Приложение теории двойственности к моделям потокораспределения*

С. П. Епифанов, В. И. Зоркальцев
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: epifanov@isem.sei.irk.ru, zork@isem.sei.irk.ru

Приводятся факты теории симметричной двойственности [1 – 3] для задач минимизации сепарабельных выпуклых функций при линейных ограничениях. Эти факты используются для уточнения системы требований к функциям, задающим взаимосвязи потерь давления и расходов по отдельным ветвям гидравлических цепей, для доказательства существования и единственности решения задачи потокораспределения, для исследования свойств и взаимосвязей трех формулировок задач потокораспределения — в виде системы уравнений и в виде двух взаимно двойственных задач оптимизации.

Ключевые слова: модель и задачи потокораспределения, симметричная двойственность, системы уравнений, взаимно двойственные задачи оптимизации.

Введение

Как известно, многие природные, технические и социально-экономические процессы описываются в виде задач оптимизации. Важной составляющей теории оптимизации является теория двойственности. Для широкого класса задач оптимизации применяются специфические конструкции — двойственные задачи оптимизации. Они используются для доказательства оптимальности полученного решения, для теоретического обоснования алгоритмов, при физической или экономической интерпретации получаемого решения.

Возможен случай, когда двойственная задача к двойственной задаче совпадает с исходной задачей оптимизации. Этот случай назван в [1] симметричной двойственностью. Основная цель данной статьи состоит в изложении результатов по использованию фактов из симметричной двойственности в теории гидравлических цепей [4, 5], созданной для моделирования трубопроводных систем, обеспечивающих транспортировку потребителям воды, тепла, газа, нефти и нефтепродуктов и пр. Создание, развитие и реконструкция таких систем, управление ими предполагают многократное решение задач потокораспределения для определения гидравлических показателей, характеризующих потоки и давления во всех элементах системы.

К настоящему времени в теории гидравлических цепей предложено два подхода к описанию потокораспределения — алгебраический и экстремальный. При алгебраиче-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00587).

ском описании вводятся системы линейных и нелинейных уравнений. Линейные уравнения выражают аналоги первого и второго законов Кирхгофа. При описании взаимосвязей расхода и потерь давления на ветвях используются нелинейные зависимости. Их аналогом в электрических цепях является зависимость между перепадом напряжения и силой тока, выражаемая в виде линейной зависимости — закона Ома. Если вопросы существования и единственности решения задачи потокораспределения в алгебраической форме записи несложно разрешаются применительно к электрическим цепям (поскольку в этом случае модель имеет форму системы линейных уравнений), то выяснение этих вопросов для гидравлических цепей на базе алгебраической формы записи затруднено из-за нелинейности системы уравнений.

Благодаря работам Б.Н. Пшеничного [6], М.Г. Сухарева [7], В.Я. Хасилева и А.П. Меренкова [4] в теории гидравлических цепей утвердилась также форма записи модели потокораспределения в виде задачи оптимизации, в которой переменными выступают только расходы по отдельным ветвям. В этой задаче минимизируется некоторая функция от расходов по всем ветвям цепи при ограничениях, выражающих только аналог первого закона Кирхгофа. Поскольку экстремальный подход приводит к задаче выпуклого программирования, то он удобен для выяснения вопросов существования и единственности решения задачи потокораспределения. Б.Н. Пшеничным [6] было дано доказательство существования решения для "пассивных цепей", не имеющих активных ветвей. Ниже приводится обоснование на базе экстремального подхода существования и единственности решения задачи потокораспределения в общем случае, в том числе цепей с активными ветвями. При этом уточняется система требований к функциям, задающим взаимосвязи расхода и потерь давления на отдельных ветвях.

В 1969 году М.Г. Сухарев [7] ввел описание задачи потокораспределения для случая пассивной гидравлической цепи в виде двойственной задачи оптимизации, переменными у которой являются только величины давления в отдельных узлах и перепады давлений на ветвях. Впоследствии описание задачи потокораспределения в виде двойственной задачи оптимизации было дано для общего случая [5, 8]. Ниже будут подробно рассмотрены взаимосвязи трех формулировок задачи потокораспределения — в виде системы уравнений и в виде двух взаимно двойственных задач оптимизации.

