

# Оптимизация структуры матриц массы и жесткости для векторного конечно-элементного базиса на ортогональных сетках

М. В. ПУЗАНОВ, Э. П. ШУРИНА

*Новосибирский государственный технический университет, Россия*

e-mail: misha.puzanov@gmail.com

Рассматривается задача построения векторных базисов высоких порядков на ортогональных сетках в пространстве  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ , позволяющих минимизировать количество ненулевых элементов в матрицах массы и жесткости при решении нестационарных трехмерных задач электромагнетизма.

*Ключевые слова:* уравнения Максвелла, векторный метод конечных элементов, ортогонализация базиса.

## Введение

Многие нестационарные задачи вычислительного электромагнетизма при использовании конечно-элементной дискретизации в пространстве  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  приводят [1, 2] к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$R\mathbf{u} + M^s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + M^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{N}_i$ ;  $\mathbf{N}_i \in H(\mathbf{rot}, \Omega)$  — векторный базис, используемый при дискретизации; матрицы  $R, M_1, M_2$  — квадратные, размерности  $n$ . В случае, если  $\mathbf{u}$  соответствует полю  $\mathbf{E}$ , то

$$R_{ij} = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{rot} \mathbf{N}_j, \quad M_{ij}^s = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j, \quad M_{ij}^e = \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j;$$

если же  $\mathbf{u}$  соответствует полю  $\mathbf{H}$ , то

$$R_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{rot} \mathbf{N}_j, \quad M_{ij}^s = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mu \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j, \quad M_{ij}^e = \int_{\Omega} \mu \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j.$$

Выбор схемы дискретизации по времени уравнения (1) полностью определяет точность, устойчивость и вычислительную сложность решения задачи.

Использование неявных схем по времени (схемы Ньюмарка, Кранка—Николсона, Адамса—Молтона и др.) теоретически приводит к безусловно устойчивому вычислительному процессу, который требует решения СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений) с матрицей вида  $aR + bM_\varepsilon + cM_s$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , на каждом шаге по времени. В случае малых временных шагов для достижения заданной точности при

быстро и значительно изменяющемся во времени источнике электромагнитного поля эта процедура может быть крайне затратной в вычислительном плане.

Известно, что использование явной схемы по времени приводит к условно устойчивому вычислительному процессу, в котором устойчивость определяется соотношением Куранта. Применение явной схемы требует решения СЛАУ с матрицей вида  $pM_\varepsilon + qM_s$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ , на каждом шаге. Таким образом, уменьшение меры обусловленности матрицы массы  $M$ ,  $M_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j$  и количества ненулевых элементов в ней способствует снижению затрат времени вычислений и необходимой памяти.

Векторный МКЭ [3–6] предоставляет некоторые возможности конструирования базисов (в  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$  и  $H(\mathbf{div}, \Omega)$ ), приводящих к уменьшению числа ненулевых элементов в глобальных матрицах жесткости и массы и обеспечивающих эффективное обращение матрицы массы.

Оптимальным результатом является построение ортогонального базиса, который формировал бы диагональную матрицу  $M$ . Достигнуть этого при аналитическом вычислении скалярного произведения и сохранить тангенциальную непрерывность решения практически невозможно.

В [7, 8] предлагается метод приведения матрицы массы к диагональному виду заменой точного интегрирования при вычислении скалярного произведения приближенной процедурой, использующей квадратуры Гаусса—Лежандра или Гаусса—Лобатто. Все полиномы, формирующие базисные функции, ортогональны на системе узлов интегрирования. Такая процедура приводит к некоторой потере точности, которая, однако, может быть нивелирована достаточно высоким порядком полиномов. Основное преимущество данного метода в том, что он применим и к неортогональным гексаэдральным сеткам.

Другой способ уменьшения затрат на обращение матрицы массы — ее приближенное обращение [9], в котором из матрицы  $K = M^{-1}$  удаляются элементы, удовлетворяющие критерию  $|k_{ij}| < \frac{\max_s K_{ss}}{\min_q K_{qq}}$ . Этот вариант, соответствующий областям с однородными физическими свойствами, может давать плохую аппроксимацию  $M^{-1}$  в случае сильно меняющихся коэффициентов  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  и  $\mu$ .

В данной работе предложен и исследован новый подход, состоящий в построении базиса, в котором неортогонально лишь несколько функций на конечном элементе; остальные функции ортогональны в смысле аналитического скалярного произведения, что позволяет сохранить интерполяционные свойства стандартного базиса. Кроме того, исследуется вопрос о трудоемкости точного обращения матрицы массы, которое позволяет избежать решения СЛАУ на каждом временном шаге.

