Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся сфере*

З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

Получены нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на сфере, которые могут использоваться при моделировании распространения волн цунами на большие расстояния с учетом вращения Земли, сферичности поверхности океана и дисперсии волн.

Ключевые слова: поверхностные волны на воде, уравнения мелкой воды на сфере, нелинейно-дисперсионные уравнения.

Введение

В последние годы заметно возрос интерес к изучению задач, связанных с катастрофическими волновыми процессами в океане. В 2006–2008 гг. опубликовано несколько концептуальных работ (см., например, [1 – 3]), где рассматриваются перспективы применения современных математических технологий, способных описать различные стадии этого явления с требуемой для практики точностью. Аргументы, на которых основаны выводы авторов указанных работ, в значительной степени опираются на анализ результатов математического моделирования крупнейших цунами двух последних десятилетий. Основное заключение относительно выбора математических (гидродинамических) моделей сводится к следующему: для адекватного описания явления на продолжительное время и в больших по широтному и долготному направлениям акваториях требуются модели, способные воспроизводить дисперсию, отражающую в определенной степени неоднородность процесса в вертикальном направлении, что особенно важно в случае цунами, вызванных и(или) сопровождающихся оползневыми процессами [4], и учитывать эффекты, связанные со сферичностью и вращением Земли [5, 6]. В совокупности это приводит к необходимости применять учитывающие подвижность дна нелинейно-дисперсионные (НЛД) модели на сфере.

Уравнения мелкой воды, описывающие динамику длинных волн на сфере, давно используются при численном моделировании задач метеорологии. Возникающая здесь вычислительная проблема состоит в вырождении этих уравнений в точках полюсов. В [7] приведены различные формы уравнений мелкой воды в сферической геометрии (со ссылкой на монографию [8], где дан подробный вывод этих уравнений из полных уравнений гидродинамики путем интегрирования по глубине) и сформулированы тестовые задачи для оценки эффективности численных алгоритмов, разработке которых

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-05-00294) и программы Государственной поддержки научных школ РФ (№ 931.2008.9).

© ИВТ СО РАН, 2010.

посвящено много работ. В частности, успешно применяются метод конечных разностей (например, [9, 10]) и спектральные методы. В указанных публикациях уравнения мелкой воды в системе координат $O\lambda\varphi r$ (λ — долгота, φ — широта, r — радиальное расстояние) на вращающейся сфере записаны в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial Hu}{\partial t} + \nabla \cdot (Hu\mathbf{u}) = \left(f + \frac{u}{R}\tan\varphi\right) Hv - \frac{gH}{R\cos\varphi}\frac{\partial \eta}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial Hv}{\partial t} + \nabla \cdot (Hv\mathbf{u}) = -\left(f + \frac{u}{R}\tan\varphi\right) Hu - \frac{gH}{R}\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор линейной скорости с компонентами $u = R\cos\varphi\,\dot\lambda$; $v = R\,\dot\varphi$; R — радиус Земли; $H = \eta + h$ — полная толщина слоя жидкости (атмосферы), h — рельеф дна (земной поверхности); $f = 2\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, ω — угловая скорость вращения Земли; g — ускорение свободного падения. Дивергенция вектора $\mathbf{u}$ вычисляется следующим образом:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{R\cos\varphi}\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v\cos\varphi}{\partial \varphi}\right].$$

Правая часть уравнений движения системы (1) содержит силу Кориолиса, градиент гидростатического давления и дополнительные члены относительного движения во вращающейся системе координат в направлениях широты и долготы.

В опубликованных недавно работах [11, 12] выведены более подробные по сравнению с (1) уравнения, содержащие центробежную силу, связанную с вращением Земли. В отличие от ранних публикаций на эту тему в указанных статьях обсуждаются условия применимости моделей и проведено аналитическое исследование ряда частных случаев.

В отличие от метеорологии и климатологии, где ввиду планетарных масштабов сферические координаты рассматривались всегда, во многих задачах динамики волн цунами использовались локальные декартовы координаты. Следует также отметить, что в численном моделировании волн цунами при переходе к сферическим координатам не возникает проблем с учетом полюсов: в области решения задачи уравнения мелкой воды остаются невырожденными, так как движение длинных поверхностных волн ограничено на Южном полюсе Антарктидой, а на Северном полярными льдами.

