Одномерное истечение в вакуум нормального газа, гравитирующего по Ньютону*

С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: SDeryabin@math.usurt.ru, AMezentsev@math.usurt.ru

Рассматриваются одномерные течения газа в предположении, учитывающем феномен гравитации. Исследуются уравнения состояния нормального газа с различными особенностями и среди них выбирается уравнение состояния, наиболее точно описывающее физический процесс. Рассматривается задача о распаде разрыва, решение которой строится во всей области течения до вакуума включительно.

Ключевые слова: нормальный газ, гравитирующий по Ньютону, свободная поверхность газ—вакуум, сходящиеся ряды.

Введение

В настоящее время задачи об одномерном и многомерном истечении в вакуум идеального политропного газа, в том числе при учете внешних массовых сил и в условиях самогравитации, достаточно подробно исследованы. Также изучались одномерные течения нормального газа для одного частного случая уравнения состояния и без учета гравитации. Обзор полученных результатов можно найти в [1–3].

В данной работе рассматриваются одномерные течения нормального газа с уравнением состояния, позволяющим учитывать гравитацию по Ньютону.

1. Постановка задачи и исследование уравнений состояния

Пусть в момент $t = 0$ сфера или цилиндр Γ радиуса $R > 0$ отделяет нормальный, гравитирующий по Ньютону газ от вакуума. В задаче о схлопывании одномерной полости предполагается, что газ находится снаружи, а внутри полости — вакуум (рис. 1).

Если внутри цилиндра находится газ, а снаружи — вакуум, то это задача о разлете газа (рис. 2).

При этом в момент $t = 0$ известны распределения параметров газа: $u = u_0(x)$ — скорость газа; $S = S_0(x)$ — энтропия; $\rho = \rho_0(x)$ — плотность газа, где x — расстояние до оси или центра симметрии. Функции u_0, S_0, ρ_0 предполагаются аналитическими, а плотность газа всюду больше нуля, в том числе $\rho_0(x)|_\Gamma > 0$. В момент $t = 0$ начинается движение газа, определяемое заданными распределениями u_0, S_0, ρ_0, и это движение в дальнейшем будем называть фоновым течением.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных иследований (грант № 08-01-00052).

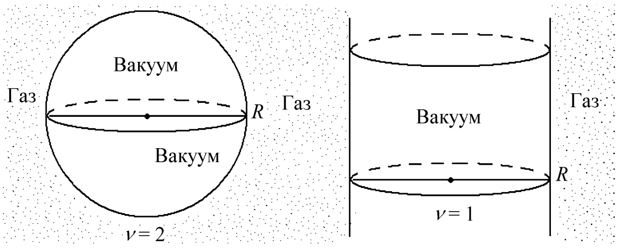

Рис. 1

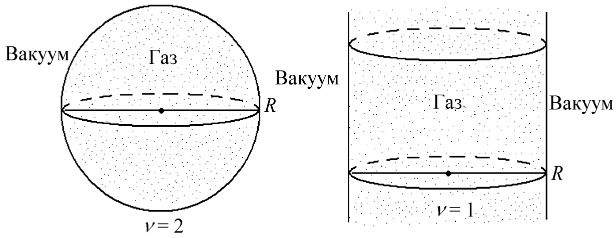

Рис. 2

Кроме этого, в момент $t = 0$ поверхность Γ мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум. Возмущения, возникшие в фоновом течении в результате мгновенного разрушения поверхности Γ, распространяются по газу в виде волны разрежения, отделенной от фонового течения границей Γ_1 — поверхностью слабого разрыва. С другой стороны, волна разрежения примыкает к вакууму: $\rho_0(x)|_{\Gamma_0} = 0$, где Γ_0 — свободная поверхность, отделяющая волну разрежения от вакуума. Требуется построить как фоновое течение, так и волну разрежения, а также найти законы движения Γ_1 и Γ_0. Таким образом, поставленная задача есть задача о распаде разрыва в случае, когда в начальный момент времени неподвижная стенка Γ отделяет газ от вакуума.