## 1. Ортогонализация векторного базиса

### 1.1. Точная ортогонализация

Обозначим  $\mathbf{S}^p(a, b)$  пространство полиномов порядка не выше  $p$ , определенных на отрезке  $[a, b]$ , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx. \quad (2)$$

Пусть на отрезке  $[0, 1]$  заданы точки  $Q_x^p = \{x_0, \dots, x_p\}$  такие, что  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = 1$ . Тогда набор интерполяционных полиномов Лагранжа из  $\mathbf{S}^p(0, 1)$  задается соотношением

$$L_i^p(x, Q) = \prod_{j=0, j \neq i}^p \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (3)$$

Определим параллелепипедальный конечный элемент как множество

$$E = \{(x, y, z) \mid x_0 < x < x_p, y_0 < y < y_p, z_0 < z < z_p\}. \quad (4)$$

Аналогичным образом введем  $Q_y^p$  и  $Q_z^p$ . Тогда простейший базис пространства функций из  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, E)$  на элементе (4) имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{N}_x^{(p)ijk}(x, y, z) = L_i^{p-1}(x, Q_x^{p-1})L_j^p(y, Q_y^p)L_k^p(z, Q_z^p) \cdot \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{N}_y^{(p)ijk}(x, y, z) = L_i^{p-1}(y, Q_y^{p-1})L_j^p(z, Q_z^p)L_k^p(x, Q_x^p) \cdot \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{N}_z^{(p)ijk}(x, y, z) = L_i^{p-1}(z, Q_z^{p-1})L_j^p(x, Q_x^p)L_k^p(y, Q_y^p) \cdot \mathbf{e}_z, \end{cases} \quad (5)$$

где  $i = \overline{0, p-1}$ ,  $j, k = \overline{0, p}$ ,  $\mathbf{e}_u$  — единичный орт, направленный вдоль оси координат  $u$ . Для упрощения дальнейшего изложения будем называть полиномы, определенные на оси координат, совпадающей с направлением базисной функции (т.е.  $L_i^{p-1}(x, Q_x^{p-1})$  — в определении  $\mathbf{N}_x^{(p)ijk}$ ,  $L_i^{p-1}(y, Q_y^{p-1})$  — в определении  $\mathbf{N}_y^{(p)ijk}$  и  $L_i^{p-1}(z, Q_z^{p-1})$  — в определении  $\mathbf{N}_z^{(p)ijk}$ ), *нормальными*, а все остальные *тангенциальными*.

Из определения (5) видно, что число локальных базисных функций на одном элементе составляет  $3p(p+1)^2$ . Для случая  $p = 1$  функции (5) превращаются в хорошо известные edge-функции. Следует отметить, что при  $p > 1$  базисные функции (5) не только ассоциируются с ребрами, но и могут быть внутренними, т.е. могут не иметь ненулевых тангенциальных следов на границе конечного элемента.

Поскольку с ростом порядка базиса растет заполненность матрицы массы ненулевыми элементами, актуально построение такого базиса  $\mathbf{N}_u^p$ , который, с одной стороны, обладал бы хорошими интерполяционными свойствами, с другой — минимизировал бы количество ненулевых элементов в матрице массы, увеличивал бы диагональное преобладание и снижал бы ее обусловленность. Поэтому ниже рассмотрим задачу выбора полиномов  $L_j^p(x, Q)$  более подробно.

Можно заметить, что для конструкции базиса не имеет значения конкретный вид  $L_k^p$ . Это позволяет варьировать их коэффициенты с целью получения базисных функций, обладающих свойствами, лучшими с точки зрения конечно-элементной дискретизации. В частности, для получения матриц массы с малым числом обусловленности используются полиномы, которые строятся неравномерным распределением узлов  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$ . Из теории аппроксимации известно [10, 11], что минимизация константы Лебега

$$\Lambda(Q) = \max_{x \in [0, 1]} \sum_{i=0}^p L_i^p(x, Q) \quad (6)$$

определяет распределение точек  $Q$ , оптимальное с точки зрения обусловленности матрицы массы. Субоптимальным в этом смысле является расположение корней полиномов Чебышева первого рода, определяемое (на отрезке  $[0, 1]$ ) соотношением

$$\left\{ x_i = -\frac{\cos[(2i+1)\pi/(2p+2)]}{\cos[\pi/(2p+2)]} + \frac{1}{2}, i = \overline{0, p} \right\}. \quad (7)$$

Выбор полиномов Лежандра в качестве нормальных полиномов оптимален с точки зрения структуры матрицы массы. Полиномы Лежандра, помимо ортогональности, позволяют построить иерархический базис. На отрезке  $[0, 1]$  они принимают вид

$$\bar{l}^p(x) = \sqrt{2p+1} l^{p-1}(2x-1), \quad (8)$$

где  $l^p(x)$  определяется на отрезке  $[-1, 1]$  стандартным образом [12]:

$$\begin{cases} l^0(x) = 1, \\ l^1(x) = x, \\ l^{p+1}(x) = \frac{2p+1}{p+1} x l^p(x) - \frac{p}{p+1} l^{p-1}(x). \end{cases} \quad (9)$$

В этом случае векторный базис вводится как

$$\begin{cases} \mathbf{N}_x^{(p)ijk}(x, y, z) = l^{i-1}(x) L_j^p(y, Q) L_k^p(z, Q) \cdot \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{N}_y^{(p)ijk}(x, y, z) = l^{i-1}(y) L_j^p(z, Q) L_k^p(x, Q) \cdot \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{N}_z^{(p)ijk}(x, y, z) = l^{i-1}(z) L_j^p(x, Q) L_k^p(y, Q) \cdot \mathbf{e}_z. \end{cases} \quad (10)$$

В принципе, в качестве нормальных полиномов вместо полиномов Лежандра могут быть использованы любые ортогональные полиномы, однако в этом нет особого смысла.