В [1] уравнения мелкой воды на сфере, аналогичные (1), приводятся в недивергентном виде и с учетом трения. Вывод этих уравнений для задач динамики поверхностных океанических волн приведен в монографии [13]. В более ранних работах (см., например, [14]) используются уравнения мелкой воды, не учитывающие члены

$$\left(\frac{u}{R}\tan\varphi\right) Hv, \quad \left(\frac{u}{R}\tan\varphi\right) Hu.$$

Заметим, что в задачах цунамирайонирования эти члены могут давать пренебрежимо малый вклад.

На необходимость применения НЛД-уравнений на сфере указано в нескольких опубликованных в последнее время работах. В [6] к уравнениям мелкой воды, записанным в сферических координатах, добавлены линейные дисперсионные члены. С использованием модифицированной системы уравнений, включенной в программную систему

TUNAMI-N2, авторами статьи [6] было проведено моделирование Суматранского цунами 2004 года, показавшее необходимость учета дисперсии и сферичности. В работе [5], где описано математическое моделирование этого же события с применением известной программной системы FUNWAVE, основанной на полной нелинейно-дисперсионной модели без учета сферичности и разработанной в [15] с учетом идей [16], также указывается на необходимость вывода НЛД-уравнений на сфере.

В статье [17] дан единообразный вывод нелинейно-дисперсионных уравнений Грина—Нагди, Железняка—Пелиновского и Алешкова, описывающих поверхностные волны на воде без учета сферичности и вращения Земли, но с учетом подвижности донной поверхности. В настоящей работе развитый в [17] подход применяется для вывода НЛД-уравнений мелкой воды на вращающейся сфере.

1. Постановка задачи для уравнений Эйлера

Уравнения Эйлера, описывающие течение жидкости в сферической системе координат с учетом вращения Земли, приведены в [18]. Однако для вывода приближенных НЛД-уравнений удобнее работать с другой формой записи уравнений Эйлера, представленной в данном разделе.

Введем неподвижную декартову систему координат так, чтобы ее ось Oz проходила по оси вращения Земли, Северный полюс соответствовал координате $z = R$, а координатная плоскость Oxy совпадала с экваториальной. Силу ньютоновского притяжения $\boldsymbol{g}$, действующую в точке $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ на частицу жидкости единичной массы, считаем направленной к центру Земли, т. е.

$$\mathbf{g} = -g\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = -g\frac{x}{|\mathbf{x}|}\mathbf{e}_1 - g\frac{y}{|\mathbf{x}|}\mathbf{e}_2 - g\frac{z}{|\mathbf{x}|}\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ — базисные векторы декартовой системы координат. Поскольку слой воды является тонким по сравнению с радиусом Земли, то величина g предполагается постоянной по всему слою. Плотность воды также считается постоянной и равной единице во всем слое жидкости.

При указанных предположениях уравнения, описывающие течение идеальной несжимаемой жидкости, можно записать в декартовой системе координат в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + \frac{\partial u_\beta u_\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial x^\beta} = -g\frac{x^\beta}{r}, \quad \beta = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где t — время; P — давление; $r = |\mathbf{x}|$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до центра Земли; u_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ — декартовы компоненты вектора скорости; по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу α производится суммирование, и для возможности компактной записи введены следующие обозначения для декартовых координат: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Рассмотрим сферическую систему координат $O\lambda\theta r$, где λ — долгота, отсчитываемая к востоку от некоторого меридиана $(0 \le \lambda < 2\pi)$, $\theta = \pi/2 - \varphi$ — дополнение до широты φ $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$, связанную с вращающейся Землей; при этом предполагается, что Земля вращается с постоянной угловой скоростью ω и вектор угловой скорости направлен к Северному полюсу, т. е. $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$. Сферические и декартовы координаты связаны выражениями

$$x = r\cos(\lambda + \omega t)\sin\theta, \quad y = r\sin(\lambda + \omega t)\sin\theta, \quad z = r\cos\theta. \tag{4}$$