Одномерные течения рассматриваемого газа описываются системой [4]:

$$\begin{aligned} &\rho_t + \rho_x u + \rho\left(u_x + \nu\frac{u}{x}\right) = 0,\\ &u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = F(x,t),\\ &S_t + uS_x = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$F(x,t) = -2\nu\pi\frac{G}{x^\nu}\int\limits_a^x r^\nu\rho(r,t)dr, \quad G = 6,67\cdot10^{-11}\frac{H\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Здесь p — давление, G — гравитационная постоянная, ν — показатель симметрии ($\nu = 1$ — цилиндрическая; $\nu = 2$ — сферическая). Если газовый цилиндр (шар) разлетается, то $a = 0$. Если происходит схлопывание одномерной полости, то $a = x_0(t)$, где $x_0(t)$ — неизвестный закон движения свободной поверхности Γ_0.

Система (1.1) не является замкнутой, поскольку неизвестных функций четыре (ρ, u, S, p), а уравнений три. Поэтому необходимо задать уравнение состояния, определяющее термодинамическую природу газа. В работах [1, 5, 6] исследовано одномерное истечение в вакуум идеального политропного газа в условиях самогравитации с уравнением состояния

$$p = \frac{S^2\rho^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma = \text{const} > 1.$$

В работе [3] исследовались одномерные течения нормального газа с уравнением состояния, имеющим степенную особенность, без учета гравитации:

$$p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}f(\rho, S), \quad \gamma = \text{const} > 1.$$

В данной работе исследования будут проводиться для нормального газа в условиях самогравитации и с уравнением состояния

$$p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma} f(\rho, S), \quad \gamma = \text{const} > 1,$$

где $f(\rho, S)$ — аналитическая функция в некоторой области $\{0 \le \rho \le \rho^*, S_* < S < S^*\}$.

Для удобства дальнейшего исследования от системы интегродифференциальных уравнений (1.1) делается переход к системе дифференциальных уравнений путем введения дополнительной неизвестной функции $F(x, t)$. Дифференцируя F по t и x, учитывая уравнение неразрывности, получим, как и в [6], два дифференциальных уравнения для F:

$$F_x = -\frac{\nu}{x} F - 2\nu\pi\rho G, \qquad F_t = 2\nu\pi\rho G u. \tag{1.2}$$

Получившаяся система (1.1), (1.2) переопределена: пять уравнений для четырех неизвестных функций, однако перекрестным дифференцированием можно убедиться, что система (1.1), (1.2) совместна.

Для построения фонового течения необходимо для системы (1.1), (1.2) решить задачу Коши с начальными данными при $t = 0$:

$$\begin{gathered} u|_{t=0} = u_0(x), \quad S|_{t=0} = S_0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \\ F|_{t=0} = F_0(x) = -2\nu\pi \frac{G}{x^\nu} \int\limits_{a_0}^{x} r^\nu \rho_0(r) dr, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $a_0 = 0$, если газ разлетается; $a_0 = R$, если происходит схлопывание одномерной полости.

Если $\rho_0(x)$— аналитическая функция, то, как и в [6], можно показать, что $F_0(x)$ есть аналитическая функция, не имеющая особенностей при $x = 0$. Поскольку рассматриваемая система является системой типа Ковалевской, а начальные данные — аналитические функции, то задача Коши имеет [7] при малых t аналитическое решение, которое можно представить, например, в виде сходящихся рядов по степеням t с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями от x в окрестности точки $x = R$. Это решение в дальнейшем будем называть фоновым течением:

$$\rho = \rho_{00}(x, t), \quad u = u_{00}(x, t), \quad S = S_{00}(x, t), \quad F = F_{00}(x, t).$$

Зная фоновое течение, по стандартной методике [8] получаем уравнение звуковой характеристики как решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = u_{00} \pm c_{00}, \quad x(0) = R,$$

где $c_{00} = c^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$ — скорость звука фонового течения, однозначно определяемая по $\rho_{00}(x, t)$.

