Точная релаксация с учетом невязки

С. Е. Михеев, В. С. Михеев
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
e-mail: miheev@apmath.spbu.ru

Точные релаксации, использующие дополнительную информацию о расположении искомого решения и невязке, могут улучшить сходимость итеративных методов, которые представимы в виде метода простой итерации (в частности, метода Ньютона решения системы нелинейных уравнений). Формулы для таких релаксаций получаются минимизацией максимума оценок погрешностей следующей итерации, а использование невязки состоит в выборе лучшего по невязке приближения из двух: того, что выдает базовый алгоритм, и того, что выдает точная релаксация этого алгоритма.

Ключевые слова: сходимость, скорость сходимости, итерация, метод Ньютона, ускорение сходимости, невязка.

1. Описание

Рассматривается итеративный поиск решения α уравнения

$$g(x) = 0 \tag{1}$$

методом простой итерации с базовым алгоритмом A:

$$x^* := A(x). \tag{2}$$

Здесь x — текущее приближение, индексом "*" отмечаются величины, относящиеся к последующему шагу. Начальная точка x_0 выбирается так, чтобы обеспечить сходимость.

Если известна оценка вида

$$\|A(x) - \alpha\| \leq c\|x - \alpha\|^p, \tag{3}$$

где $p \geq 1,\ c > 0$ и α — искомое решение: $g(\alpha) = 0$, то с помощью точной релаксации (ТР) можно модифицировать (2) для улучшения сходимости итерационного процесса [1, 2].

Изложим ТР применительно к скалярному случаю с произвольным алгоритмом A и при наличии информации (3). Будем отмечать индексом "T" величины, относящиеся к ТР. Пусть d — оценка текущей погрешности.

Точная релаксация есть модификация алгоритма A, полученная с помощью следующего принципа минимальности (ПМ).

Пусть относительно метода простой итерации $x^* := A(x)$ известна некоторая информация I, состоящая как из стационарной части (например (3)), так и пошаговой, куда обязательно включается оценка d текущей погрешности. Согласно информации I и паре $(x, A(x))$ строится допустимое множество решений $M = M(x, A(x), I)$.

Последующую итерацию x^*_T следует выбирать так, чтобы при наличии величин $A(x_T)$, x_T и M_T оценка погрешности d^*_T итерации x^*_T была минимальна. Иными словами, если $\Delta(v) := \max_{z \in M_T} |v - z|$, то

$$x^*_T = \arg\min_{v \in R^1} \Delta(v), \quad d^*_T = \Delta(x^*_T).$$

Обозначим содержащийся в ПМ алгоритм для вычисления x^*_T через $\mathcal{T}$, а алгоритм для вычисления d^*_T (также из ПМ) — через $\mathcal{T}_d$, и пусть $I = d$. Тогда ТР можно придать вид простой итерации:

$$\begin{cases} x^*_T := \mathcal{T}(x_T, A, d_T), \\ d^*_T := \mathcal{T}_d(x_T, A, d_T). \end{cases}$$

Итерации с ТР алгоритма A именуется методом точной релаксаци с алгоритмом A.

Отдельные итерации метода точной релаксаци с алгоритмом A могут хуже приближать к решению в сравнении с итерациями базового алгоритма A, но оценка погрешности всегда будет лучше, и в целом сходимость итераций с ТР алгоритма A стабильнее и быстрее, чем простые итерации (2).

В 2007 году профессор СПбГУ В.Ф. Демьянов для придания еще большей скорости сходимости и стабильности итеративного процесса предложил оптимизировать его по двум критериям: малости последующей невязки и оценки погрешности с приоритетом первой. Алгоритмическую реализацию этой идеи далее будем именовать модификацией точной релаксации (МТР).

Практическая эффективность ТР была проверена в скалярном случае [2] для модифицированного (упрощенного) метода Ньютона $x^* := x - g(x)/g'(x_0)$, обладающего линейной сходимостью ($p = 1$). В этой статье будет исследована сравнительная эффективность ТР и МТР для обычного метода Ньютона (МН) в скалярном случае:

$$x^* := x - g(x)/g'(x) := A(x). \tag{4}$$

Метод Ньютона, в отличие от упрощенного метода, имеет квадратичную сходимость ($p = 2$). И в этом есть свой интерес. Будут ли при такой быстрой сходимости какие-либо плюсы в применении ТР?