Оптимальное решение задачи упрощения матрицы массы — построение ортогонального векторного базиса, в результате матрица массы становится диагональной. Так как результирующий базис должен обладать тангенциальной непрерывностью, необходимо наложить на тангенциальные полиномы дополнительные ограничения: они должны обеспечивать непрерывность интерполируемой функции.

Окончательно, необходимо построить две системы ортогональных полиномов на  $[0, 1]$ :

1) система нормальных ортогональных полиномов без ограничений (в качестве примера уже приведены полиномы Лежандра);

2) система тангенциальных ортогональных полиномов, обеспечивающая непрерывность интерполируемой функции в точках 0 и 1.

Во втором случае требуется найти полиномы  $L_i \in \mathbf{S}^p(0, 1)$ ,  $i = \overline{0, p}$ , такие, что

$$\begin{cases} L_0(0) = 1, L_0(1) = 0, \\ L_i(0) = L_i(1) = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \\ L_p(0) = 0, L_p(1) = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Для этого  $L_i$ ,  $i = \overline{0, p}$ , следует искать в виде

$$\begin{cases} L_0(x) = (1-x)M_0(x), \\ L_i(x) = x(1-x)M_i(x), \quad i = \overline{1, p-1}, \\ L_p(x) = xM_p(x). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $M_0, M_p \in \mathbf{S}^{p-1}(0, 1)$ ,  $M_i \in \mathbf{S}^{p-2}(0, 1)$ ,  $i = \overline{1, p-1}$ , подлежат определению. Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Ортогональная, т. е. обладающая свойством  $\forall i, j = \overline{0, p}$ ,*

$$\begin{cases} (L_i, L_j) = 0, \quad i \neq j, \\ (L_i, L_j) \neq 0, \quad i = j, \end{cases} \quad (13)$$

система полиномов вида (12) не существует. При этом существует система (12), обладающая свойством

$$\begin{cases} (L_i, L_i) \neq 0, & i = \overline{0, p}, \\ (L_0, L_i) = (L_p, L_i) = 0, & i = \overline{1, p-1}, \\ (L_i, L_j) = 0, & i \neq j, \quad i, j = \overline{1, p-1}, \\ (L_0, L_p) \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Иными словами, можно построить систему (12), в которой ортогональны все полиномы, кроме  $L_0$  и  $L_p$  (или любой другой пары).

**Доказательство.** Невозможность существования доказывается от противного. Пусть построена ортогональная система  $L_0, \dots, L_{p-1}$ . Будем искать  $L_p$  в виде

$$L_p(x) = x \left( \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j x^j \right).$$

Тогда для определения  $L_p$  получаем  $p$  уравнений вида  $(L_i, L_p) = 0$  или  $\forall i = \overline{0, p-1}$ :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j (L_i, x^j) = 0. \quad (15)$$

Матрица  $M$  с коэффициентами  $M_{ij} = (L_i, x^j)$  — квадратная размерности  $p$ . Так как  $L_i$  линейно независимы,  $x^j$  линейно независимы, строки  $M$  также линейно независимы. Следовательно, СЛАУ (15) с нулевой правой частью имеет только тривиальное решение.

Конструирование системы, удовлетворяющей условиям (14), состоит из следующих шагов:

1) строится ортогональная система  $L_1, \dots, L_{p-1}$  с помощью стандартной процедуры Грама—Шмидта. Поскольку линейная комбинация финитных функций финитна, то достаточно в качестве начальной системы взять любые линейно независимые полиномы вида  $x(1-x)M_j(x)$ ,  $M_j \in \mathbf{S}^{p-2}(0, 1)$ ,  $j = \overline{1, p-1}$ ;

2) строится  $L_0$ :

$$\begin{aligned} W_0 &= (1-x)M_0(x), \quad M_0 \in \mathbf{S}^{p-1}(0, 1), \\ R_0 &= W_0 - \sum_{i=1}^{p-1} (L_i, W_0)W_0, \\ L_0 &= R_0/R_0(0); \end{aligned} \quad (16)$$

3) строится  $L_p$ :

$$\begin{aligned} W_p &= xM_p(x), \quad M_p \in \mathbf{S}^{p-1}(0, 1), \\ R_p &= W_p - \sum_{i=1}^{p-1} (L_i, W_p)W_p, \\ L_p &= R_p/R_p(1). \end{aligned} \quad (17)$$