Последняя задача Коши имеет единственное аналитическое решение $x = x_1(t)$. Подставляя $x = x_1(t)$ в газодинамические параметры фонового течения, получаем условия на характеристике Γ_1:

$$\begin{gathered} \rho|_{\Gamma_1} = \rho_{00}(x_1(t), t) = \rho^0(t), \quad u|_{\Gamma_1} = u_{00}(x_1(t), t) = u^0(t), \\ S|_{\Gamma_1} = S_{00}(x_1(t), t) = S^0(t), \quad F|_{\Gamma_1} = F_{00}(x_1(t), t) = F^0(t). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Введем вспомогательную функцию

$$h_0(\rho, S) = \sqrt{\gamma f(\rho, S) + \rho f_\rho(\rho, S)}.$$

Дополнительно будем предполагать, что функция $h_0(\rho, S)$ аналитична в области $\{0 \le \rho \le \rho^0(0), S_* < S < S^*\}$.

Для построения волны разрежения сделаем, как и в [6], замену переменных: за независимые переменные возьмем t, ρ, а за неизвестные функции x, u, S, F. Якобиан такого преобразования $J = x_\rho$. В результате этой замены получим систему:

$$\begin{aligned}
&x_t = u + \rho\left(u_\rho + \nu x_\rho \frac{u}{x}\right),\\
&x_\rho u_t - \rho u_\rho^2 - \nu\rho x_\rho \frac{u}{x} u_\rho + \rho^{\gamma-2}h^2(\rho, S) + f_S \rho^{\gamma-1} S_\rho = x_\rho F,\\
&x_\rho S_t - \rho\left(u_\rho + \nu x_\rho \frac{u}{x}\right) S_\rho = 0,\\
&F_t = -\nu \frac{x_t}{x} F + 2\nu\pi G\rho(u - x_t).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Течение в области между Γ_1 и Γ_0 (в области волны разрежения) будем строить как решение системы (1.5) с данными (1.4) на характеристике Γ_1. Поскольку Γ_1 — характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [1]. Если бы поверхность Γ убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Если же поверхность Γ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных (ρ, t) служит [1] соотношение

$$x(0, \rho) = R. \tag{1.6}$$

Таким образом, для описания волны разрежения между Γ_1 и Γ_0 имеем начально-краевую задачу (1.4)–(1.6), которая в дальнейшем и будет называться задачей о распаде специального разрыва.

2. Построение волны разрежения

Теорема 2.1. *Существует $t_0 > 0$ такое, что при $0 < t < t_0$, $\rho_* \le \rho \le \rho^0(0)$ в некоторой окрестности Γ_1 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) о распаде специального разрыва.*

Доказательство теоремы состоит, как и в [6], в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [1]. Поскольку теорема 2.1 носит локальный характер, она не гарантирует, что $\rho = 0$ попадет в интервал $[\rho_*; \rho^0(0)]$ (рис. 3).

Для выяснения вопроса о том, входит ли поверхность Γ_0 $(\rho = 0)$ в область применимости решения задачи (1.4)–(1.6), разложим его в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t, \rho) = \begin{pmatrix} x \\ u \\ S \\ F \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ S_k \\ F_k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(\rho) \frac{t^k}{k!}, \tag{2.1}$$

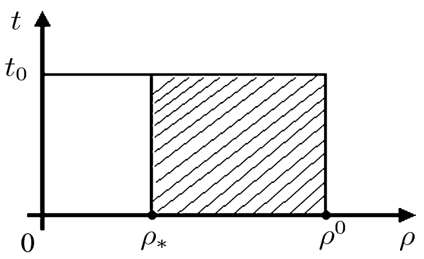

Рис. 3

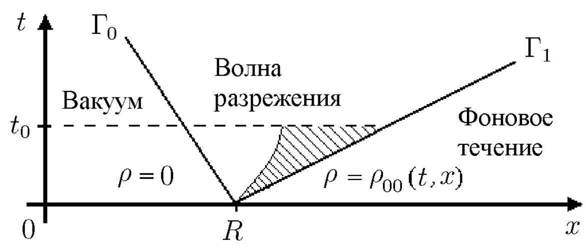

Рис. 4

что при малых t возможно в силу аналитичности решения задачи о распаде разрыва в некоторой окрестности Γ_1.

В физическом пространстве область сходимости ряда (2.1) по теореме 2.1 приведена на рис. 4.