Далее аббревиатуры ТР и МТР будут использоваться самостоятельно без указания на базовый алгоритм, под ним будет подразумеваться только ньютоновский (4).

2. Расчетные формулы

Если производная g' липшицева с константой L в рассматриваемой области (выпуклой оболочки всех итеративных точек и решения α), то для ньютоновских итераций (4) справедлива оценка (3) и известно, что там $c \leq L\|(g'(x))^{-1}\|/2$.

Расчетные формулы ТР для $I = \{(3), d\}$ в скалярном случае (индекс "T" для простоты записи в них опущен) следуют ниже:

$$\mathbf{r} := A(x) - x, \quad r := |r|, \quad \sigma := \operatorname{sgn} \frac{g(x)}{g'(x)}, \quad \gamma_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4rc}}{2c}, \quad \gamma_{2,3} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4rc}}{2c}. \tag{5}$$

Точная релаксация в случае $4rc \geq 1$, а также в случаях $d \geq \gamma_3$ и $d \leq \gamma_2$ при произвольном x имеет вид

$$\begin{cases} x^* = x + \dfrac{\gamma_1 + d}{\sigma 2} = x + \sigma\left(\dfrac{d}{2} - \dfrac{1-\sqrt{1+4rc}}{4c}\right), \\ d_* = \dfrac{d-\gamma_1}{2} = \dfrac{d}{2} + \dfrac{1-\sqrt{1+4rc}}{4c}; \end{cases} \tag{6}$$

в других случаях, т. е. когда $4rc < 1 \ \wedge \ d \in (\gamma_2, \gamma_3)$,

$$\begin{cases} x^* = x + \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{\sigma 2} r = x + \dfrac{\sqrt{1+4rc} - \sqrt{1-4rc}}{\sigma 4c}, \\ d_* = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{1-4rc} - \sqrt{1+4rc}}{4c}. \end{cases} \tag{7}$$

Конкретно [3] для ТР с алгоритмом A из (4):

$$\rho := 1/|g'(x)|, \quad P_{\text{к}} := L|g(x)|\rho^2, \quad \sigma := \operatorname{sgn}\frac{g(x)}{g'(x)}, \quad t := \sqrt{1+2P_{\text{к}}}, \quad T := \sqrt{1-2P_{\text{к}}};$$

если $P_{\text{к}} \leq 1/2 \ \wedge \ 1 - T \leq L\rho d$, то

$$x^* := x + \frac{T-t}{\sigma 2L\rho}, \quad d^* := \frac{2-t-T}{2L\rho}; \tag{8}$$

если $P_{\text{к}} > 1/2 \ \vee \ (P_{\text{к}} \leq 1/2 \ \wedge \ 1 - T > L\rho d)$, то

$$x^* := x + \frac{1-t-L\rho d}{\sigma 2L\rho}, \quad d^* := \frac{L\rho d - t + 1}{2L\rho}. \tag{9}$$

Перейдем к расчетным формулам для МТР. Будем отмечать индексом “M” величины, относящиеся к МТР. Тогда в таких обозначениях после получения ТР для $x_{\text{м}}$ будут известны величины

$$m = A(x_{\text{м}}), \quad \mu = \mathcal{T}(x_{\text{м}}, A, d_{\text{м}}). \tag{10}$$

Вычислим $g(m)$ и $g(\mu)$. В качестве следующей итерации МТР выберем из $\{m, \mu\}$ ту точку, для которой значение $\|g\|$ меньше. Иными словами:

$$\|g(\mu)\| \leq \|g(m)\| \implies x^*_{\text{м}} := \mu, \quad d^*_{\text{м}} := \mathcal{T}_d(x_{\text{м}}, A, d_{\text{м}}), \tag{11}$$

$$\|g(\mu)\| > \|g(m)\| \implies x^*_{\text{м}} := m, \quad d^*_{\text{м}} := Ld^2_{\text{м}}/2\|g'(x_{\text{м}})\|. \tag{12}$$

В скалярном случае можно добиться еще лучшего. Будем полагать, что относительно функции g выполнены обеспечивающие корректность всех ньютоновских итераций

Предположения 1. Функция g имеет корень α, монотонна на луче ℓ, выходящем из x^0 в направлении α, имеет на ℓ липшицеву производную с константой L, под $g'(x^0)$ понимается соответствующий односторонний предел производной g'. Значения g' отличны от нуля во всех точках ℓ помимо, может быть, α.