В новой системе координат уравнения (2), (3) запишутся как [19]

$$\frac{\partial J v^\alpha}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial J u_\beta}{\partial t} + \frac{\partial J u_\beta v^\alpha}{\partial q^\alpha} + J\frac{\partial P}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} = -gJ\frac{x^\beta}{r}, \quad \beta = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где $J = -r^2\sin\theta$ — якобиан преобразования (4), v^α ($\alpha = 1, 2, 3$) — контравариантные компоненты скорости:

$$v^1 = \dot\lambda, \quad v^2 = \dot\theta, \quad v^3 = \dot r, \tag{7}$$

q^1, q^2 и q^3 — новые обозначения координат λ, θ и r соответственно. Поскольку полученные ниже НЛД-уравнения предназначены для моделирования волн цунами, намеренно исключим из рассмотрения приполярные области Земли, выбирая координату θ из отрезка $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), что гарантирует невырожденность преобразования (4).

Теперь уравнение неразрывности записано в той форме (5), которая удобна для вывода уравнений приближенных НЛД-моделей, а к уравнению движения (6) будут применены дополнительные преобразования. Учитывая уравнение неразрывности, (6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + v^\alpha\frac{\partial u_\beta}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} = -g\frac{x^\beta}{r}, \quad \beta = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Возьмем некоторое γ ($\gamma = 1, 2, 3$) и умножим каждое из уравнений (8) на соответствующую производную $\partial x^\beta/\partial q^\gamma$. Просуммировав полученные уравнения по индексу β, получим следующие три уравнения:

$$\frac{\partial v_\gamma}{\partial t} + v^\alpha\frac{\partial v_\gamma}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial q^\gamma} = -g\delta_\gamma^3 + u_\beta\left(\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial q^\gamma \partial t} + v^\alpha\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha}\right), \quad \gamma = 1, 2, 3, \tag{9}$$

где по индексам α и β выполняется суммирование, δ_γ^3 — символы Кронекера, v_γ — ковариантные компоненты вектора скорости:

$$v_\gamma = u_\beta\frac{\partial x^\beta}{\partial q^\gamma}. \tag{10}$$

Выражения в правой части уравнений (9) преобразуем путем замены согласно формулам [20] декартовых компонент скорости u_β на контравариантные:

$$u_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial t} + \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\mu}v^\mu.$$

В результате приходим к следующей форме уравнений движения идеальной жидкости во вращающейся сферической системе координат:

$$\frac{\partial v_\gamma}{\partial t} + v^\alpha\frac{\partial v_\gamma}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial q^\gamma} = -g\delta_\gamma^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial q^\gamma} + r_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где

$$r_\gamma = v^1 \frac{\partial g_{10}}{\partial q^\gamma} + \frac{1}{2}\left(v^1\right)^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial q^\gamma} + \frac{1}{2}\left(v^2\right)^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial q^\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, 3, \tag{12}$$

g_{00}, $g_{\alpha 0}$, $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — ковариантные компоненты метрического тензора преобразования (4), которые вычисляются по формулам [20]

$$g_{00} = 1 + \omega^2 r^2 \sin^2\theta, \quad g_{10} = \omega r^2 \sin^2\theta, \quad g_{20} = g_{30} = 0, \tag{13}$$

$$g_{11} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta. \tag{14}$$

Поскольку компоненты (13), (14) не зависят от координаты λ, то $r_1 \equiv 0$. В правых частях уравнений (11) второе слагаемое

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial q^\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \gamma = 1, \\ r^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta & \text{при} \quad \gamma = 2, \\ r\omega^2 \sin^2\theta & \text{при} \quad \gamma = 3 \end{cases} \tag{15}$$

