-1}$$

и эквивалентно операторному неравенству

$$A^*(E + \tau A) + (E + \tau A^*)A \geq \tau A^* A,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$A + \frac{\tau}{2} A^* A \geq 0. \quad (14)$$

Поскольку $A \geq 0$ и $A^* A \geq 0$, то (14) выполнено и $\|S\| \leq 1$. Поэтому

$$\|y^{j+1}\| \leq \|S\| \|y^j\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y(x, 0)\| = \|u_0(x)\|.$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости по правой части. Для этого рассмотрим схему

$$B y_t + A y^j = f^j, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h. \quad (15)$$

В работе [3] доказана теорема о том, что из устойчивости схемы (11) по начальным данным в некоторой норме $\|\cdot\|_1$ следует устойчивость схемы (15) по правой части, взятой в норме $\|f^j\|_2 = \|B^{-1} f^j\|_1$. Отсюда следует

Теорема 3. Схема (15) устойчива по правой части, если выполнены условия теоремы 2, и для решения справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{k=0}^j \tau \|B^{-1} f^k\|. \quad (16)$$

Поскольку $B^{-1} \leq S \leq E$, вместо (16) можно получить оценку

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{k=0}^j \tau \|f^k\|. \quad (17)$$

Согласно общей теории, из аппроксимации и устойчивости схемы (6) следует ее сходимость. Исключая промежуточные значения в схеме для погрешности (9) и применяя к полученной двухслойной схеме оценку (17), получаем, что решение конечно-разностной задачи при $\tau \rightarrow 0$, $\sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha}^2 \rightarrow 0$ сходится к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(\tau + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$.

5. Результаты численного эксперимента

Экспериментальное исследование рассматриваемой в работе разностной схемы проводилось на примерах многочисленных задач анизотропной теплопроводности: линейных, квазилинейных, нелинейных, двумерных, трехмерных, а также путем сравнения с полученными авторами аналитическими решениями задач анизотропной теплопроводности и с результатами, полученными с помощью метода дробных шагов Н. Н. Яненко (МДШ), метода переменных направлений (МПН) Писмена — Рэчфорда, явной схемы. Эти исследования проводились в широком диапазоне чисел Куранта от 1 до 150 ($Ku = \varkappa\tau/h^2$, $\varkappa = 4\|k\|/c\rho$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$, $\|k\| = \max(k_{\xi}, k_{\eta}, k_{\zeta})$), где k_{ξ} , k_{η} , k_{ζ} — компоненты главного тензора теплопроводности, $c\rho$ — объемная теплоемкость). Теоретическое и экспериментальное обоснование метода приведено в [4].

Из всего многообразия результатов приведем сравнение численного решения по предлагаемой схеме с аналитическим решением первой начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности, решение линейной и нелинейной задач в сравнении с классическими схемами.

В работах [5, 6] получено и исследовано аналитическое решение следующей задачи анизотропной теплопроводности в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq l$:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < l, \quad t > 0; \tag{18}$$

$$u(x, 0, t) = \begin{cases} u_1, & |x| \leq L_1, \quad y = 0, \quad t > 0, \\ 0, & |x| > L_1, \quad y = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{19}$$

$$u(x, l, t) = \begin{cases} u_2, & |x| \leq L_2, \quad y = l, \quad t > 0, \\ 0, & |x| > L_2, \quad y = l, \quad t > 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$0, \quad |x| > L_2, \quad y = l, \quad t > 0, \tag{22}$$

$$u(\pm\infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u(\pm\infty, y, t)}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0. \tag{24}$$

Решением этой задачи является функция

$$u(x, y, t) = \frac{u_1}{2} \int_0^t F_1(y, \tau) (\operatorname{erf} L_1^+ + \operatorname{erf} L_1^-) d\tau + \frac{u_2}{2} \int_0^t F_2(y, \tau) (\operatorname{erf} L_2^+ + \operatorname{erf} L_2^-) d\tau, \tag{25}$$

где

$$L_1^{\pm} = \frac{L_1 \pm my \mp x}{2\sqrt{q\tau}}; \quad L_2^{\pm} = \frac{L_2 \pm m(y-l) \mp x}{2\sqrt{q\tau}},$$

$$m = \frac{k_{12}}{k_{22}}, \quad q = \frac{k_{\xi} k_{\eta}}{c \rho k_{22}}, \quad k^2 = \frac{c \rho}{k_{22}};$$