Заметим, что согласно предположениям 1 множество решений не пусто и является либо точкой, либо отрезком.

Выведем расчетные формулы МТР методом Ньютона в предположениях 1 и при наличии оценки d, добытой тем или иным способом. Как поступить при отсутствии этой информации, обсудим позднее.

В некоторых случаях предположения 1 позволяют сравнить по модулю величины $g(m)$ и $g(\mu)$, вычисляя лишь одну из них. Согласно тому, какая из них будет вычисляться сразу после ТР, возможны два сравнительно равноправных варианта. Здесь первой будет $g(m)$. Построение алгоритма, когда первая $g(\mu)$, — аналогично.

Как бы то ни было, когда значения невязки для ньютоновской итерации (НИ) больше, чем для ТР, расчетные формулы следующего приближения и оценки его погрешности для МТР совпадают с таковыми для ТР, т.е. с (6), (7) или с (8), (9). В противных случаях следующим приближением надо назначить $x_{\text{м}}^* := m$, что очевидно, а для оценки его погрешности использовать одну из формул (13)–(18).

Итак, опишем дополнительные к ТР операции, которые превращают ее в МТР.

Случай 1, а. $g(m)g(x_{\text{м}}) < 0 \ \wedge \ r \leq |\mu - x_{\text{м}}|$.

Вычисляется $g(m)$.

Ньютоновская итерация лучше ТР по погрешности и по невязке. Оценкой удаленности корня будет

$$d_{\text{м}}^* := r - \gamma_1 \equiv \frac{2rc + 1 - \sqrt{1 + 4rc}}{2c}. \tag{13}$$

Случай 1, б. $g(m)g(x_{\text{м}}) < 0 \ \wedge \ r > |\mu - x_{\text{м}}|$.

Вычисляется $g(\mu)$.

Ньютоновская итерация, если $g(\mu)$ *одного знака с* $g(x_{\text{м}})$, *может оказаться лучше по невязке, чем ТР. В этом случае оценкой удаленности НИ от корня будет*

$$d_{\text{м}}^* := r - |\mu - x_{\text{м}}|, \tag{14}$$

а если $|g(\mu)| < |g(m)|$, *можно улучшить оценку погрешности для* $x_{\text{м}}^* := \mu$:

$$d_{\text{м}}^* := \min(d_{\text{м}}^*, |m - \mu|) \equiv \min(d_{\text{м}} - |\mu - x_{\text{м}}|, |m - \mu|). \tag{15}$$

(Для сравнения ТР и НИ по погрешности в случае 1, б недостаточно информации.)

Случай 2, а. $g(m)g(x_{\text{м}}) > 0 \ \wedge \ r \geq |\mu - x_{\text{м}}|$.

Ньютоновская итерация лучше ТР по погрешности и по невязке. Оценкой удаленности корня будет

$$d_{\text{м}}^* := \begin{cases} d_{\text{м}} - r, & 1 < 4rc, \\ \min(d_{\text{м}} - r, \gamma_2 - r), & 1 \geq 4rc. \end{cases} \tag{16}$$

Случай 2, б. $g(m)g(x_{\text{м}}) > 0 \ \wedge \ r < |\mu - x_{\text{м}}|$.

Вычисляется $g(\mu)$.

Ньютоновская итерация, если $g(\mu)$ *противоположного знака с* $g(x_{\text{м}})$, *может оказаться лучше по невязке, чем ТР. В этом случае оценкой удаленности НИ от корня будет*

$$d_{\text{м}}^* := |\mu - x_{\text{м}}| - r, \tag{17}$$

а если $|g(\mu)| < |g(m)|$, *можно улучшить оценку погрешности для* $x^*_{\text{м}} := \mu$:

$$d^*_{\text{м}} := |m - \mu|. \tag{18}$$

(Для сравнения ТР и НИ по погрешности в случае 2, б недостаточно информации.)

Нетрудно заметить, что МТР обходится не более чем в одно вычисление значения функции g на каждом шаге, начиная со второго, в дополнение к тем арифметическим операциям, которые расходуются на ТР (в скалярном случае см. (5)–(7)). Плюс к этому возможны еще две-три арифметических операции согласно (13)–(18) (в (13) r, γ_1 уже известны, поэтому там — только одна операция). Отметим также, что когда приближения по ТР и МТР совпадают, в МТР всегда вычисляется дополнительно одно значение функции g, но этот труд не совсем напрасен, ибо оценка погрешности МТР в общем случае оказывается лучше, чем ТР (см. (14) и (17)).