1. Сопряженные функции

Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество непрерывно дифференцируемых функций вещественного аргумента, равных нулю в нуле, производные от которых являются монотонно возрастающими функциями, равными нулю в нуле и изменяющимися от $-\infty$ до $+\infty$. Последнее означает, что при стремлении аргумента к $-\infty$ и $+\infty$ значение производной функции из $\mathcal{Z}$ стремится к $-\infty$ и, соответственно, к $+\infty$. Функции из $\mathcal{Z}$ будем обозначать большими латинскими буквами. Их производные — соответствующими малыми латинскими буквами.

Из сформулированных свойств следует, что функция $S \in \mathcal{Z}$ строго выпуклая, имеющая абсолютный минимум в нуле. При любом $k \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, функция

$$S_k(\alpha) = S(\alpha) + k\alpha$$

также будет строго выпуклой. Свойства производных S гарантируют, что $S_k(\alpha)$ имеет минимум, который достигается не в нуле, если $k \neq 0$. При этом при любом $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, множество значений α, удовлетворяющих условию $S_k(\alpha) \le S_k(\bar{\alpha})$, будет ограниченным отрезком. Любая функции $S \in \mathcal{Z}$ однозначно определяется своей производной s по правилу

$$S(\alpha) = \int\limits_0^\alpha s(z)dz. \tag{1}$$

Функции S и W из $\mathcal{Z}$ будем называть *сопряженными*, если их производные s и w — взаимно обратные функции, т. е. для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место

$$w(s(\alpha)) = \alpha, \quad s(w(\alpha)) = \alpha. \tag{2}$$

Отметим, что из сформулированных свойств производной s следует существование единственной обратной к s функции, которая обладает теми же свойствами. Следовательно, для любой функции $S \in \mathcal{Z}$ существует и единственная сопряженная к ней функция $W \in \mathcal{Z}$.

Преобразование Фенхеля. Введенные выше сопряженные функции являются частным случаем сопряженных функций Фенхеля, т. е. одна из них — результат преобразования Фенхеля другой. Преобразованием Фенхеля функции $S \in \mathcal{Z}$ будет [3] функция

$$W(\beta) = \max_\alpha\,(\beta\alpha - S(\alpha)). \tag{3}$$

Пусть $S \in \mathcal{Z}$. Функция $G_\alpha(\beta) = \alpha\beta - S(\beta)$ при любом вещественном α в силу отмеченных выше свойств функции S из $\mathcal{Z}$ является строго вогнутой и достигает максимума. Значение β, при котором достигается максимум этой функции для данного α, обозначим посредством $\beta(\alpha)$, т. е.

$$\beta(\alpha) = \arg\max_\beta \big(\alpha\beta - S(\beta)\big).$$

Поскольку производная функции $G_\alpha(\beta)$ в точке $\beta(\alpha)$ должна равняться нулю, то $\alpha = s(\beta(\alpha))$. Следовательно, $\beta(\alpha)$ — обратная функция к s. Этим доказано, что преобразованием Фенхеля функции S из $\mathcal{Z}$ является сопряженная к ней функция из $\mathcal{Z}$.

Отметим одно важное свойство сопряженных функций, вытекающее из преобразования Фенхеля (3). Если $\beta \ne w(\alpha)$, то

$$S(\alpha) + W(\beta) > \alpha\beta. \tag{4}$$

Если же $\beta = w(\alpha)$, то

$$S(\alpha) + W(\beta) = \alpha\beta. \tag{5}$$

Следовательно, при произвольных вещественных α и β справедливо соотношение $S(\alpha) + W(\beta) \ge \alpha\beta$, которое называется [9] неравенством Фенхеля.

Пример 1. Множеству $\mathcal{Z}$ принадлежат квадратичные выпуклые функции с минимумом в нуле, равным нулю. Парой сопряженных функций этого типа будут

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}r\alpha^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad W(\beta) = \frac{1}{2}\pi\beta^2, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где r, π — заданные положительные коэффициенты, удовлетворяющие условию $\pi = 1/r$. Это гарантирует, что производные функций (6), т. е.

$$s(\alpha) = r\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad w(\beta) = \pi\beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{7}$$

будут взаимно обратными функциями.

Рассматриваемые в этом примере функции используются при описании электрических цепей. Пусть α — сила тока в некотором проводнике, β — перепад напряжения на его концах. Тогда соотношения

$$\beta = r\alpha, \quad \alpha = \pi\beta \tag{8}$$

выражают в двух формах закон Ома. Здесь r — коэффициент сопротивления проводника, π — коэффициент проводимости. Функция $s(\alpha)$ в (7) характеризует зависимость перепада напряжения от силы тока. Функция $w(\beta)$ задает зависимость силы тока от перепада напряжения на концах проводника.