Из начальных и граничных условий следует, что $x_0(\rho) = R$;

$$F_0(\rho) = F_0 = \begin{cases} 0 \ \text{ при схлопывании одномерной полости,} \\ -2\nu\pi \dfrac{G}{R^\nu} \int\limits_0^R r^\nu \rho_0(r) dr = \text{const} \neq 0 \ \text{ при разлете газа.} \end{cases}$$

В системе (1.5) положим $t = 0$, и, учитывая (1.6), будем иметь:

$$\begin{aligned} &1)\ x_1 = u_0 + \rho u_{0\rho}; \\ &2)\ -\rho u_{0\rho}^2 + \rho^{\gamma-2} h_0^2(\rho, S_0) + f_S \rho^{\gamma-1} S_{0\rho} = 0; \\ &3)\ S_{0\rho} u_{0\rho} = 0; \\ &4)\ F_1 = 2\nu\pi G\rho(u_0 - x_1) - \nu \frac{x_1}{x_0} F_0 \ \text{— при разлете газа;} \\ &5)\ F_1 = 2\nu\pi G\rho(u_0 - x_1) \ \text{— при схлопывании полости.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Интегрируя третье уравнение и преобразуя второе уравнение системы (2.2), получим

$$S_0 = S_0(R) = S_{00}(0) = \text{const},$$

$$u_{0\rho} = \pm \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \sqrt{\gamma f + \rho f_\rho} = \pm \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h_0(\rho, S_0) = \pm \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho).$$

Знак плюс в выражении для $u_{0\rho}$ выбирается при схлопывании одномерной полости, а знак минус — при разлете газа.

Проинтегрируем выражение для $u_{0\rho}$ на отрезке $0 \leq \rho \leq \rho^0$ $(\rho^0 = \rho^0(0))$ и после преобразований имеем

$$u_0 = u_{00} \pm \int\limits_{\rho^0}^{\rho} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho) d\rho = u_{00} \mp \int\limits_0^{\rho^0} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho) d\rho \pm \int\limits_0^{\rho} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho) d\rho.$$

Здесь и далее в получаемых формулах будем считать верхний знак в символах $\pm$, $\mp$ соответствующим схлопыванию одномерной полости, а нижний — разлету газа.

Вводя обозначения

$$u_* = u_0(x)|_\Gamma \mp \int\limits_0^{\rho^0} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho) d\rho, \quad H(\rho) = \frac{\int\limits_0^{\rho} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho) d\rho}{\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}},$$

будем иметь

$$u_0 = u_* \pm \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} H(\rho).$$

Как показано в [1], функции $f(\rho, S_0)$, $h(\rho)$, $\sqrt{h(\rho)}$, $1/\sqrt{h(\rho)}$, а также $H(\rho)$ являются аналитическими в области $0 \le \rho \le \rho^0$.

Для нахождения x_1, F_1 подставим полученные выражения в первое и четвертое уравнения системы (2.2):

$$x_1 = u_* - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} H(\rho) - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} h(\rho) = u_* - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} [h(\rho) + H(\rho)],$$

$$F_1 = -2\nu\pi G h(\rho) \rho \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \nu \frac{F_0}{x_0} \left[u_* - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} H(\rho) \right].$$

Получим выражение для $x_{1\rho}$. Для этого выразим $H'(\rho)$ через $h(\rho)$ и $H(\rho)$:

$$x_{1\rho} = \pm \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \left[\frac{\gamma+1}{2} h(\rho) + \rho h'(\rho) \right].$$

Окончательно имеем следующую структуру начальных коэффициентов рядов (2.1)

$$\begin{aligned}
&x_1 = u_* \pm \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} [h(\rho) + H(\rho)];\\
&u_0 = u_* \pm \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} H(\rho);\\
&S_0 = S_{00}(0);\\
&F_1 = \mp F_1(\rho) \rho \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \mp F_2(\rho) \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \gamma \frac{u_*}{R} F_0;\\
&u_{0\rho} = \pm \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} h(\rho);\\
&x_{1\rho} = \pm \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \left[\frac{\gamma+1}{2} h(\rho) + \rho h'(\rho) \right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $F_1(\rho)$, $F_2(\rho)$ — функции аналитические от ρ, с тем же радиусом сходимости, что и у $h(\rho)$.