связано с центробежной силой, возникающей из-за вращения Земли. Эта сила приводит к отклонению градиента давления в покоящейся жидкости от радиального направления. Далее вместо давления P будем использовать величину $p = P - g_{00}/2$, которая при отсутствии вращения совпадает с давлением, а при его наличии отличается от P, в частности, тем, что в покоящейся жидкости градиент величины p направлен к центру Земли. Принимая во внимание малость квадрата скорости вращения Земли и порядок чисел Россби, характерный для волн цунами, можно считать, что $p = P$ [21, 22]. Таким образом, приходим к окончательному виду уравнений движения с выделенным радиальным направлением:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + w\,\mathbf{v}_r + \nabla p = \mathbf{r}, \tag{16}$$

$$w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w w_r + p_r = -g + r_3, \tag{17}$$

где через w обозначена “вертикальная” составляющая скорости v^3; $\mathbf{u} = (v^1, v^2)^T$ — вектор “горизонтальной” составляющей скорости; $\nabla = (\partial/\partial\lambda,\ \partial/\partial\theta)$; $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$;

$$r_1 = 0, \quad r_2 = v^1\frac{\partial g_{10}}{\partial\theta} + \frac{\left(v^1\right)^2}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial\theta}, \quad r_3 = v^1\frac{\partial g_{10}}{\partial r} + \frac{\left(v^1\right)^2}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \frac{\left(v^2\right)^2}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial r}; \tag{18}$$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, при этом ковариантные компоненты скорости v_γ $(\gamma = 1, 2, 3)$ выражаются через контравариантные по известной формуле [20]

$$v_\gamma = g_{\gamma 0} + g_{\gamma\beta} v^\beta,$$

которая с учетом равенств (13), (14) приводит к выражениям

$$v_1 = g_{10} + g_{11}v^1, \quad v_2 = g_{22}v^2, \quad v_3 = v^3 = w. \tag{19}$$

Система уравнений (5), (16) и (17) дополняется начальными и краевыми условиями. Будем считать, что слой жидкости ограничен снизу непроницаемым подвижным дном, заданным функцией $r = R - h(\lambda, \theta, t)$, а сверху — свободной границей, описываемой функцией $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$. В сферической системе координат краевые условия на этих частях границы записываются как [20]

$$(\eta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\eta - w)\big|_{r=R+\eta} = 0, \tag{20}$$

$$p\big|_{r=R+\eta} = 0, \tag{21}$$

$$(h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h + w)\big|_{r=R-h} = 0. \tag{22}$$

2. НЛД-уравнения мелкой воды на сфере

В моделях мелкой воды искомыми величинами являются $H = \eta + h$ — полная глубина слоя жидкости и $\mathbf{c}(\lambda, \theta, t)$ — вектор скорости в приближенной модели, связанный каким-либо образом с вектором скорости трехмерного течения. В настоящей работе в качестве $\mathbf{c}$ возьмем осредненную по глубине "горизонтальную" составляющую скорости:

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\, ds, \tag{23}$$

где $s = r - R$. Основное предположение, используемое нами при выводе НЛД-уравнений мелкой воды на сфере, состоит в том, что в тонком по сравнению с радиусом Земли слое воды можно пренебречь изменением компонент метрического тензора по глубине, т. е. в формулах (13), (14) можно использовать приближенные величины

$$g_{10} = \omega R^2 \sin^2\theta, \quad g_{11} = R^2 \sin^2\theta, \quad g_{22} = R^2. \tag{24}$$

Тогда и для якобиана $J = -r^2 \sin\theta$ берется его приближенное значение

$$J = -R^2 \sin\theta. \tag{25}$$

2.1. Уравнение неразрывности приближенной модели

Проинтегрируем уравнение неразрывности (5), переписанное в новых обозначениях, по переменной s:

$$\int\limits_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial J v^1}{\partial \lambda} + \frac{\partial J v^2}{\partial \theta} + \frac{\partial J w}{\partial s} \right) ds = 0,$$

и преобразуем полученное соотношение к виду

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta} J v^1 ds + \frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{-h}^{\eta} J v^2 ds - J\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\eta - w\right)\Big|_{s=\eta} - J\left(\mathbf{u}\cdot\nabla h + w\right)\Big|_{s=-h} = 0. \tag{26}$$