В многомерном случае удельные дополнительные (к ТР) расходы на МТР снижаются примерно пропорционально квадрату размерности пространства, что связано с повышением трудоемкости вычисления значений матрицы Якоби g' относительно вычисления значений g.

3. Сходимость

Сходимость ТР и МТР с ньютоновским базовым алгоритмом в многомерном случае извлекается из полуглобальной теоремы Канторовича [4] (теорема 6, §1, гл. XVIII с учетом замечания 1 к ней) или из локальной теоремы Мысовских [5] (теорема 3). Оба этих утверждения используют оценку в некоторой выпуклой области, где должны находится ньютоновские итерации, нормы второй производной: $\|g''(x)\| \le L$, что легко ослабляется до липшицевости первой производной (относительно теоремы Канторовича см., например, [6, 7]).

В условиях теоремы Мысовских малость погрешности начального приближения, гарантирующая сходимость МН, имеет вид $P_{\text{м}} := Ld_0\|(g'(x_0))^{-1}\| < 2/3$. ТР и МТР гарантированно сходятся, если в качестве начальных приближений взять именно точку x_0 и оценку d_0. (В статье, находящейся в печати, авторами показано, что по крайней мере в скалярном случае МН гарантированно сходится при $p \le 1$.)

В условиях теоремы Канторовича малость начальной невязки, гарантирующая сходимость МН, имеет вид

$$P_{\text{к}} \equiv L\|(g(x_0))\|\|(g'(x_0))^{-1}\|^2 \le 1/2, \tag{19}$$

и при этом справедлива оценка начальной погрешности

$$d_{\text{к}} := \frac{1 - \sqrt{1 - 2P_{\text{к}}}}{L\|(g'(x_0))^{-1}\|}. \tag{20}$$

ТР и МТР гарантированно сходятся, если начальное приближение удовлетворяет (19) и его погрешность вычислена по (20).

В скалярном случае о сходимости ТР и МТР можно сказать значительно больше. Отметим, что формулы (8) и, тем более, (9) обеспечивают меньшую оценку погрешности d^* последующего приближения x^*, чем итерация по МН. Это есть элементарное следствие ПМ, на котором базируется ТР. Кроме того, можно показать, что для сходимости МН условие $P_{\text{м}} \le 1$ не только достаточно, но и необходимо в таком смысле: для любого $P_{\scriptscriptstyle M} > 1$ найдутся гладкая g и x_0, такие, что $L\|x_0 - \alpha\|\|(g'(x_0))^{-1}\| = P_{\scriptscriptstyle M}$ и МН расходится или зацикливается, причем в качестве L выбирается минимально возможная константа Липшица для g'.

Отсюда очевидно вытекает необходимое условие расходимости или зацикливания МН: $Q_{\scriptscriptstyle M} := L\|x_0 - \alpha\|\|(g'(x_0))^{-1}\| > 1$, где L — некоторая константа Липшица для g' на выпуклой оболочке ньютоновских итераций.

Независимо от происхождения оценки d формулы (8), (9) обеспечат ее уменьшение более чем в два раза. Отсюда — глобальная сходимость ТР с ньютоновским алгоритмом для любой функции, удовлетворяющей предположениям 1.

То же верно и для МТР, ибо по построению она обеспечивает еще большее уменьшение оценки погрешности на каждом шаге.

Перейдем теперь к случаю отсутствия оценки начальной погрешности и не выполнения условия $P_{\scriptscriptstyle K} \leq 1/2$ (оно позволяет применить (20)).

ТР и МТР в предположениях 1, как уже говорилось, глобально сходятся при любой оценке начальной погрешности. Поэтому получение какой-либо грубой оценки погрешности, которая позволила бы начать сходящийся итеративный процесс с ТР и МТР, совсем не затруднительно. Есть, однако, более эффективный выход из ситуации. Оказывается, конечное число ньютоновских итераций обеспечивает либо поиск приближенного к α решения, либо появление оценки погрешности, с которой можно начать метод ТР или МТР.