Продифференцируем систему (1.5) по t, положим $t = 0$, и, учитывая (1.6) и ранее полученные выражения, имеем:

$$
\begin{aligned}
&1)\ x_2 = u_1 + \rho u_{1\rho} + \nu\rho x_{1\rho}\frac{u_0}{x_0};\\
&2)\ x_{1\rho}u_1 - 2\rho u_{0\rho}u_{1\rho} = \nu\rho x_{1\rho}\frac{u_0}{x_0}u_{0\rho} - 2\rho^{\gamma-2}h_0(\rho,S_0)h_{0S}(\rho,S_0)S_1-\\
&-f_S(\rho,S_0)\rho^{\gamma-1}S_{1\rho} + x_{1\rho}F_0;\\
&3)\ x_{1\rho}S_1 - \rho u_{0\rho}S_{1\rho} = 0;\\
&4)\ F_2 = 2\nu\pi G\rho(u_1 - x_2) - \nu\frac{x_1}{x_0}F_1 - \nu\frac{x_2x_0 - x_1^2}{x_0^2}F_0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Интегрируя третье уравнение системы (2.4), будем иметь

$$S_1 = S_{10}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}h(\rho).$$

Для интегрирования второго уравнения запишем его в следующем виде:

$$x_{1\rho}u_1 - 2\rho u_{0\rho}u_{1\rho} = G_{21}(\rho),$$

$$G_{21}(\rho) = \nu\rho x_{1\rho}\frac{u_0}{x_0}u_{0\rho} - 2\rho^{\gamma-2}h(\rho)h_S(\rho,s_0)s_1 - f_s\rho^{\gamma-1}s_{1\rho} + x_{1\rho}F_0.$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение

$$u_{1\rho} - \left[\frac{\gamma+1}{4\rho} + \frac{h'(\rho)}{2h(\rho)}\right]u_1 = -\frac{G_{21}(\rho)}{2\rho u_{0\rho}}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$u_1 = \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\sqrt{h(\rho)}(u_{10} + \int\limits_{\rho^0}^{\rho}\frac{-G_{21}(\rho)d\rho}{2\rho^{\frac{\gamma+1}{4}+1}u_{0\rho}\sqrt{h(\rho)}}).$$

После детального анализа в случае $\gamma \neq \dfrac{5}{3}$, $\gamma \neq 3$ получаем следующую структуру коэффициента $u_1(\rho)$:

$$u_1 = U_1(\rho)\rho^{\frac{\gamma+1}{4}} + U_2(\rho)\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + U_3(\rho)\rho^{\gamma-1} + \rho U_4(\rho) + d_1^2,$$

где $U_1(\rho),\ U_2(\rho),\ U_3(\rho),\ U_4(\rho)$ — некоторые аналитические функции, $d_1^2 = \mathrm{const} \neq 0$.

Если $\gamma = \dfrac{5}{3}$, то

$$u_1 = U_1(\rho)\rho^{\frac{2}{3}} + U_2(\rho)\rho^{\frac{1}{3}} + U_3(\rho)\ln(\rho)\rho^{\frac{2}{3}} + \rho U_4(\rho) + U_5(\rho)\rho^{\frac{5}{3}} + d_1^2.$$

Если $\gamma = 3$, то

$$u_1 = U_1(\rho)\rho + U_2(\rho)\ln(\rho)\rho + U_3(\rho)\rho^2 + U_4(\rho)\rho^3 + \rho U_5(\rho) + d_1^2.$$

Подставляя полученные выражения в первое и четвертое уравнения системы (2.4), определяем x_2 и F_2. Полученные выражения для $x_2(\rho)$ и $F_2(\rho)$ имеют такую же структуру, как и $u_1(\rho)$. Окончательно имеем

$$\mathbf{g}_1(\rho) = \begin{pmatrix} x_2 \\ u_1 \\ S_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}_1^1(\rho)\rho^{\frac{\gamma+1}{4}} + \mathbf{g}_1^2(\rho)\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + \mathbf{g}_1^3(\rho)\rho^{\gamma-1} + \rho\mathbf{g}_1^4(\rho) + \mathbf{d_1},$$

где $\mathbf{d}_1(\rho) = \begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_1^2 \\ d_1^3 \\ d_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \\ 0 \\ \gamma^2 \dfrac{u_*^2}{R^2} F_0 - \gamma \dfrac{F_0 R - u_*^2}{R^2} F_0 \end{pmatrix}.$