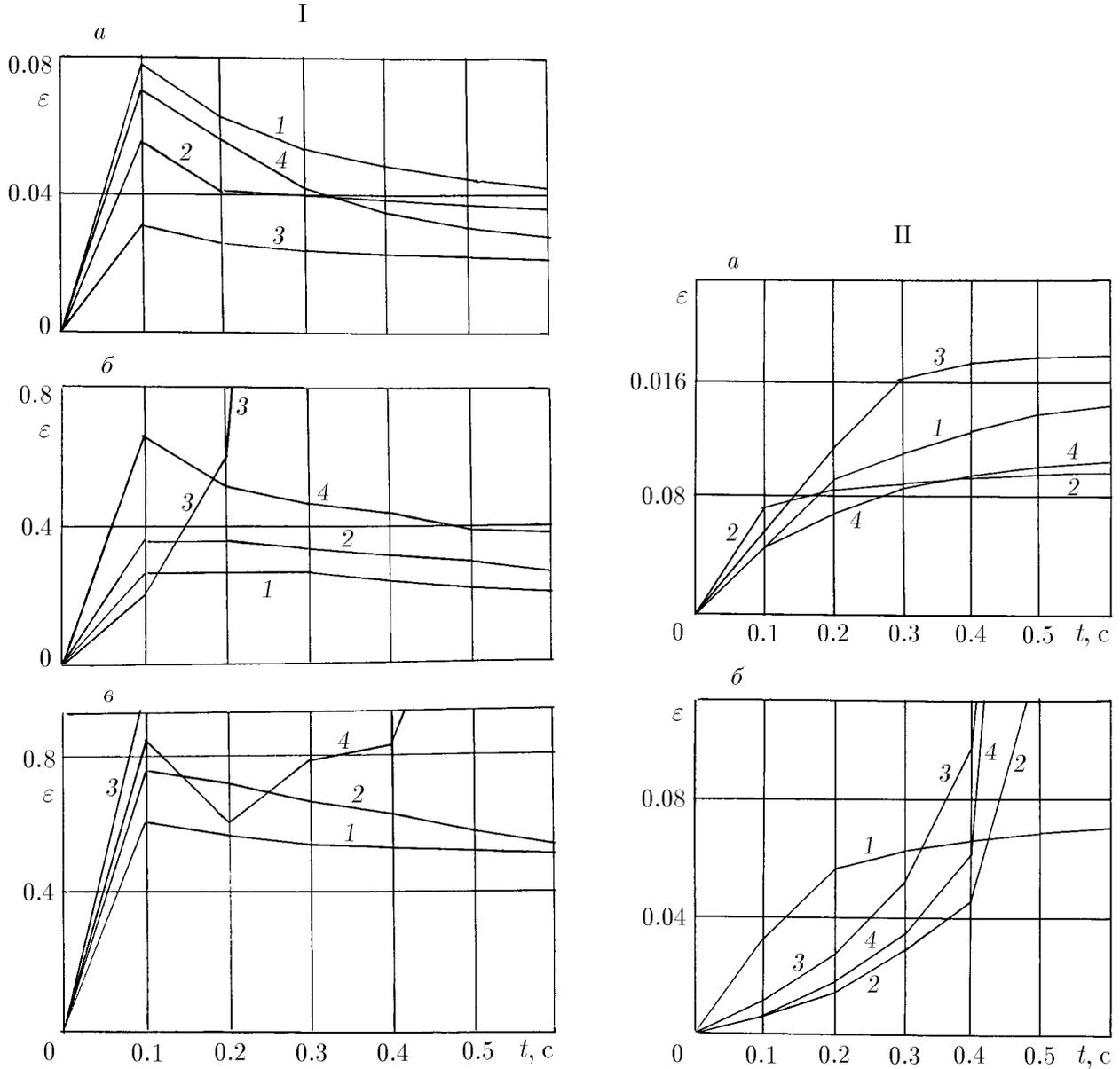


Рис. 2. Зависимость погрешности ε от времени для чисел Куранта
 I — $Ku = 1.0$ (а), 10 (б), 150 (в), II — $Ku = 0.25$ (а), 1.0 (б).

$$F_1(y\tau) = \begin{cases} \frac{2\pi}{k^2 l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau}{k^2 l^2}\right), & 0 < y < l; \\ \delta(\tau) = \delta(\tau + 0), & y = 0; \\ 0, & y = l. \end{cases}$$

Т а б л и ц а 2

1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0
1.0	0.2435	0.1169	0.1066	0.1060	<u>0.1063</u>	<u>0.1133</u>	0.2147	1.0
1.0	0.1448	0.0167	0.0071	0.0065	0.0070	0.0164	<u>0.1419</u>	1.0
1.0	0.1381	0.0106	0.0009	0.0004	0.0009	0.0105	<u>0.1379</u>	1.0
1.0	0.1378	0.0102	0.0006	0.0001	0.0006	0.0102	0.1378	1.0
1.0	<u>0.1379</u>	0.0105	0.0009	0.0004	0.0009	0.0106	0.1381	1.0
1.0	<u>0.1419</u>	0.0164	0.0070	0.0065	0.0071	0.0167	0.1448	1.0
1.0	0.2147	<u>0.1133</u>	<u>0.1063</u>	0.1060	0.1066	0.1169	0.2435	1.0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0