Сами исходные сопряженные функции S и W можно охарактеризовать как две составляющие мощности электрического тока, протекающего по данному проводнику. Одна из них вызвана приростом от 0 до величины α силы тока. Другая — приростом от 0 до величины β перепада напряжения на концах рассматриваемого проводника. В силу (1)

$$S(\alpha) = \int\limits_0^\alpha s(z)dz, \qquad W(\beta) = \int\limits_0^\beta w(l)dl. \tag{9}$$

Мощность электрического тока, равную, как известно, произведению силы тока на перепад напряжения, обозначим

$$N = \alpha\beta. \tag{10}$$

Известно, что эту мощность можно определять только через силу тока, а также только через напряжение. Из (8) следует

$$N = r\alpha^2, \quad N = \pi\beta^2.$$

Согласно определениям (6)

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}N, \quad W(\beta) = \frac{1}{2}N.$$

Сумма значений этих функций при аргументах, удовлетворяющих (8), составит величину мощности

$$S(\alpha) + W(\beta) = N. \tag{11}$$

Это и позволяет интерпретировать значения рассматриваемых функций S и W как указанные две составляющие величины мощности электрического тока.

Пример 2. В качестве обобщения примера 1 можно рассматривать следующие сопряженные степенные функции из $\mathcal{Z}$:

$$S(\alpha) = \frac{1}{p+1} r|\alpha|^{p+1},\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad W(\beta) = \frac{1}{q+1} r|\beta|^{q+1},\ \beta \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где $p,\ q, r,\ \pi$ — заданные положительные коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$pq = 1, \quad \pi^p r = 1, \quad \pi r^q = 1.$$

Здесь два последних условия являются равносильными вследствие первого условия. Приведенные условия гарантируют, что производные функций (12), равные

$$s(\alpha) = r|\alpha|^p \operatorname{sign}\alpha, \quad w(\beta) = \pi|\beta|^q \operatorname{sign}\beta, \tag{13}$$

будут взаимно обратными функциями. В частном случае при $p = q = 1$ функции (12) имеют вид рассмотренных ранее квадратичных функций (6).

Степенная функция s из (13), особенно при $p = 2$, наиболее часто рассматривается в теории гидравлических цепей и ее приложениях для описания зависимостей между расходом (объем или масса транспортируемой жидкости либо газа в единицу времени) среды на данной ветви и перепадом давления на этой ветви. Здесь α — расход среды, β — перепад давления. Эти переменные связаны двумя равносильными соотношениями $\beta = s(\alpha)$, $\alpha = w(\beta)$, которые в теории гидравлических цепей принято называть "замыкающими".

Мощность, диссипированная при перемещении среды на рассматриваемой ветви, является произведением перепада давления на расход среды, т. е. эта мощность выражается также формулой (10). Равенство (11), вытекающее из (5), означает, что эту мощность можно представить как сумму двух составляющих. Величина $S(\alpha)$ характеризует часть мощности, вызванную приростом от 0 до α расхода среды на данной ветви. Величина $W(\beta)$ характеризует часть мощности, вызванную приростом от 0 до β перепада давления на данной ветви. Для степенных зависимостей (12), (13), в отличие от рассмотренного ранее квадратичного случая, отношение между этими двумя составляющими мощности уже не является строго фиксированным.

2. Взаимно двойственные задачи оптимизации и эквивалентная им система уравнений

Пусть заданы матрица A размерности $m \times n$, векторы $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, где m, n — некоторые целые положительные числа. Заданы также сепарабельные функции от векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j), \quad \Phi(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(y_j),$$

где $F_j(x_j)$, $\Phi_j(y_j)$ — пары сопряженных функций из $\mathcal{Z}$ для $j = 1, \ldots, n$. Считаем, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) = \nabla \Phi(\mathbf{y})$. Для пары функций f_j, φ_j при любом $j = 1, \ldots, n$ выполняются условия (2). Рассмотрим три задачи.

1. Минимизировать строго выпуклую функцию при линейных ограничениях:

$$F(\mathbf{x}) - (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \min, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{14}$$

где вектором переменных является $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Минимизировать выпуклую функцию при линейных ограничениях:

$$\Phi(\mathbf{y}) - (b, \mathbf{u}) \to \min, \quad \mathbf{y} - A^T\mathbf{u} = \mathbf{c}, \tag{15}$$

где векторами переменных являются $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$.