Из интегрального соотношения (26) при учете формул (23), (25) и краевых условий (20), (22) следует уравнение неразрывности

$$(JH)_t + (JHc_1)_\lambda + (JHc_2)_\theta = 0. \tag{27}$$

Если ввести оператор дивергенции в сферических координатах

$$\nabla\cdot\mathbf{c} = \frac{(Jc_1)_\lambda + (Jc_2)_\theta}{J}, \tag{28}$$

то уравнение (27) примет следующий вид:

$$H_t + \nabla\cdot(H\mathbf{c}) = 0. \tag{29}$$

2.2. Уравнения движения в НЛД-модели на сфере

При выводе уравнений движения используем те же предположения, что и при получении НЛД-уравнений движения на плоскости [17]: будем предполагать, что "горизонтальная" составляющая вектора скорости постоянна по глубине (вектор $\mathbf{u}$ не зависит от координаты s), а "вертикальная" (здесь радиальная) компонента зависит от s линейно:

$$w(\lambda,\theta,s,t) = w_0(\lambda,\theta,t) + [s + h(\lambda,\theta,t)]\, w_1(\lambda,\theta,t), \quad -h \le s \le \eta. \tag{30}$$

В качестве искомого вектора $\mathbf{c}$ примем вектор $\mathbf{u}$. Отсюда следует, что уравнение неразрывности приближенной модели имеет вид (29).

При предположении (30) относительно компоненты w из условия (22) следует, что $w_0 = -Dh$, а из кинематического условия (20) — $w_1 = (DH)/H$, где D — оператор полной производной

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot\nabla.$$

Следовательно, "вертикальная" компонента скорости определяется по формуле

$$w = -Dh + \frac{s+h}{H} DH,$$

которая в силу равенства

$$DH = -H\nabla\cdot\mathbf{c}, \tag{31}$$

вытекающего из уравнения неразрывности (29), может быть записана в виде

$$w = -Dh - (s+h)\nabla\cdot\mathbf{c}. \tag{32}$$

Тогда

$$Dw = -D^2 h - Dh\nabla\cdot\mathbf{c} - (s+h)D\left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right), \tag{33}$$

$$ww_s = Dh\nabla\cdot\mathbf{c} + (s+h)\left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right)^2. \tag{34}$$

Проинтегрируем уравнение (17) по "вертикальной" координате s от некоторого ζ $(-h \le \zeta \le \eta)$ до η:

$$\int\limits_{\zeta}^{\eta} \left(w_t + \mathbf{c}\cdot\nabla w + ww_s + p_s\right) ds = \int\limits_{\zeta}^{\eta} \big(-g + r_3\big)\, ds.$$

Подставляя в это соотношение выражения (33) и (34) и учитывая динамическое условие (21), получим формулу для вычисления давления:

$$p = -\frac{H^2}{2}R_1 + (g - R_2)H - (g - R_2)(\zeta + h) + \frac{(\zeta+h)^2}{2}R_1 - \int\limits_{\zeta}^{\eta} r_3\, ds, \quad -h \le \zeta \le \eta,$$

в которой использованы обозначения

$$R_1 = D\left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right) - \left(\nabla\cdot\mathbf{c}\right)^2, \quad R_2 = D^2 h. \tag{35}$$

Из формул (18), (24) следует, что $r_3 \equiv 0$ и, тем самым, давление является квадратичной функцией независимой переменной s:

$$p = -\frac{H^2}{2}R_1 + (g - R_2)H - (g - R_2)(s + h) + \frac{(s+h)^2}{2}R_1, \quad -h \le s \le \eta. \tag{36}$$

Найденное выражение для давления используется при выводе уравнений движения НЛД-модели. Из формул (19) при учете допущений (24) следует, что компоненты вектора $\mathbf{v}$ не зависят от "вертикальной" координаты s, вследствие чего $\mathbf{v}_s = 0$. Поэтому интегрируя уравнение (16) по всему слою воды

$$\int\limits_{-h}^{\eta} (\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p)\,ds = \int\limits_{-h}^{\eta} \mathbf{r}\,ds,$$

принимая во внимание динамическое условие (21) и независимость вектора $\mathbf{r}$ от координаты s, получим соотношение

$$H\Big(\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big) + \nabla\int\limits_{-h}^{\eta} p\,ds - p\Big|_{s=-h}\nabla h = \mathbf{r}H. \tag{37}$$