Далее система (1.5) дифференцируется k раз по t, полагается $t = 0$. Учитывая условие (1.6) и ранее полученные коэффициенты ряда (2.1), имеем

$$x_{k+1} = u_k + \rho u_{k\rho} + G_{1k}(\rho),$$

$$k x_{1\rho} u_k - 2\rho u_{0\rho} u_{k\rho} = G_{2k}(\rho),$$

$$k x_{1\rho} S_k - \rho u_{0\rho} S_{k\rho} = G_{3k}(\rho),$$

$$F_{k+1} = G_{4k}(\rho).$$

Здесь G_{1k}, G_{2k}, G_{3k}, G_{4k} — функции, известным образом зависящие от x_{l+1}, u_l, S_l, F_{l+1} $(l < k)$. Их вид из-за громоздкости не приводится. Интегрируя третье и второе уравнения системы, будем иметь

$$u_k = \rho^{\frac{\gamma+1}{4}k}[\sqrt{h(\rho)}]^k \left[u_{k0} - \frac{1}{2}\int\limits_{\rho_0}^{\rho} G_{2k}(\rho)\rho^{-\frac{\gamma-1}{2}(\alpha k+1)}[h(\rho)]^{-\frac{k}{2}-1} d\rho \right],$$

$$S_k = \rho^{\frac{\gamma+1}{2}k} h^k(\rho) \left[S_{k0} - \int\limits_{\rho_0}^{\rho} G_{3k}(\rho)\rho^{-\frac{\gamma-1}{2}(2\alpha k+1)}[h(\rho)]^{-k-1} d\rho \right], \quad \alpha = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}.$$

Произвольные постоянные u_{k0}, S_{k0} определяются при помощи условий (1.4).

Лемма 2.1. *Коэффициенты рядов (2.1) для $k > 1$ имеют вид*

$$x_{k+1} = d_k^1 + P_k^1\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right), \quad S_k = P_k^3\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right),$$

$$u_k = d_k^2 + P_k^2\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right), \quad F_{k+1} = d_k^4 + P_k^4\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right)$$

— при разлете газа,

$$x_{k+1} = P_k^1\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right), \quad S_k = P_k^3\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right),$$

$$u_k = P_k^2\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right), \quad F_{k+1} = P_k^4\left(\rho, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \rho^{\frac{\gamma+1}{4}}\ln\rho\right)$$

— при схлопывании одномерной полости, здесь P_k^i — многочлены от указанных аргументов степени не выше Ak, коэффициенты которых являются аналитическими функциями от ρ с областью сходимости $\{0 \le \rho \ \le \rho^0(0)\}$. Причем $\lim_{\rho\to 0} P_k = 0$.

Доказательство леммы аналогично соответствующему доказательству из [1, 6] и проводится индукцией по k. Сначала доказывается, что $G_{lk}(\rho)$ обладают нужной структурой, а затем непосредственным интегрированием выясняется, что $x_{k+1}, u_k, S_k, F_{k+1}$ обладают указанной структурой. На основании леммы можно утверждать, что структура решения в задаче о разлете газа следующая:

$$u = U^0(t) + U^1(t,\rho), \quad x = x^0(t) + x^1(t,\rho),$$

$$F = F^0(t) + F^1(t,\rho), \quad S = S^1(t,\rho) + S_{00}(0),$$

где

$$x^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^1 \frac{t^k}{k!}, \quad U^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^2 \frac{t^k}{k!}, \quad F^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^4 \frac{t^k}{k!}. \tag{2.5}$$

Причем $\lim_{\rho\to 0} x^1(t,\rho) = 0,\ \lim_{\rho\to 0} U^1(t,\rho) = 0,\ \lim_{\rho\to 0} S^1(t,\rho) = 0,\ \lim_{\rho\to 0} F^1(t,\rho) = 0.$

Для $U^0(t)$, $x^0(t)$, $F^0(t)$ справедлива следующая

Лемма 2.2. *Ряды (2.5) являются решением вспомогательной задачи*

$$\begin{array}{ll} x_t^0 = U^0, & x^0(0) = R, \\ U_t^0 = F^0, & U^0(0) = u_*, \\ F_t^0 = -\dfrac{\nu}{x} U^0 F^0, & F^0(0) = F_0, \end{array} \tag{2.6}$$

где u_*, F_0 берутся из решения задачи о распаде разрыва (1.4)–(1.6).