3. Найти решение системы уравнений:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{16}$$

$$\mathbf{y} - A^T\mathbf{u} = \mathbf{c}, \tag{17}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{18}$$

Переменные здесь образуют векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Данная система включает ограничения двух приведенных выше задач оптимизации и условие (18), связывающие переменные этих задач. Условие (18) равносильно тому, что $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$.

Первые две задачи будем называть взаимно двойственными задачами оптимизации. Причем для определенности задачу (14) назовем исходной задачей оптимизации, а задачу (15) — двойственной задачей оптимизации. Систему уравнений (16)–(18) будем называть условиями оптимальности для приведенных выше задач оптимизации. В [1–3] доказаны утверждения, содержащие следующую теорему.

Теорема 1. *Для рассматриваемых трех задач возможны только два случая.*

1. Все они не имеют решения. В этом случае ограничения исходной задачи оптимизации несовместны, целевая функция двойственной задачи оптимизации неограничена снизу на множестве допустимых по всем ограничениям этой задачи решений.

2. Все три задачи имеют решение. Если векторы $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ составляют решение системы уравнений (16)–(18), то вектор $\bar{\mathbf{x}}$ — оптимальное решение исходной задачи оптимизации и вектор множителей Лагранжа двойственной задачи оптимизации, векторы $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ — оптимальные решения двойственной задачи оптимизации, при этом $\bar{\mathbf{u}}$ — вектор множителей Лагранжа ограничений исходной задачи оптимизации.

Для решений всех рассматриваемых трех задач, векторы $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$ определяются однозначно, а вектор $\bar{\mathbf{u}}$ может быть неединственным в том и только том случае, если $\operatorname{rank} A < m$.

Для решений рассматриваемых трех задач выполняются равенства

$$F(\bar{\mathbf{x}}) + \Phi(\bar{\mathbf{y}}) = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}), \tag{19}$$

$$(\bar{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{y}}) = (\mathbf{c},\ \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{b},\ \bar{\mathbf{u}}), \tag{20}$$

где через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обозначено стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Краткое доказательство. Из принадлежности $F_j \in \mathcal{Z}$ следует, что при любом $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ множество Лебега целевой функции задачи (14)

$$M = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid\ F(\mathbf{x}) - (c, \mathbf{x}) \le F(\tilde{\mathbf{x}}) - (\mathbf{c},\ \tilde{\mathbf{x}})\}$$

компактно. Поэтому если у задачи (14) имеется допустимое решение, то имеется и оптимальное решение. В силу строгой выпуклости целевой функции это решение будет единственным.

Следовательно, задача (14) может не иметь решения только в том случае, если ее ограничения несовместны. А это, по альтернативе Фредгольма, возможно в том и только том случае, если существует $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$A^T\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{b},\ \mathbf{v}) > 0. \tag{21}$$

Двойственная задача (15) всегда имеет допустимое решение. Она не имеет оптимального решения в том и только том случае, если ее целевая функция не ограничена снизу на множестве допустимых решений. Это возможно в том и только том случае, если при некотором $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ выполняются условия (21).

Итак, доказано, что исходная и двойственная задачи оптимизации либо обе не имеют решения, либо обе имеют решение. Эквивалентность системы уравнений (16)–(18) задачам оптимизации можно установить, используя функцию Лагранжа двойственной задачи оптимизации:

$$L(\mathbf{y},\ \mathbf{u},\ \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{y}) - (\mathbf{b}, \mathbf{u}) - (\mathbf{x},\ \mathbf{y} - A^T\mathbf{u} - \mathbf{c}).$$

Здесь вектор x состоит из множителей Лагранжа ограничений задачи (15). Необходимые и достаточные условия оптимальности

$$\nabla_{\mathbf{y}} L(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\mathbf{u}} L(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

дают систему уравнений (16)–(18).

Если векторы $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ составляют оптимальное решение задачи (15), то в силу строгой выпуклости функции Φ вектор $\bar{\mathbf{y}}$ является единственным для оптимальных решений задачи (15). Если rank $A < m$, то $A^T \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ при некотором $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, кроме вектора $\bar{\mathbf{u}}$ в оптимальное решение может входить вектор $\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}$. В этом случае вектор $\bar{\mathbf{u}}$ будет неединственным в оптимальных решениях задачи (15).

Равенство (19) следует из свойства сопряженности функций (5). Используя (17) и затем (16), имеем $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{y}} - A^T \bar{\mathbf{u}})^T \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}} A \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{u}}$, что дает (20).