Поскольку распределение давления (36) в исходном трехмерном течении известно, то его можно использовать в полученном выражении (37) для вычисления членов с давлением:

$$\nabla\int\limits_{-h}^{\eta} p\,ds - p\Big|_{s=-h}\nabla h = gH\nabla\eta - \nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) + H\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right). \tag{38}$$

Тогда из (37) следует уравнение движения приближенной НЛД-модели:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{v} + g\nabla\eta = \frac{1}{H}\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - \nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right) + \mathbf{r}, \tag{39}$$

в котором

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \quad v_1 = g_{10} + g_{11}c_1, \quad v_2 = g_{22}c_2,$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T, \quad r_1 \equiv 0, \quad r_2 = c_1\frac{\partial g_{10}}{\partial\theta} + \frac{c_1^2}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial\theta},$$

величины g_{10}, g_{11} и g_{22} вычисляются по формулам (24), а R_1 и R_2 — по (35).

2.3. Другие формы записи уравнений НЛД-модели

Для численного решения задачи может потребоваться запись уравнения движения (39) в виде уравнения с дивергентной левой частью:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial\lambda} + \frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial\theta} = J\left(\nabla\Phi + \Psi\nabla h + H\mathbf{r}\right), \tag{40}$$

где $\mathbf{V} = JH\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_\alpha = JH\mathbf{v}c_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$,

$$\Phi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 - g\frac{H^2}{2}, \quad \Psi = gH - \frac{H^2}{2}R_1 - HR_2.$$

По (27), (40) определяются полная глубина H и контравариантные компоненты c_α вектора скорости $\mathbf{c}$. При численном решении задачи удобнее использовать линейные компоненты u и v этого вектора:

$$u = R\sin\theta\ \dot{\lambda}, \quad v = R\,\dot{\theta}.$$

Из формул (25), (27) и (40) следует, что для зависимых переменных H, u, v уравнения НЛД-модели будут выглядеть следующим образом:

$$(HR\sin\theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv\sin\theta)_\theta = 0, \tag{41}$$

$$(HuR\sin\theta)_t + \left(Hu^2\right)_\lambda + (Huv\sin\theta)_\theta = -\left(\omega R\sin 2\theta + u\cos\theta\right) Hv + \Phi_\lambda + \Psi h_\lambda, \tag{42}$$

$$(HvR\sin\theta)_t + (Huv)_\lambda + \left(Hv^2\sin\theta\right)_\theta = \left(\omega R\sin 2\theta + u\cos\theta\right) Hu + \sin\theta\left(\Phi_\theta + \Psi h_\theta\right), \tag{43}$$

при этом величины R_α ($\alpha = 1, 2$), входящие в дисперсионные члены, вычисляются по формулам

$$R_1 = (\nabla\cdot\mathbf{c})_t + \frac{1}{R\sin\theta}\Big(u\,(\nabla\cdot\mathbf{c})_\lambda + v\sin\theta\,(\nabla\cdot\mathbf{c})_\theta\Big) - (\nabla\cdot\mathbf{c})^2, \tag{44}$$

$$R_2 = (Dh)_t + \frac{1}{R\sin\theta}\Big(u\,(Dh)_\lambda + v\sin\theta\,(Dh)_\theta\Big), \tag{45}$$

где

$$\nabla\cdot\mathbf{c} = \frac{1}{R\sin\theta}\Big(u_\lambda + (v\sin\theta)_\theta\Big), \quad Dh = h_t + \frac{1}{R\sin\theta}\Big(uh_\lambda + v\sin\theta\ h_\theta\Big).$$

Заключение

В работе выведены нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды (41)—(43) на вращающейся сфере. При этом предполагалось, что долготная и широтная компоненты вектора скорости трехмерного течения воды не зависят от радиальной координаты r, а радиальная компонента скорости зависит от r линейным образом. Таким образом, при выводе НЛД-уравнений на сфере использовался подход Грина—Нагди [23] для получения НЛД-уравнений на плоскости [17].