## 1.2. Приближенная ортогонализация

Полиномы  $s_i \in \mathbf{S}^p(a, b)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , называются ортогональными на системе точек  $z_q \in [a, b]$ ,  $q = \overline{1, m}$ , если  $\forall i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, k}$ ,  $q = \overline{1, m}$ :

$$s_i(z_q) \cdot s_j(z_q) = 0. \quad (18)$$

Идея построения приближенно ортогонального базиса состоит в замене скалярного произведения (2) формой

$$\langle u, v \rangle_N = \sum_{i=0}^N w_i u(x_i) \cdot v(x_i). \quad (19)$$

Здесь точки  $x_i$  и веса  $w_i$  берутся из квадратур Гаусса или Гаусса—Лобатто [7]. Кроме того, полиномы  $L_i(x) \in \mathbf{S}^p(a, b)$  из определения (5) строятся ортогональными на системе точек  $x_i$ , в этом случае  $\langle L_i, L_j \rangle_{p+1} = 0$ ,  $i \neq j$ . Если порядок полиномов достаточно высок, то форма (19) достаточно точно аппроксимирует скалярное произведение (2). Для тангенциальных полиномов система точек  $x_i$  должна включать точки 0 и 1, поэтому необходимо использовать квадратуры Гаусса—Лобатто [13]. Использование точек квадратуры Гаусса для построения нормальных полиномов целесообразно только для случая неортогональных сеток, в случае же ортогональной сетки можно использовать полиномы ортогональные в скалярном произведении (2).

## 2. Вычислительный эксперимент

Цель эксперимента — сравнение интерполяционных свойств различных базисов, а также вычислительных затрат при их использовании. Введем обозначения:  $\mathbf{V}^p$  — стандартный базис, в котором в качестве нормальных и тангенциальных полиномов используются полиномы Лагранжа с корнями в узлах, определенных соотношением (7);  $\mathbf{V}_{or}^p$  — базис, в котором полиномы Лежандра применяются в качестве нормальных полиномов и полиномы, определенные уравнениями (14), — в качестве тангенциальных;  $\mathbf{V}_{gl}^p$  — базис, в котором нормальные полиномы — полиномы Лежандра, а тангенциальные полиномы — это полиномы, ортогональные на системе точек квадратуры Гаусса—Лобатто.

В качестве первого теста рассматривалась задача приближения векторной функции вида

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sin(xyz + \sin(x) \cos(z)) \\ \cos(xyz - \sin(y) \cos(x)) \\ e^{xyz-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

на единственном конечном элементе  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . В такой задаче требуется решить СЛАУ  $Mx = z$ , где  $z_i = (\mathbf{f}, \mathbf{N}_i)$ . Для данной симметричной положительно определенной матрицы  $A$  через  $\xi(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$  обозначим ее число обусловленности (здесь  $\lambda_{\min}(A)$  и  $\lambda_{\max}(A)$  — наименьшее и наибольшее собственные числа), через  $nz(A)$  — число ненулевых внедиагональных элементов матрицы  $A$ . Введем также обозначения:  $M^p$  — матрица массы для базиса  $\mathbf{V}^p$ ,  $M_{or}^p$  — матрица массы для базиса  $\mathbf{V}_{or}^p$ ,  $M_{gl}^p$  — диагональная матрица массы для базиса  $\mathbf{V}_{gl}^p$ ,  $\mathbf{e}^p$ ,  $\mathbf{e}_{or}^p$  и  $\mathbf{e}_{gl}^p$  — соответствующие базисам ошибки аппроксимации. В табл. 1 приведены значения числа ненулевых элементов в матрицах  $M^p$  и  $M_{or}^p$ , числа обусловленности и нормы ошибок для базисов порядков  $p = \overline{1, 6}$ .

В табл. 2 приведены те же величины для разбиения области  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  на восемь равных кубических конечных элементов. Разбиение формируется делением каждой из сторон пополам. Для исследуемых базисов имеет место априорная оценка погрешности [3, 4]

$$\|\mathbf{u} - \Pi^p \mathbf{u}\|_{H(\text{rot}, \Omega)} \leq Ch^p \|\mathbf{u}\|_{(H^{p+1}(\Omega))^3},$$

Т а б л и ц а 1. Сравнение базисов для одного элемента

$p$	$N$	$nz(M^p)$	$nz(M_{or}^p)$	$\xi(M^p)$	$\xi(M_{or}^p)$	$\ \mathbf{e}^p\ _{L^2}$	$\ \mathbf{e}_{or}^p\ _{L^2}$	$\ \mathbf{e}_{gl}^p\ _{L^2}$
1	12	36	36	8.99	8.99	0.267318	0.267318	—
2	54	918	96	137.7	143.4	0.0326764	0.0326764	0.0332324
3	144	6768	180	261	394.7	0.00553697	0.00553697	0.00553939
4	300	29700	288	394.3	867	0.000851805	0.000851805	0.000853101
5	540	96660	420	703.5	1440	9.9662e-05	9.9662e-05	9.96709e-05
6	882	258426	576	1148	2401	1.27609e-05	1.27609e-05	1.27661e-05