Теорема доказана. □

Модификация системы уравнений. Исходя из специфики системы уравнений (16)–(18) ее можно преобразовывать в системы с меньшим количеством уравнений и переменных. Рассмотрим одно из возможных преобразований, при котором исключается вектор переменных $\mathbf{u}$. Пусть $r = n - \operatorname{rank} A$, и пусть B — матрица размерности $r \times n$ такая, что

$$BA^T = \mathbf{0}, \tag{22}$$

т. е. B — матрица с n столбцами, у которой векторы-строки ортогональны всем векторам-строкам матрицы A, причем B имеет максимальный ранг среди всех матриц, удовлетворяющими условию ортогональности (22).

Если матрицу B умножить слева на векторы в левой и правой частях условия (17), то, с учетом (22), придем к выражению

$$B\mathbf{y} = B\mathbf{c}. \tag{23}$$

Из постулированных свойств матрицы B и известных фактов линейной алгебры следует, что если пара векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (17), то вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет условию (23). Наоборот, если вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (23), то существует вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ такой, что пара векторов $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$ будет удовлетворять исходному условию (17).

Таким образом, если нас не интересует вектор $\mathbf{u}$, то в качестве равносильной исходной системе уравнений (16)–(18) можно рассматривать систему, включающую уравнения (16), (18), (23).

3. Гидравлические цепи

Аналогом для формирования теории гидравлических цепей, как отмечалось в [4–7], являлась теория электрических цепей. Впрочем, изначально (в частности, у Максвелла [10]) при описании и интерпретации законов протекания электрического тока использовались наглядные аналоги из гидравлики. Обобщенно электрические цепи постоянного тока и гидравлические цепи можно представить в виде модели потокораспределения.

Рассмотрим классическую постановку задачи потокораспределения, алгебраическая форма записи которой является частным случаем системы уравнений (16)–(18). Модель представляется в виде направленного графа. Пусть $i = 1, \ldots, m$ — номера узлов, $j = 1, \ldots, n$ — номера ветвей.

В модели потокораспределения A — матрица инциденций узлов и ветвей ориентированного графа. В каждом столбце этой матрицы только два ненулевых элемента. Элемент матрицы A, находящийся на месте $(i,\, j)$, равен 1, если ветвь j выходит из узла i, и равен -1, если ветвь j входит в узел i. Вектор $\mathbf{b}$ состоит из заданных узловых расходов. Если $b_i > 0$, то величина b_i является заданным объемом поставляемой среды в систему в данном узле i за единицу времени. Если $b_i < 0$, то величина $-b_i$ задает объем среды, поставляемой за единицу времени из рассматриваемой трубопроводной системы. Вектор $\mathbf{c}$ состоит из заданных величин приращений давлений на ветвях (для электрической цепи — электродвижущей силы).

Переменными в задаче являются вектор $\mathbf{x}$ расходов среды по ветвям, вектор $\mathbf{y}$, компоненты которого характеризуют потери давления на ветвях, $\mathbf{u}$ — вектор давлений в узлах.

Уравнение (16) выражает аналог первого закона Кирхгофа: сумма входящих и выходящих потоков среды в каждом узле должна равняться нулю. Уравнение (17) характеризует балансовое соотношение показателей давления на каждой ветви: суммарная величина потери давления на ветви j, выражаемая величиной y_j, является суммой двух величин — разности давлений в начале и конце данной ветви $(A^T\mathbf{u})_j$ и приращения давления на данной ветви c_j. Если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, то гидравлическую цепь принято называть пассивной.

Условие (18) и равносильное ему условие $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ называются *замыкающими соотношениями.* Будем считать также, что граф связный. При этом $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i = 0$. Этих двух условий достаточно, чтобы система (16) была совместной.

Два варианта записи модели потокораспределения в виде системы уравнений. Представление модели потокораспределения в виде системы уравнений (16)–(18) в теории гидравлических цепей [4, 5] принято называть “узловой” системой уравнений. Часто используется другая, так называемая “контурная”, система уравнений, состоящая из уравнений (16), (18), (23):

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad B\mathbf{y} = B\mathbf{c}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{24}$$

По традиции, восходящей к пионерным работам по электрическим цепям, в качестве матрицы B используется матрица инциденций полной системы независимых контуров и ветвей графа. В таком случае второе уравнение в (24) выражает аналог второго закона Кирхгофа — сумма потерь давлений по замкнутому контуру равняется сумме приростов давлений на ветвях этого контура. Существуют специальные алгоритмы выбора полной системы независимых контуров и построения на этой основе матрицы B. Поскольку могут быть разные варианты выбора полной системы контуров, то имеется, обсуждаемая в литературе по гидравлическим цепям, проблема выбора наиболее эффективных вариантов.