Теорема 1 [3]. *Пусть относительно g выполнены предположения 1 и $P_{\scriptscriptstyle K}(x) > 1/2$. Тогда за конечное число шагов N ньютоновские итерации, монотонно удаляясь от начальной точки в направлении корня,*

а) либо обеспечат $g(x^*) < \varepsilon$, где ε — заранее заданное положительное число;

б) либо изменят знак функции: $g(x)g(x^*) < 0$;

в) либо обеспечат $P_{\scriptscriptstyle K}(x) \leq 1/2$;

г) либо одновременно создадут несколько предыдущих событий.

Число N можно априори оценить сверху по $g(x_0)$, L, d_0, где d_0 — оценка начальной погрешности: $N \leq 8L[d + g(x_0)]/9(L\varepsilon)^{2/3}$.

Перейдем к сравнительной иллюстрации итеративных процессов МН, метода ТР с алгоритмом A и метода МТР с алгоритмом A в скалярном случае.

4. Численные эксперименты

Первые девять примеров иллюстрируют улучшение сходимости как в ТР, так и в МТР сравнительно с МН. В 10-м примере — хорошая сходимость ТР и МТР при расходимости МН. Во всех рассмотренных далее примерах $g(0) = 0$, т. е. $\alpha = 0$. Начальные точки выбирались одинаковыми для МН, ТР и МТР. С одной функцией проводились три эксперимента с различными оценками начальной погрешности. В качестве константы Липшица L брался максимум значений $|g''|$ на отрезке $[x_0 - d, x_0 + d]$.

В первых трех примерах выполнялось необходимое условие расходимости МН: $Q_{\text{М}} \approx 1.01 > 1$, однако МН сходился. В примерах 4–8 выполнялось достаточное условие сходимости МН: $Q_{\text{М}} \leq 1$ ($Q_{\text{М}}$ — *разновидность* $P_{\text{М}}$). В примере 10 $Q_{\text{М}} > 1$ и МН расходится, а ТР и МТР сходятся.

Текущие оценки погрешности для МН вычислялись итеративно с переменным c по формулам $c := L/2|g'(x)|$, $d_N^* := cd^2$.

Пример 1. $g(x) = \frac{1}{3}e^{x/3} - 1$, $Q_M \approx 1.01$, $P_M \approx 1.18$.

Вычисления прерваны на 4-м шаге, после обнуления d_M. Оценки дальности ТР и МТР оказались равными: $d_N > d_M = d_T$. По невязке такие же результаты: $f_N > f_T = f_M$. В отличие от МН как ТР, так и МТР могут быть чувствительны к вычислительным погрешностям вычислений вблизи искомого корня. Поэтому для них желательно предусматривать своевременную остановку итеративного процесса по достижении заданной точности.

Пример 2. $g(x) = \frac{1}{3}e^{x/3} - 1$, $Q_M \approx 1.01$, $P_M \approx 1.18$.

Вычисления прерваны на 5-м шаге, после обнуления d_T. Лучше всех по оценке погрешности результат показала МТР. Обе ТР и МТР лучше МН: $d_N > d_T > d_M$. Аналогичные результаты по невязке: $f_N > f_T > f_M$.

Пример 3. $g(x) = \frac{1}{3}e^{x/3} - 1$ $Q_M \approx 1.01$, $P_M \approx 2.36$.

Вычисления прерваны на 5-м шаге, после обнуления d_T. Здесь уже МТР однозначно опережает по оценке погрешности и ТР, и МН: $d_N > d_T > d_M$. Значения невязки у обычной ТР оказались хуже, чем у МН. Но МТР, естественно, не уступила МН: $f_T > f_N > f_M$.

Пример 4. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 6x + 5}$, $Q_M \approx 0.65$, $P_M \approx 0.689$.

Заданный порядок точности был достигнут на 4-м шаге. По оценке погрешности наблюдается убедительное преимущество ТР и еще большее МТР: $d_N > d_T > d_M$. Такой же расклад по невязке: $f_N > f_T > f_M$.

Пример 5. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 6x + 5}$, $Q_M \approx 0.65$, $P_M \approx 0.82$.

Вычисления прерваны на 4-м шаге, после обнуления d_T. По оценке погрешности МТР оказалась такой же, как и ТР: $d_N > d_M = d_T$. По невязке аналогично: $f_N > f_T = f_M$.

Пример 6. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 6x + 5}$, $Q_M \approx 0.65$, $P_M \approx 1.37$.

Вычисления прерваны на 5-м шаге, после обнуления d_T. При двухкратном увеличении начальной оценки дальности решения МТР вышла в лидеры по оценке текущей погрешности: $d_N > d_T > d_M$. По невязке обычная ТР оказалась чуть хуже МН. Но МТР, естественно, не уступила МН: $f_T > f_N > f_M$.