Т а б л и ц а 2. Сравнение базисов для восьми элементов

$p$	$N$	$nz(M^p)$	$nz(M_{or}^p)$	$\xi(M^p)$	$\xi(M_{or}^p)$	$\ \mathbf{e}^p\ _{L^2}$	$\ \mathbf{e}_{or}^p\ _{L^2}$	$\ \mathbf{e}_{gl}^p\ _{L^2}$
1	54	240	240	13.8	13.8	0.133513	0.133513	—
2	300	6636	672	65.4	91.4	0.00839971	0.00839971	0.00853654
3	882	51012	1296	182	240	0.000731928	0.000731928	0.000732591
4	1944	228552	2112	379.5	600	5.34082e-05	5.34082e-05	5.34827e-05
5	3630	752520	3120	684	1260	3.2368e-06	3.2368e-06	3.23774e-06
6	6084	2026260	4320	1125	2352	2.10231e-07	2.10231e-07	2.10297e-07

где  $h$  — характерный размер конечного элемента. Это подтверждается результатами вычислений, приведенными в табл. 2.

Для анализа временных затрат для каждого вида базиса рассмотрим задачу моделирования нестационарного трехмерного магнитного поля в неоднородной среде:

$$\begin{cases} \mathbf{rot rot H} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{rot J}_0, \\ \mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

в области  $\Omega = [-50, 50] \times [-50, 50] \times [-50, 50]$  (рис. 1). Источник поля — тонкая прямоугольная петля на границе областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . При этом  $\varepsilon(\Omega_1) = \varepsilon(\Omega_2) = \varepsilon_0$ ,  $\sigma(\Omega_1) = 0$ ,  $\sigma(\Omega_2) = 1$ . Задача в такой постановке описывает довольно широкий класс проблем, возникающих в геоэлектрике.

Сила тока задается функцией  $I(t)$ , схематично представленной на рис. 2:

$$I(t) = \begin{cases} f(t), t \in [0, T], \\ I_0, t \in (T, 4T), \\ g(t), t \in [4T, 5T], \\ 0, t > 5T, \end{cases} \quad (22)$$

где  $f(t)$  — монотонно возрастающая функция,  $f(0) = 0$ ,  $f(T) = I_0$ ,  $g(t)$  — монотонно убывающая функция,  $g(4T) = I_0$ ,  $g(5T) = 0$ .

После конечно-элементной дискретизации приходим к уравнению

$$R\mathbf{H} + M^s \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + M^e \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{f}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \int_{\Omega} \mathbf{rot N}_i \cdot \mathbf{rot N}_j \, d\Omega, & M_{ij}^s &= \int_{\Omega} \mu\sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \, d\Omega, \\ M_{ij}^e &= \int_{\Omega} \mu\varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \, d\Omega, & \mathbf{f}_i &= \int_{\Omega} \mathbf{rot J}_0 \cdot \mathbf{N}_i \, d\Omega. \end{aligned}$$

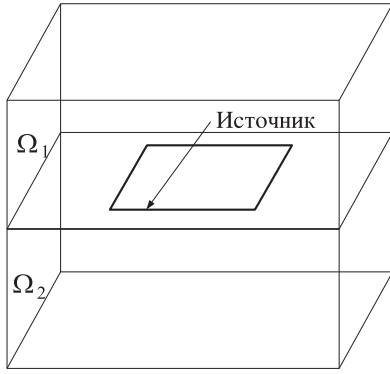
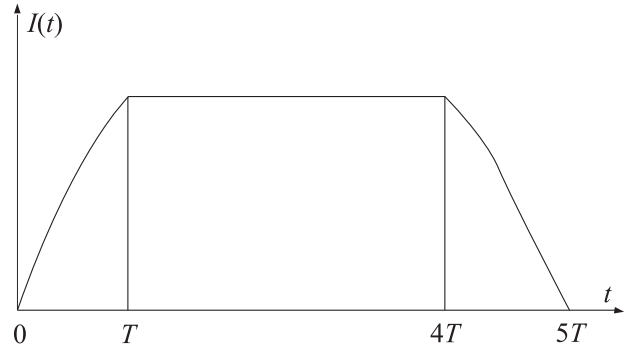
Рис. 1. Область моделирования  $\Omega$ 

Рис. 2. Зависимость силы тока от времени

С учетом того, что

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{N}_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{N}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{N}_i) \, d\Omega$$

и

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{N}_i) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{J}_0 \times \mathbf{N}_i) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

вычисление  $\mathbf{f}_i$  для случая бесконечно тонкого проводника сводится к простому одномерному интегралу.

Явная схема по времени для уравнения (23) имеет вид

$$\begin{aligned} R\mathbf{H}_n + \frac{1}{\Delta t_{n+1}} M^s (\mathbf{H}^{n+1} - \mathbf{H}^n) + \\ + M^e \left( \frac{2}{\Delta t_{n+1} s_n} \mathbf{H}^{n+1} - \frac{2}{\Delta t_{n+1} \Delta t_n} \mathbf{H}^n + \frac{2}{\Delta t_n s_n} \mathbf{H}^{n-1} \right) = \mathbf{f}_n, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ ,  $s_n = \Delta t_n + \Delta t_{n+1}$ , или

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{n+1} = \left[ \frac{1}{\Delta t_{n+1}} M^s + \frac{2}{\Delta t_{n+1} s_n} M^e \right]^{-1} \times \\ \times \left[ \mathbf{f}_n + \left( -R + \frac{1}{\Delta t_{n+1}} M^s + \frac{2}{\Delta t_{n+1} \Delta t_n} M^e \right) \mathbf{H}^n - \frac{2}{\Delta t_n s_n} M^e \mathbf{H}^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Для решения задачи (23) будем использовать схему (25) в сочетании с базисом с неполной ортогонализацией и базисом, ортогональным на системе точек Гаусса—Лобатто. Целью сравнения является установить:

- затраты памяти (число ненулевых элементов в матрицах массы и жесткости);
- возможность точного обращения матрицы массы и временные затраты на него.