Известно, что при любом способе выбора полной системы независимых контуров соответствующая ей матрица B будет удовлетворять условиям ортогональности (22). Как было показано в предыдущем разделе, условие ортогональности (22) может использоваться как определяющее свойство матрицы B. Это расширяет возможности для конструирования эффективных алгоритмов построения B. Согласно такому определению

B строки этой матрицы состоят из векторов, образующих базис линейного подпространства в $\mathbb{R}^n$, ортогонального образу матрицы A^T.

Аксиоматика, принятая в теории гидравлических цепей. Функции f_j, согласно условиям, приведенным в [4], должны быть на всей числовой оси непрерывно дифференцируемыми, нечетными, монотонно возрастающими, равными нулю в нуле. Можно отметить, что последнее требование является избыточным в этой системе. Его несложно получить как следствие второго требования.

В статье Б.Н. Пшеничного [6] для пассивной гидравлической цепи при указанных выше требованиях к функциям, задающим замыкающие соотношения (четвертое требование им не вводилось), было доказано существование и единственность решения контурной системы уравнений.

А.П. Меренковым в [4] было приведено доказательство того, что если решение задачи потокораспределения существует, то оно единственно и в общем случае, т. е. при $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ для замыкающих соотношений в виде степенной функции, когда

$$f_i(x_i) = r_i|x_i|^{\beta_i} \operatorname{sign} x_i, \tag{25}$$

где $r_i > 0$, $\beta_i > 0$ — заданные коэффициенты. В [4] рассматривались $\beta_i \in [1, 2]$. Здесь и далее под единственностью решения задачи потокораспределения понимается только единственность векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Вектор $\mathbf{u}$ — неединственный в решении, поскольку в этой модели $\operatorname{rank} A < m$.

В обоих случаях Б.Н. Пшеничным и А.П. Меренковым для доказательства фактов существования и единственности решения задачи потокораспределения использовалось ее представление в виде экстремальной задачи (14). Если для системы нелинейных уравнений (16)–(18) совершенно не очевидно, существуют ли решения и сколько их, то для равносильной ей задачи оптимизации (14) эти вопросы становятся более прозрачными, поскольку при сформулированных выше требованиях к функции f задача (14) относится к классу хорошо изученных задач минимизации строго выпуклой функции при линейных ограничениях-равенствах.

Следует отметить, что на основе приведенных в данном разделе требований к функциям, задающим замыкающие соотношения, доказать существование решения в общем случае при произвольном векторе c нельзя. Для любого $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ можно выбрать функции f_j, удовлетворяющие этим требованиям, при которых целевая функция задачи (14) будет неограниченно убывать в области допустимых решений. Чтобы гарантировать существование решения при любом $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, необходимо, чтобы функции f_j принимали значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Вместе с тем, как видно из сформулированных нами требований к функциям из $\mathcal{Z}$, есть возможность существенно ослабить эти условия. В частности, нет необходимости в требовании дифференцируемости функций f_j. Достаточно их непрерывности, что, кстати, было учтено в статье [7]. Нет необходимости и в нечетности этих функций. Это позволяет учитывать имеющие иногда место различия в гидравлических сопротивлениях в зависимости от направления течения среды по ветви. Итак, введенная система требований к функциям из $\mathcal{Z}$ обеспечивает существование и единственность решения задачи потокораспределения при использовании в качестве замыкающих соотношений производные функций из $\mathcal{Z}$. При этом несколько расширяются возможности моделирования потокораспределения. Конечно, задание взаимосвязей расходов среды и потерь давления в виде указанных функций не исчерпывает всех особенностей этих величин.

В частности, этого недостаточно для учета эффекта гистерезиса или эффекта возрастания сил трения с ростом среднего давления в трубе, имеющих место при перекачке газов [4, 8]. Для учета этих и других подобных особенностей требуются дополнительные проработки.