Пример 7. $g(x) = x + \sin x$, $Q_M \approx 0.26$, $P_M \approx 0.28$.

Вычисления прерваны на 3-м шаге, после обнуления d_T.

Пример 8. $g(x) = x + \sin x$, $Q_M \approx 0.26$, $P_M \approx 0.33$.

Вычисления прерваны на 3-м шаге, после обнуления d_T.

Пример 9. $g(x) = x + \sin x$, $Q_M \approx 0.26$, $P_M \approx 0.55$.

Вычисления прерваны на 3-м шаге, после обнуления d_T.

Пример 10. $g(x) = (1 - e^{-|x|}) \operatorname{sgn} x$, $Q_M \approx 4.77$, $P_M \approx 16.14$.

Здесь начальная точка такова, что МН расходится. Естественно, что $P_M > 1$. Расчеты прерваны на 5-м шаге, так как вычисления значений производной $g'(x_N)$ давало машинный ноль, т. е. не было возможности сделать итерацию по МН. В то же время как ТР, так и МТР хорошо сходились и можно было бы улучшить точность еще на несколько порядков.

Интересно, что характерный параметр перед тем, как начать монотонно стремиться к нулю, вначале возрастал.

ТР: 4.77, 5.50, 0.025, 0.00029, $4.37 \cdot 10^{-8}$.

МТР: 4.77, 5.38, 0.021, 0.00020, $2.07 \cdot 10^{-8}$.

Т а б л и ц а 1. Пример 1. $g(x) = \dfrac{1}{3}e^{x/3} - 1,\ Q_М \approx 1.01,\ P_М \approx 1.18$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	−1.000e+00	−1.000e+00	−1.000e+00	−2.835e-01	−2.835e-01	−2.835e-01	1.166e+00	1.166e+00	1.166e+00
1	1.868e-01	1.754e-04	1.754e-04	6.424e-02	5.846e-05	5.846e-05	6.883e-01	1.658e-01	1.658e-01
2	5.696e-03	5.124e-09	5.124e-09	1.900e-03	1.708e-09	1.708e-09	1.615e-01	1.116e-08	1.116e-08
3	5.404e-06	4.376e-18	4.376e-18	1.801e-06	1.459e-18	1.459e-18	9.443e-03	9.526e-18	9.526e-18
4	4.867e-12	0.000e+00	0.000e+00	1.622e-12	0.000e+00	0.000e+00	3.235e-05	6.948e-36	0.000e+00

Т а б л и ц а 2. Пример 2. $g(x) = \dfrac{1}{3}e^{x/3} - 1,\ Q_М \approx 1.01,\ P_М \approx 1.18$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	−1.000e+00	−1.000e+00	−1.000e+00	−2.835e-01	−2.835e-01	−2.835e-01	1.399e+00	1.399e+00	1.399e+00
1	1.868e-01	1.168e-01	1.168e-01	6.424e-02	3.969e-02	3.969e-02	9.911e-01	2.824e-01	2.824e-01
2	5.696e-03	1.874e-03	1.874e-03	1.900e-03	6.247e-04	6.247e-04	3.349e-01	4.614e-03	4.614e-03
3	5.404e-06	5.832e-07	5.832e-07	1.801e-06	1.944e-07	1.944e-07	4.060e-02	1.272e-06	1.272e-06
4	4.867e-12	5.669e-14	5.669e-14	1.622e-12	1.890e-14	1.890e-14	5.980e-04	1.234e-13	1.234e-13
5	3.948e-24	5.333e-28	5.301e-28	1.316e-24	1.778e-28	1.767e-28	1.297e-07	1.166e-27	1.161e-27

Т а б л и ц а 3. Пример 3. $g(x) = \dfrac{1}{3}e^{x/3} - 1,\ Q_М \approx 1.01,\ P_М \approx 2.36$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	−1.000e+00	−1.000e+00	−1.000e+00	−2.835e-01	−2.835e-01	−2.835e-01	2.332e+00	2.332e+00	2.332e+00
1	1.868e-01	5.832e-01	1.868e-01	6.424e-02	2.146e-01	6.424e-02	2.753e+00	7.488e-01	3.524e-01
2	5.696e-03	2.043e-02	4.278e-03	1.900e-03	6.833e-03	1.427e-03	2.584e+00	9.742e-02	1.140e-02
3	5.404e-06	6.721e-05	3.028e-06	1.801e-06	2.241e-05	1.009e-06	2.417e+00	1.494e-04	6.619e-06
4	4.867e-12	7.529e-10	1.528e-12	1.622e-12	2.510e-10	5.093e-13	2.120e+00	1.639e-09	3.326e-12
5	3.948e-24	9.447e-20	3.892e-25	1.316e-24	3.149e-20	1.297e-25	1.630e+00	2.056e-19	8.470e-25