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (2.6) и сравнением полученных рядов с рядами (2.5). Ряды оказываются равными.

Система (2.6) не имеет особенностей ($x(0) = R > 0$), поэтому задача (2.6) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами (2.5). Следовательно, ряды (2.5) сходятся.

На основании приведенных лемм доказывается следующая

Теорема 2.2. *При $0 \le t < t^*$ область сходимости рядов (2.1), а также рядов $\mathbf{f}_t$, $\rho\mathbf{f}_\rho$ покрывает всю зону течения от Γ_1 до Γ_0 включительно. При этом закон движения свободной поверхности при разлете газа определяется из решения вспомогательной задачи (2.6). При схлопывании одномерной полости свободная поверхность движется с постоянной скоростью u_*.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [6] и проводится по методике [1], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной. При доказательстве используются теорема 2.1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда. Поскольку ряды (2.1) локально сходятся, а коэффициенты рядов многочлены от ρ, $\rho^{\frac{\gamma+1}{4}} \ln\rho$, $\rho^{\frac{\gamma+1}{4}}$, $\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ и степени многочленов не выше Ak, то, как и в [1], доказывается, что существует постоянная $M > 0$ такая, что ряды (2.1) сходятся в области

$$\xi = \max\nolimits_{\rho\in[0;\ \rho^0]} \left\{\rho,\ |\rho^{\frac{\gamma+1}{4}} \ln\rho|,\ \rho^{\frac{\gamma+1}{4}},\ \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}\right\},$$

$$M\xi|t| < 1.$$

Из последнего неравенства находится t^*.

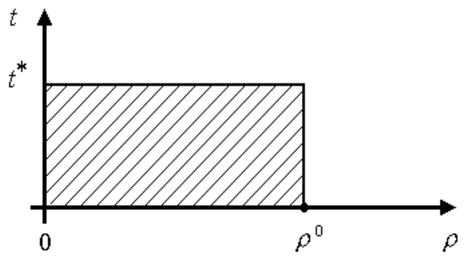

Рис. 5

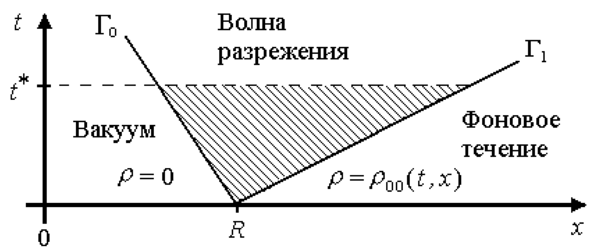

Рис. 6

Поэтому точка $\rho = 0$, определяющая закон движения свободной поверхности Γ_0, включается в область сходимости рядов (2.1) (рис. 5).

В физическом пространстве область сходимости рядов выглядит так, как показано на рис. 6.

Таким образом, на основании теоремы 2.2 получено решение задачи о распаде специального разрыва в виде рядов (2.1), сходящихся во всей области волны разрежения от Γ_1 до Γ_0 включительно, а также установлены законы движения свободной поверхности.

3. Условия нормальности газа с уравнением состояния, содержащим логарифмическую особенность

В заключение работы рассмотрим еще одно уравнение состояния, предлагаемое физиками для описания нормального газа [9].

Уравнение состояния газа имеет одновременно и логарифмическую, и степенную особенности:

$$p = \rho^{\gamma} \ln \rho \; f(\rho, S), \quad \gamma = \text{const} > 1.$$

Исследуем газ с таким уравнением состояния на нормальность.

В настоящее время используются два определения нормального газа, различающиеся фактически только в одном моменте [8, 10]. Первое определение нормальности газа — по Овсянникову [8]:

$$p > 0, \quad p_{\rho} > 0, \quad p_{\rho\rho} > 0. \tag{3.1}$$

Во втором определении нормального газа, по Вейлю [10], третье неравенство из условий (3.1) имеет иной вид:

$$2p_{\rho} + \rho p_{\rho\rho} > 0. \tag{3.2}$$

Различие в определениях имеет газодинамическую природу. У нормального газа, удовлетворяющего условиям (3.1), скорость звука монотонно возрастает с ростом плотности. Если условия (3.1) не выполняются, но выполняются условия (3.2), то газ остается нормальным, по терминологии Вейля, несмотря на то, что скорость звука становится немонотонной функцией от ρ.