При дискретизации (23) используем сетку  $10 \times 10 \times 10$  элементов. Будем обозначать через  $ssk(A)$  — максимальное число элементов, которое может содержаться в матрице  $A^{-1}$ . Фактически, это число равно числу элементов  $A$  при переводе ее в профильный формат (более распространенное название формата — SSK [14]). Расчеты для стандартного базиса не проводились, поскольку его использование заведомо более затратно



Т а б л и ц а 3. Сравнение характеристик матриц для различных базисов

$p$	$N$	$nz(M_{or}^p)$	$nz(R_{or}^p)$	$nz(R_{gl}^p)$	$ssk(M_{or}^p)$	$t_{or,c}$	$t_{gl,c}$
2	21 660	51 840	861 600	476 064	15 898 060	2151	51
3	75 690	106 560	4360 680	2825 064	12 6336 627	8753	169
4	182 520	180 480	14 563 200	10 348 416	544 551 216	35 352	461
5	360 150	273 600	38 220 600	28 841 400	1684 461 475	114 796	1091
6	626 580	385 920	85 554 720	67 339 296	4229 360 172	279 238	2324

и не дает никакого выигрыша в точности. В табл. 3 приведены данные о размерностях и числе ненулевых элементов в матрицах массы и жесткости, а также время решения для 7500 итераций по времени с шагом  $10^{-10}$  с. Значение  $T$  полагалось равным  $10^{-7}$ ,  $\sigma = 1$ . При использовании базиса  $\mathbf{V}_{or}^p$  для решения СЛАУ с матрицей  $M_{or}^p$  использовался метод сопряженных градиентов с требованием уменьшения невязки в  $10^{16}$  раз и ограничением на число итераций, равным 2000. При реализации использовалось распараллеливание основных операций (умножения матрицы на вектор, линейных комбинаций векторов, скалярного произведения и пр.) с помощью технологии OpenMP. Результаты измерений времени приведены для тестов на машине с четырехъядерным процессором Intel Core 2 Quad 6600 с распараллеливанием на четыре потока.

Из результатов вычислений можно сделать следующие выводы:

- точное обращение матрицы массы нецелесообразно, поскольку число элементов в матрице  $ssk(M_{or}^p)$  оказывается чрезвычайно высоким несмотря на малое исходное число элементов в матрице  $M$  (действительно, полное  $LL^T$ - или  $LDL^T$ -разложение матрицы, содержащей примерно  $0.5 \cdot 10^9$  элементов, потребует  $10^{13} - 10^{14}$  сложений и умножений, а обратная подстановка —  $0.5 \cdot 10^9$  сложений и умножений, что существенно сложнее, чем даже многократное решение СЛАУ с матрицей  $M$ );

- решение задачи с использованием базиса  $\mathbf{V}_{or}^p$  приблизительно в 50–120 раз более затратно по времени вычислений и примерно на 30–50 % — по объему памяти. Естественно, что подобные затраты связаны с требованием достаточно качественного решения СЛАУ на каждом шаге. В большинстве реальных случаев достаточно решения СЛАУ с требованием уменьшения нормы невязки в  $10^8 - 10^{10}$  раз, кроме того, на скорость решения СЛАУ большое влияние оказывает выбор начального приближения (которое можно находить, например, экстраполяцией), а также выбор предобуславливателя. Исследование этого вопроса, предположительно, позволит значительно сократить время решения СЛАУ с матрицей  $M_{or}^p$  и сделать его сравнимым с временем умножения матрицы  $R$  на вектор.

На рис. 3–7 показаны графики зависимостей  $\mathbf{H}_z(t)$  в точке  $(5, 0, 0)$  на дневной поверхности. Как видно, решения, полученные на базисах  $\mathbf{V}_{or}^2$  и  $\mathbf{V}_{gl}^2$ , значительно различаются. Кроме того, качественная картина поведения поля для этих двух базисов не соответствует физике процесса: на отрезке  $t \in [0, 10^{-6}]$  величина  $|\mathbf{H}_z(t)|$  должна монотонно возрастать, чего не видно на рис. 3. Из этого можно сделать вывод, что использовать базис  $\mathbf{V}_{gl}^2$  нецелесообразно в силу низкой точности. Очевидно также, что применение базисов пятого и шестого порядков не дает особых преимуществ, однако чрезвычайно усложняет вычислительную процедуру. Можно, таким образом, заключить, что по совокупности точности и вычислительных затрат для задач подобного класса лучше всего использовать базис  $\mathbf{V}_{gl}^4$  (из рис. 4 видно, что в случае  $\mathbf{V}_{gl}^3$  ошибка, обусловленная конструкцией базиса, все еще достаточно велика) и при необходимости измельчать