Отметим, что если при выводе НЛД-уравнений на сфере применить другой подход, основанный на разложении потенциала скорости трехмерного течения по малому параметру β (обозначение взято из [17]), то окажется, что представленная выше модель принадлежит к классу так называемых полных НЛД-моделей второго гидродинамического приближения. Из нее могут быть выведены многочисленные варианты промежуточных НЛД-моделей, лежащих между полученной полной и классической моделями мелкой воды на сфере первого приближения. В частности, пренебрегая в уравнениях (41)–(43) дисперсионными членами (44), (45) и используя вместо координаты θ широту φ, придем к уравнению мелкой воды (1). Если рассмотреть случай модельной акватории с ровным дном, то дисперсионные слагаемые в (42), (43) существенно упрощаются и приводятся к виду, рассмотренному в работе [6].

Авторы благодарят Л.Б. Чубарова, по инициативе которого было проведено настоящее исследование.

Список литературы

[1] Murty T.S., Rao A.D., Nirupama N., Nistor I. Numerical modelling concepts for tsunami warning systems // Current Sci. 2006. Vol. 90, No. 8. P. 1073—1081.

[2] Dalrymple R.A., Grilli S.T., Kirby J.T., Watts P. Tsunamis and challenges for accurate modeling // Oceanography. 2006. Vol. 19, No. 1. P. 142—151.

[3] Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Математическое моделирование в задачах поддержки принятия решений в ходе кризисных ситуаций, связанных с катастрофическими волновыми процессами в океане // Тр. IX Всероссийской конф. "Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики". СПб.: Наука, 2008. С. 432–436.

[4] Tappin D.R., Watts P., Grilli S.T. The Papua New Guinea tsunami of 17 July 1998: Anatomy of a catastrophic event // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2008. Vol. 8. P. 243—266.

[5] Grilli S.T., Ioualalen M., Asavanant J. et al. Source constraints and model simulation of the December 26, 2004 Indian Ocean tsunami // J. Waterway Port Coastal and Ocean Eng. 2007. Vol. 133, No. 6. P. 414—428.

[6] Dao M.H., Tkalich P. Tsunami propagation modelling — a sensitivity study // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2007. Vol. 7. P. 741—754.

[7] Williamson D.L., Drake J.B., Hack J.J. et al. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry // J. Comp. Phys. 1992. Vol. 102. P. 211–224.

[8] Haltiner G.J., Williams R.T. Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. 2nd ed. N.Y.: John Wiley and Sons, 1980. 477 p.

[9] Lanser D., Blom J.G., Verwer J.G. Spatial discretization of the shallow water equations in spherical geometry using Osher's scheme / Report MAS-R9918 July 31, 1999, ISSN 1386-3703. Amsterdam, Stichting Mathematisch Centrum, 1999. 34 p.

[10] Liska R., Wendroff B. Shallow water conservative laws on a sphere // Intern. Series Num. Math. 2001. Vol. 141. P. 673—682.

[11] Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 1. Вывод и общие свойства // Прикл. механика и теор. физика. 2009. Т. 50, № 2. С. 24–36.

[12] Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 2. Простые стационарные волны и звуковые характеристики // Там же. 2009. Т. 50, № 3. С. 82–96.

[13] Kowalik Z., Murty T.S. Numerical Modeling of Ocean Dynamics. Advanced Series on Ocean Eng. Vol. 5. World Scientific Publ. Co, 1993. 481 p.

[14] Murty T.S. Storm Surges–Meteorological Ocean Tides. Bull. No. 212, Fisheries Res. Board of Canada, Ottawa, 1984. 897 p.

[15] Wei G., Kirby J.T. A time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations // J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng. 1995. Vol. 120. P. 251–261.

[16] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for near shore wave propagation // Ibid. 1993. Vol. 119. P. 618–638.

[17] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.

[18] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматлит, 1963. 583 с.

[19] Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.

[20] Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 394 с.

[21] Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 303 с.

[22] Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.

[23] Ertekin R.C., Webster W.C., Wehausen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 169. P. 275–292.

Поступила в редакцию 20 июля 2009 г.,
с доработки — 20 ноября 2009 г.