Рассмотрим частный случай уравнения состояния, когда $f(\rho, S) = \text{const}$. Поскольку на интервале $(0, 1)$ $\ln \rho < 0$, то в силу условий (3.1) – $f(\rho, S) < 0$. Пусть $f(\rho, S) = -a^2$, тогда p_{ρ} будет иметь вид

$$p_{\rho} = a^2 \rho^{\gamma - 1}(-\gamma \ln \rho - 1).$$

Это выражение будет больше нуля на интервале $\left(0; e^{-\frac{1}{\gamma}}\right)$.

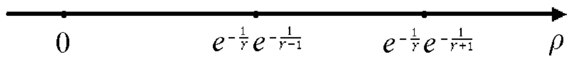

Рис. 7

Вычисляя $p_{\rho\rho}$, получим

$$p_{\rho\rho} = a^2\rho^{\gamma-2}[-\gamma(\gamma-1)\ln\rho + 1 - 2\gamma].$$

Тогда $p_{\rho\rho} > 0$ на интервале $\left(0; e^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{1}{(\gamma-1)}}\right)$.

Первый интервал в предельном случае, когда $\gamma = 1$, имеет вид $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$, при увеличении $\gamma(\gamma > 1)$ его правая граница тоже увеличивается. Второй интервал существенно меньше, чем первый, и в предельном случае, когда $\gamma = 1$, исчезает. Таким образом, при $\gamma > 1$ существует интервал нормальности газа с монотонной скоростью звука, но при $\gamma \to 1 + 0$ он практически исчезает.

Найдем интервал значений плотности газа, на котором выполняются условия (3.2), т. е.

$$a^2\rho^{\gamma-1}[2(-\gamma\ln\rho - 1) - \gamma(\gamma-1)\ln\rho + 1 - 2\gamma] > 0.$$

Приводя подобные, получим

$$a^2\rho^{\gamma-1}[-\gamma(\gamma+1)\ln\rho - 1 - 2\gamma] > 0.$$

Решая неравенство, получаем искомый интервал $(0; e^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{1}{(\gamma+1)}})$ (рис. 7). В предельном случае, когда $\gamma = 1$, интервал имеет вид $\left(0; \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)$, при увеличении $\gamma(\gamma > 1)$ его правая граница тоже увеличивается.

Замечание 3.1. В случае газа с монотонной скоростью звука в зависимости от ρ, не задав конкретного значения $\gamma(\gamma > 1)$, нельзя выбрать начальное значение $\rho^0(0)$.

Замечание 3.2. В случае газа с немонотонной скоростью звука при постановке задачи заведомо можно взять $\rho^0(0)$ из интервала $\left(0; \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)$.

Выводы

Нормальный газ, имеющий логарифмическую особенность в уравнении состояния, является разреженным газом: $\left(\rho^0(0) \in \left(0; \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)\right)$. В работах [1, 6] показано, что гравитация начинает сказываться, если газ имеет очень большую плотность ($\rho \sim 10^{11}$). Поэтому использование уравнения состояния с логарифмической особенностью для газа, гравитирующего по Ньютону, не приводит к содержательным результатам.

Все полученные в статье результаты доказаны строго, но носят локальный характер. Поэтому они не учитывают особенностей, возможно, возникающих в средней части течения.

Авторы благодарят С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

Список литературы

[1] Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.

[2] Баутин С.П., Дерябин С.Л. Аналитическое моделирование истечения идеального газа в вакуум // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 77–120.

[3] Баутин С.П., Дерябин С.Л. Задача об истечении в вакуум нормального газа // Динамика сплошной среды. 1993. Вып. 107. С. 26–38.

[4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.

[5] Дерябин С.Л., Чуев Н.П. Сферически симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум// Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, Вып. 2. С. 77–84.

[6] Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.

[7] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

[8] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 2003. 368 с.

[9] Фортов В.Е. и др. Ударные волны и экстремальные состояния вещества. М.: Наука, 2000. 410 с.

[10] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 529 с.

Поступила в редакцию 2 декабря 2008 г.