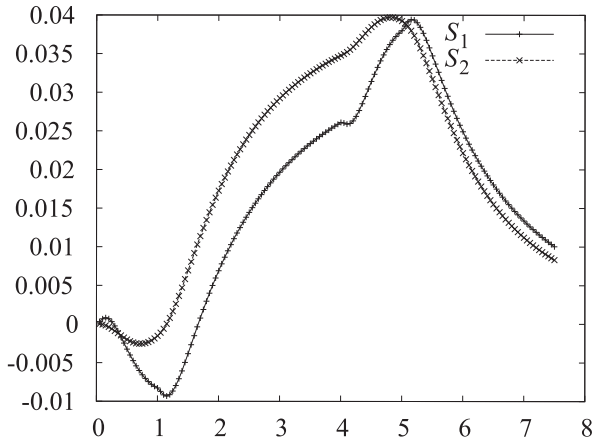


Рис. 3.  $\mathbf{H}_z(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t} = 10^7 t$ , в точке  $M$  для базисов  $\mathbf{B}_{or}^2$  (график  $S_1$ ) и  $\mathbf{B}_{gl}^2$  (график  $S_2$ )

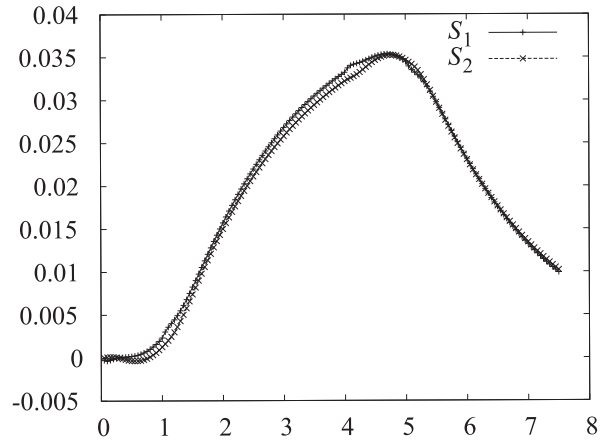


Рис. 4.  $\mathbf{H}_z(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t} = 10^7 t$ , в точке  $M$  для базисов  $\mathbf{B}_{or}^3$  (график  $S_1$ ) и  $\mathbf{B}_{gl}^3$  (график  $S_2$ )

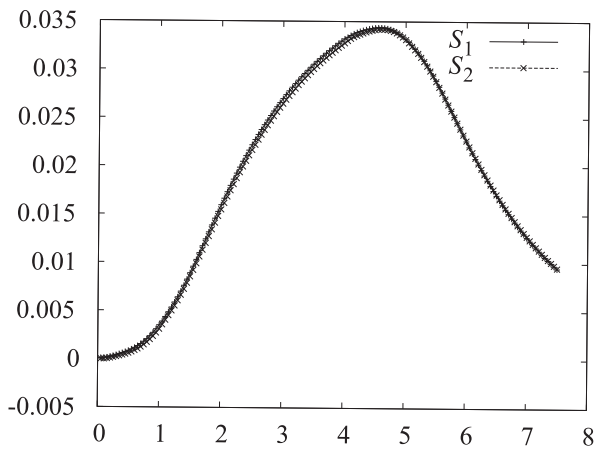


Рис. 5.  $\mathbf{H}_z(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t} = 10^7 t$ , в точке  $M$  для базисов  $\mathbf{B}_{or}^4$  (график  $S_1$ ) и  $\mathbf{B}_{gl}^4$  (график  $S_2$ )

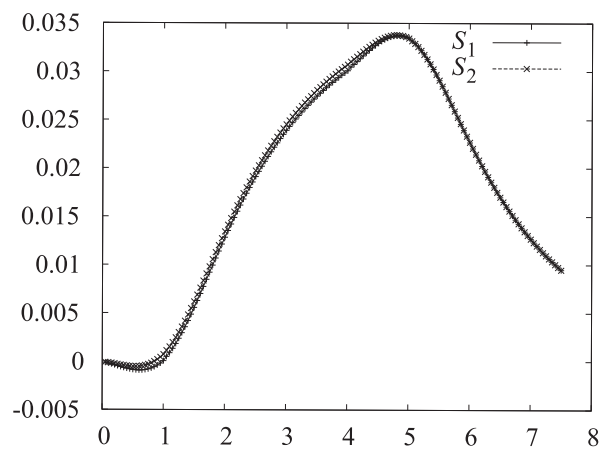


Рис. 6.  $\mathbf{H}_z(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t} = 10^7 t$ , в точке  $M$  для базисов  $\mathbf{B}_{or}^5$  (график  $S_1$ ) и  $\mathbf{B}_{gl}^5$  (график  $S_2$ )