Об эквивалентности и взаимосвязях экстремальных постановок задач потокораспределения. Исторически сложилось так, что формулировки задачи потокораспределения в виде экстремальных постановок породили ряд недоразумений, проявляющихся в некоторых публикациях по гидравлическим цепям до сих пор. Одним из таких недоразумений является противопоставление экстремальных и алгебраических постановок. До сих пор встречаются работы с рассуждениями на тему — какие из формулировок лучше. Как это следует из приведенной теоремы, все эти формулировки совершенно равносильные. Обе экстремальные задачи и задача в виде системы алгебраических уравнений либо не имеют решения, либо все три имеют решения. Причем решение одно и то же для всех задач. При этом в понятие "решение экстремальной задачи" необходимо включать наряду со значениями переменной этой задачи также и множители Лагранжа ее ограничений.

Некорректно также противопоставлять экстремальную постановку решению задачи потокораспределения в алгебраической форме. Дело в том, что любой метод решения задачи (14), или задачи (15), или системы (24) одновременно является методом решения других из этих задач. Конечно, новые формулировки задач потокораспределения (например, в виде двойственной задачи оптимизации (15)) могут быть полезными для введения новых алгоритмов, разработанных ранее для задач именно такого вида. Но эти новые алгоритмы будут одновременно алгоритмами решения задачи потокораспределения и в других формулировках.

Разные варианты экстремальных и алгебраических формулировок задачи потокораспределения можно рассматривать только как разные виды с разных ракурсов одного и того же объекта. Информация о взаимосвязях разных формулировок полезна для углубленного понимания задачи в целом.

Отметим, что равенство (20) для гидравлических (как и для электрических) цепей выражает закон сохранения энергии. Величина в левой части этого равенства $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ соответствует затратам мощности на преодоление в гидравлической (электрической) системе сил трения (сопротивления). Величина в правой части соответствует мощности внешних источников. Величина $(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}})$ соответствует затратам мощности на изменения давлений на отдельных ветвях системы (ЭДС). Величина $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{u}})$ соответствует мощности на передачу через систему экзогенно заданных потоков (токов), составляющих вектор $\mathbf{b}$.

Следует подчеркнуть, что соотношение (20) не является достаточным. Это только необходимое условие оптимальности векторов $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{y}}$ для задач (14), (15). Оно выполняется для любых векторов, удовлетворяющих балансовым условиям (16)–(17), в том числе и для тех, для которых не выполнено условие (18).

В то же время равенство (19) является не только необходимым, но и достаточным, чтобы векторы $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, удовлетворяющие балансовым условиям (16), (17), были решениями задачи потокораспределения. Если векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ удовлетворяют условиям (16), (17) и для них не выполняется соотношение (18), то согласно (4)

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) > (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Это свойство позволяет сформулировать задачу потокораспределения в виде системы уравнений, включающей балансовые соотношения (16), (17) и равенство

$$F(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \tag{26}$$

Это равенство равносильно при соотношениях (16), (17) условию (18). То есть набор из n равенств (18) можно заменить одним уравнением (26).

О тепловой теореме Максвелла. Впервые оптимизационная формулировка задачи потокораспределения была дана Максвеллом [10] для электрической цепи. В этом случае $f_j = r_j x_j$, где r_j — положительный коэффициент сопротивления на ветви j. Максвелл показал, что среди распределения токов, удовлетворяющих первому закону Кирхгофа в пассивной электрической цепи (т. е. при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$), закону Ома будет удовлетворять такое распределение токов, при котором минимальны потери мощности в цепи. То есть решением задачи потокораспределения будет вектор $\bar{\mathbf{x}}$, являющийся решением задачи

$$\sum_{j=1}^{n} r_j (x_j)^2 \to \min, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{27}$$

Целевая функция здесь выражает суммарные потери мощности в цепи.

Согласно (14) задача оптимизации для электрической цепи должна иметь такой вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} r_j (x_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{28}$$

В случае $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ целевая функция этой задачи будет составлять ровно $1/2$ от значения целевой функции задачи Максвелла. Умножение на положительную константу целевой функции задачи оптимизации не меняет множества оптимальных решений, поэтому обе задачи (27), (28) при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ будут иметь одно и то же оптимальное решение $\bar{\mathbf{x}}$.

Вместе с тем, как несложно увидеть, множители Лагранжа ограничений задачи (27) не будут соответствовать давлениям в отдельных узлах. Пусть $\bar{\mathbf{u}}$ — вектор множителей Лагранжа задачи (28) при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, который интерпретируется как вектор давлений в узлах. Этот вектор удовлетворяет соотношению $A^T\bar{\mathbf{u}} = f(\bar{\mathbf{x}})$. Если $\mathbf{v}$ — вектор множителей Лагранжа задачи (27), то $A^T\mathbf{v} = 2f(\bar{\mathbf{x}})$. Следовательно, каждому из значений вектора множителей Лагранжа $\mathbf{v}$ задачи (27) соответствует вектор множителей Лагранжа $\bar{\mathbf{u}}$ задачи (28) при $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{v} = 2\bar{\mathbf{u}}$. Это факт следует рассматривать в качестве недостатка формулировки (27) по сравнению с формулировкой задачи потокораспределения для электрической цепи (28).