Т а б л и ц а 4. Пример 4. $g(x) = \dfrac{x}{x^2+6x+5}$, $Q_M \approx 0.65$, $P_M \approx 0.689$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	1.500e-01	1.500e-01	1.500e-01	2.533e-02	2.533e-02	2.533e-02	1.600e-01	1.600e-01	1.600e-01
1	−2.848e-02	1.160e-03	1.160e-03	−5.896e-03	2.316e-04	2.316e-04	5.510e-02	1.116e-02	2.964e-02
2	−9.641e-04	−1.621e-06	−1.614e-06	−1.930e-04	−3.243e-07	−3.228e-07	4.326e-03	2.065e-06	2.057e-06
3	−1.115e-06	−3.155e-12	−3.126e-12	−2.230e-07	−6.310e-13	−6.253e-13	2.852e-05	4.015e-12	3.978e-12
4	−1.492e-12	−1.194e-23	−1.173e-23	−2.984e-13	−2.389e-24	−2.346e-24	1.242e-09	1.520e-23	1.492e-23

Т а б л и ц а 5. Пример 5. $g(x) = \dfrac{x}{x^2+6x+5}$, $Q_M \approx 0.65$, $P_M \approx 0.82$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	1.500e-01	1.500e-01	1.500e-01	2.533e-02	2.533e-02	2.533e-02	1.920e-01	1.920e-01	1.920e-01
1	−2.848e-02	−1.484e-02	−1.484e-02	−5.896e-03	−3.022e-03	−3.022e-03	7.934e-02	2.716e-02	2.716e-02
2	−9.641e-04	−2.495e-04	−2.495e-04	−1.930e-04	−4.991e-05	−4.991e-05	8.971e-03	3.138e-04	3.138e-04
3	−1.115e-06	−7.462e-08	−7.462e-08	−2.230e-07	−1.492e-08	−1.492e-08	1.226e-04	9.494e-08	9.494e-08
4	−1.492e-12	−6.682e-15	−6.682e-15	−2.984e-13	−1.336e-15	−1.336e-15	2.296e-08	8.503e-15	8.503e-15

Т а б л и ц а 6. Пример 6. $g(x) = \dfrac{x}{x^2+6x+5}$, $Q_M \approx 0.65$, $P_M \approx 1.37$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	1.500e-01	1.500e-01	1.500e-01	2.533e-02	2.533e-02	2.533e-02	3.200e-01	3.200e-01	3.200e-01
1	−2.848e-02	−7.884e-02	−2.848e-02	−5.896e-03	−1.739e-02	−5.896e-03	2.204e-01	9.116e-02	4.080e-02
2	−9.641e-04	−6.043e-03	−8.786e-04	−1.930e-04	−1.217e-03	−1.759e-04	6.922e-02	6.717e-03	1.087e-03
3	−1.115e-06	−4.275e-05	−9.229e-07	−2.230e-07	−8.551e-06	−1.846e-07	7.300e-03	5.419e-05	1.174e-06
4	−1.492e-12	−2.193e-09	−1.022e-12	−2.984e-13	−4.386e-10	−2.044e-13	8.138e-05	2.791e-09	1.301e-12
5	−2.672e-24	−5.771e-18	−1.253e-24	−5.344e-25	−1.154e-18	−2.507e-25	1.011e-08	7.344e-18	1.595e-24

Т а б л и ц а 7. Пример 7. $g(x) = x + \sin x$, $Q_M \approx 0.26$, $P_M \approx 0.28$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	5.236e-01	5.236e-01	5.236e-01	1.024e+00	1.024e+00	1.024e+00	5.536e-01	5.536e-01	5.536e-01
1	−2.413e-02	2.857e-03	2.857e-03	−4.826e-02	5.713e-03	5.713e-03	7.705e-02	3.286e-02	2.699e-02
2	2.350e-06	−6.457e-09	−3.884e-09	4.699e-06	−1.291e-08	−7.768e-09	1.395e-03	1.917e-06	1.915e-06
3	−2.162e-18	4.136e-25	0.000e+00	−4.324e-18	8.272e-25	0.000e+00	4.571e-07	9.795e-18	3.544e-18