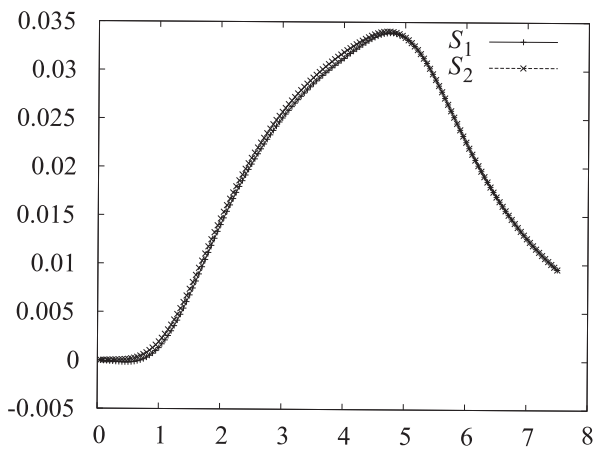


Рис. 7.  $\mathbf{H}_z(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t} = 10^7 t$  в точке  $M$  для базисов  $\mathbf{B}_{or}^6$  (график  $S_1$ ) и  $\mathbf{B}_{gl}^6$  (график  $S_2$ )

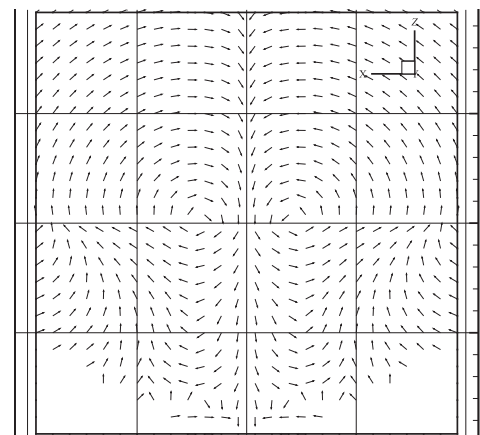


Рис. 8.  $\mathbf{H}$  в сечении плоскостью  $y = 0$  для базиса  $\mathbf{B}_{or}^3$

пространственную сетку. На рис. 8 приведен вид решения  $\mathbf{H}$  в сечении плоскостью  $y = 0$  для базиса  $\mathbf{V}_{or}^p$  и  $p = 3$ , полученный аналогичным методом на сетке  $30 \times 30 \times 30$  элементов.

## Заключение

В работе введен и исследован базис пространства  $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ , который строится с использованием частично ортогональных полиномов, что позволяет значительно уменьшить вычислительные затраты на решение уравнений Максвелла на ортогональных сетках. Проведено сравнение с базисом, предложенным в [7] для волнового уравнения, который был вполне успешно применен к задаче в области, содержащей  $\sigma \neq 0$ .

## Список литературы

- [1] BOSSAVIT A. Computational electromagnetism. Variational formulation, complementary, edge elements. San Diego: Acad. Press, 1998.
- [2] HIPTMAIR R. Finite elements in computational electromagnetism // Acta Numerica. 2002. N 11. P. 237–339.
- [3] NEDELEC J.C. Mixed finite elements in  $R^3$  // Numer. Meth. 1980. Vol. 35. P. 315–341.
- [4] NEDELEC J.C. A new family of mixed finite elements in  $R^3$  // Numer. Meth. 1986. Vol. 50. P. 57–81.
- [5] GRAGLIA R.D., WILTON D.R., PETERSON A.F. Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1997. Vol 45, N 3. P. 329–342.
- [6] RODRIGUE G., WHITE D. A vector finite element time-domain method for solving Maxwell's equations on unstructured hexahedral grids // SIAM J. Sci. Comp. 2001. Vol. 23, N 3. P. 683–706.
- [7] FISHER A., RIEBEN R.N., RODRIGUE G.H., WHITE D.A. A generalized mass lumping technique for vector finite-element solution of the time-dependent Maxwell equations // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 2005. Vol. 53, N 9. P. 2900–2910.
- [8] JENSEN M.S. High convergence order finite elements with lumped mass matrix // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1996. Vol. 39, N 2. P. 1879–1888.
- [9] HE B., TEIXEIRA F.L. Sparse and explicit FETD via approximate inverse hodge (mass) matrix // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. 2006. Vol. 16, N 6. P. 348–350.
- [10] BRUTMAN L. Lebesgue functions for polynomial interpolation — a survey // Annals of Numer. Math. 1997. Vol. 4. P. 694–704.
- [11] RIEBEN R., WHITE D., RODRIGUE G. Generalized high order interpolatory 1-form bases for computational electromagnetics // Proceedings of the 2002 IEEE International Antennas and Propagation Symposium. San Antonio, Texas. 2002. Vol. 4. P. 686–689.
- [12] VOSSE F.N. VAN DE, MINEV P. Spectral element methods: theory and applications // Eindhoven University of Technology Report 96-W-001 ISBN 90-236-0318-5. 1996.
- [13] БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. Т. 1.
- [14] SAAD Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: PWS Publishing Company, 1996.

*Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.,  
в переработанном виде — 3 декабря 2008 г.*