Другим недостатком экстремальной формулировки Максвелла является тот факт, что она сделана только в предположении $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. В теории гидравлических цепей делались попытки обобщить постановку Максвелла на более сложные функции f_j и для случая $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. В частности, в [4] обсуждалась такая задача:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\, x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{29}$$

Здесь первая составляющая соответствует мощности, затрачиваемой внутри цепи на преодоление силы трения, вторая составляющая — мощности, привносимой извне системы на повышение давления, выражаемого вектором $\mathbf{c}$. При этом в [4] рассматривалась также и экстремальная формулировка в виде задачи (14).

Хотя на первый взгляд кажется, что задача (29) имеет четкий физический смысл, ее формулировку следует считать неверной. Только в некоторых случаях она будет давать такое же решение, как задача (14) и эквивалентная ей система (16)–(18). А именно, как было показано А.П. Меренковым [4], это будет в случае $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ при использовании степенных функций в замыкающих соотношениях с одинаковыми степенными коэффициентами, т. е. при $f_j(x_j) = r_j|x_j|^\beta \operatorname{sign} x_j$, где $\beta > 0$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, — заданные коэффициенты. В этом случае целевые функции задач (14), (29) будут различаться на положительный множитель:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\, x_j = (\beta + 1)F(\mathbf{x}).$$

Вместе с тем, и в этом случае множители Лагранжа ограничений задачи (29) не будут равны давлениям в отдельных узлах.

Выводы

Основные результаты исследований, представленных в данной статье, состоят в следующем.

Расширены возможности описания модели потокораспределения в виде системы уравнений. Показано, что вместо матрицы инциденций контуров и ветвей, использующейся при описании аналога второго закона Кирхгофа, можно использовать любую матрицу максимального ранга, векторы-строки которой ортогональны всем векторам-строкам матрицы инциденций ветвей и узлов графа гидравлической цепи.

Уточнена система требований к функциям, которые могут использоваться для описания замыкающих соотношений в гидравлической цепи — зависимости между расходами и потерями давления на ветвях. В частности, показано, что нет необходимости введения условий дифференцируемости этой функции (достаточно только непрерывности) и их нечетности (достаточно только их монотонного возрастания и условия равенства этих функций нулю в нуле). Это позволяет моделировать более сложные процессы в трубопроводных системах с различным гидравлическим сопротивлением, в зависимости от направления течения среды по ветви.

Для расширенного класса функций, задающих зависимость потери давления от расходов на ветвях, доказано существование и единственность решения задачи потокораспределения. При этом было дано теоретическое обоснование существования решения в случае нелинейных зависимостей потерь давления от расхода при ненулевых приращениях давления на отдельных ветвях цепи. Доказана эквивалентность постановок задач потокораспределения в виде алгебраической системы и двух взаимно двойственных задач оптимизации.

Список литературы

[1] Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность. Приложения к моделям электрических и гидравлических цепей. Иркутск: ИСЭМ СО РАН. 2004. 41 с. (Препринт № 6).

[2] Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность и гидравлические цепи // Моделирование технических и природных систем: Тр. XIII Байкальской между-

нар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Т. 5. Иркутск: ИСЭМ СО РАН. 2005. С. 119–123.

[3] Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность в оптимизации и ее приложения // Изв. вузов. Математика. 2006. № 12. С. 55–64.

[4] Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 294 с.

[5] Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1992. 407 с.

[6] Пшеничный Б.Н. Расчет электрических сетей на ЭВМ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. № 5. С. 942–947.

[7] Сухарев М.Г. О выборе метода при расчете на ЭВМ течений по сетям // Кибернетика. 1969. № 6. С. 9–11.

[8] Сухарев М.Г. Уточненная формализация задач анализа гидравлических цепей // Трубопроводные системы энергетики: Управление развитием и функционированием. Новосибирск: Наука, 2004. С. 15–24.

[9] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

[10] Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука, 1984. 415 с.

Поступила в редакцию 20 октября 2007 г.,
в переработанном виде — 21 июля 2008 г.