Входные данные принимали следующие значения: $u|_{\Gamma} = 1$; $u(x, y, 0) = 0$; $c\rho = 1000$ кДж/м³К; $k_{11} = k_{22} = 0.05$ кВт/мК; $k_{12} = -0.03$ кВт/мК. Угол φ ориентации главных осей относительно осей декартовой системы координат составляет 45° , так что распределение температуры должно быть симметричным относительно побочной диагонали квадрата, что можно использовать для контроля точности.

Из таблиц видно, что уже при малых значениях шага по времени неявный метод полного расщепления точнее МПН (соответствующие значения подчеркнуты и выделены в рамки), а МПН имеет второй порядок точности по времени и по пространственным переменным. Однако можно показать, что с увеличением τ МПН становится неустойчив, в то время как разработанный метод устойчив для задач с любой размерностью по пространственным переменным.

В качестве следующего теста метода полного расщепления рассматривается сравнительный анализ (по сравнению с классическими численными методами) поведения во времени абсолютной погрешности относительно аналитического решения следующей существенно нелинейной задачи для уравнения параболического типа:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{k_{12}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_{12} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^3 + k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + 2c\rho t - 10, \quad 0 < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2, \quad t > 0, \quad (26)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \frac{2}{k_{11}} x_1^2 + \frac{3}{k_{22}} x_2^2, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad t = 0, \quad (27)$$

$$u(0, x_2, t) = \frac{3}{k_{22}} x_2^2 + t^2, \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad t \geq 0, \quad (28)$$

$$u(l_1, x_2, t) = \frac{2}{k_{11}} l_1^2 + \frac{3}{k_{22}} x_2^2 + t^2, \quad x_1 = l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad t \geq 0, \quad (29)$$

$$u(x_1, 0, t) = \frac{2}{k_{11}} x_1^2 + t^2, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad x_2 = 0, \quad t \geq 0, \quad (30)$$

$$u(x_1, l_2, t) = \frac{2}{k_{11}} x_1^2 + \frac{3}{k_{22}} l_2^2 + t^2, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad x_2 = l_2, \quad t \geq 0. \quad (31)$$

Для этой задачи подобрано частное аналитическое решение

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{2}{k_{11}} x_1^2 + \frac{3}{k_{22}} x_2^2 + t^2, \quad (32)$$

поэтому для оценки эффективности конечно-разностных схем используется критерий

$$\varepsilon(t) = \max_{i_1, i_2} |y_{i_1, i_2}(t) - u_{i_1, i_2}(t)|,$$

где u — точное решение (32), а y — сеточная функция, полученная в результате численного решения различными методами.

На рис. 2, II представлены результаты тестирования по критерию (33) предлагаемого метода полного расщепления (кривые 1), метода дробных шагов (кривые 2), явного метода (кривые 3) и метода переменных направлений (кривые 4) для чисел $Ku = 0.25$; $\tau = 0.0025$; $h = 0.01$; $\varkappa = 0.001$ (а) и $Ku = 1.0$; $\tau = 0.1$; $h = 0.01$; $\varkappa = 0.001$ (б).

Для чисел $Ku < 1$ погрешности указанных схем одного порядка и все схемы устойчивы. Начиная с чисел $Ku = 1$ все схемы становятся неустойчивыми (погрешности у них резко возрастают) за исключением метода полного расщепления, который остается устойчивым и при больших числах Ku .

Список литературы

- [1] ЯНЕНКО Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Наука, Новосибирск, 1967.
- [2] ЯНЕНКО Н. Н. *Очерки. Статьи. Воспоминания*. Сост. Н. Н. Бородина. Наука, Новосибирск, 1988.
- [3] САМАРСКИЙ А. А. *Теория разностных схем*. Наука, М., 1983.
- [4] ТЮКИН О. А. *Метод полного расщепления численного решения параболических уравнений со смешанными производными: Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. МАИ, М., 1996.
- [5] ФОРМАЛЕВ В. Ф., МОСКАЛЕНКО А. А. Аналитическое решение трехмерной нестационарной задачи теплопроводности с тензором теплопроводности. *Дифференциальные уравнения*, **26**, №7, 1990, 1277–1279.
- [6] ФОРМАЛЕВ В. Ф., ТЮКИН О. А. Исследование температурных полей на основе аналитического решения двумерной задачи анизотропной теплопроводности, **32**, №4, 1994, 518–523.

*Поступила в редакцию 2 июля 1996 г.,
в переработанном виде 14 февраля 1998 г.*