Т а б л и ц а 8. Пример 8. $g(x) = x + \sin x$, $Q_M \approx 0.26$, $P_M \approx 0.33$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	5.236e-01	5.236e-01	5.236e-01	1.024e+00	1.024e+00	1.024e+00	6.643e-01	6.643e-01	6.643e-01
1	−2.413e-02	−4.829e-02	−2.413e-02	−4.826e-02	−9.656e-02	−4.826e-02	1.110e-01	8.400e-02	5.985e-02
2	2.350e-06	3.136e-05	2.350e-06	4.699e-06	6.272e-05	4.699e-06	2.893e-03	5.489e-04	1.353e-04
3	−2.162e-18	−8.526e-15	−2.162e-18	−4.324e-18	−1.705e-14	−4.324e-18	1.966e-06	2.310e-10	1.297e-12

Т а б л и ц а 9. Пример 9. $g(x) = x + \sin x$, $Q_M \approx 0.26$, $P_M \approx 0.55$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	5.236e-01	5.236e-01	5.236e-01	1.024e+00	1.024e+00	1.024e+00	1.107e+00	1.107e+00	1.107e+00
1	−2.413e-02	−4.829e-02	−2.413e-02	−4.826e-02	−9.656e-02	−4.826e-02	3.082e-01	8.400e-02	5.985e-02
2	2.350e-06	3.136e-05	2.350e-06	4.699e-06	6.272e-05	4.699e-06	2.232e-02	5.489e-04	1.353e-04
3	−2.162e-18	−8.526e-15	−2.162e-18	−4.324e-18	−1.705e-14	−4.324e-18	1.170e-04	2.310e-10	1.297e-12

Т а б л и ц а 10. Пример 10. $g(x) = (1 - e^{-|x|}) \operatorname{sgn} x$, $Q_M \approx 4.77$, $P_M \approx 16.14$

k	x_N	x_T	x_M	f_N	f_T	f_M	d_N	d_T	d_M
0	1.300e+00	1.300e+00	1.300e+00	7.275e-01	7.275e-01	7.275e-01	4.400e+00	4.400e+00	4.400e+00
1	−1.369e+00	−1.382e+00	−1.369e+00	−7.457e-01	−7.489e-01	−7.457e-01	3.552e+01	1.718e+00	1.705e+00
2	1.563e+00	−2.391e-02	−2.011e-02	7.906e-01	−2.363e-02	−1.991e-02	2.481e+03	3.598e-01	3.560e-01
3	−2.211e+00	2.956e-04	2.037e-04	−8.904e-01	2.956e-04	2.036e-04	1.469e+07	3.002e-04	2.064e-04
4	5.915e+00	−4.372e-08	−2.074e-08	9.973e-01	−4.372e-08	−2.074e-08	9.848e+14	4.373e-08	2.074e-08
5	−3.638e+02	9.558e-16	2.151e-16	−1.000e+00	9.558e-16	2.151e-16	1.798e+32	9.558e-16	2.151e-16

Заключение

Существуют два способа определения достижения точности решения: по невязке и по оценке дальности решения. В соответствии с этим разные численные методы ориентированы на один из этих двух способов. Точная релаксация ориентирована на оценку дальности. И по этому показателю она всегда лучше метода Ньютона, что и подтверждают исследования. Точная релаксация с модификацией ориентирована на невязку. И соответственно в этом она лучше ТР и МН, что тоже хорошо видно в численных экспериментах. Помимо улучшения сходимости сравнительно с МН как МТР, так и ТР обеспечивают сходимость в скалярном случае для монотонных функций, имеющих корень.

Список литературы

[1] Михеев С. Е. Нелинейные методы в оптимизации. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001.

[2] Михеев С.Е. Метод точных релаксаций // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 71–86.

[3] Михеев С.Е. Глобализация некоторых итеративных методов решения скалярных уравнений // Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 10. 2007. Вып. 4. С. 43–52.

[4] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

[5] Мысовских И.П. О сходимости метода Л.В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применениях // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 565–568.

[6] Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

[7] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 21 июля 2008 г.