Об одном классе переобусловливателей для задач в смешанной постановке и их обращении прямым методом

П. Е. Попов, А. А. Калинкин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `alexander.a.kalinkin@intel.com`

This paper is devoted to an effective inversion method for the saddle-point matrix that corresponds to a grid Laplace operator in the mixed formulation.

Введение

При численном решении эллиптических краевых задач широко используется смешанный метод конечных элементов (МКЭ), аппроксимирующий задачу в смешанной вариационной постановке (см. [1] и приводимую там библиографию). В результате такой аппроксимации возникает система линейных алгебраических уравнений со знакопеременным спектром, имеющая форму задачи о поиске седловой точки. Существует большое количество публикаций, посвященных методам решения таких задач, связанных с выбором подходящего переобусловливателя [2, 3] в итерационных процессах, для которого имеется экономичный метод его прямого обращения на векторе. В частности, широко используются подходы, сводящие решение задачи к обращению сеточного оператора Лапласа в "прямоугольной" области с равномерной сеткой. Однако в качестве переобусловливателя обычно используется матрица, соответствующая прямой постановке (пятиточечная схема), тогда как, на наш взгляд, естественно было бы использовать матрицу, соответствующую дополнению Шура сеточного оператора для смешанной постановки. И если обращение сеточного оператора Лапласа, соответствующего прямой постановке, изучено и сводится к применению метода разделения переменных и процедур быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ) [4], то аналогичной методики прямого обращения дополнения Шура при некоторой стандартной аппроксимации задачи в смешанной постановке в литературе мы не нашли.

1. Постановка задачи и некоторые обозначения

Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник $(a_x, b_x) \times (a_y, b_y)$ и $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ — его граница, причем каждая сторона $\partial\Omega$ полностью принадлежит либо Γ_D, либо Γ_N. Далее, пусть p — скалярная функция потенциала, удовлетворяющая следующим условиям:

$$p = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_N. \tag{1.1}$$

Тогда уравнение Пуассона в смешанной формулировке выглядит следующим образом: по заданной функции f найти пару функций $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \Gamma_{\mathrm{N}}) \times L_2(\Omega)$ таких, что имеют место интегральные тождества

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int\limits_{\Omega} p \; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{div}(\Omega, \Gamma_{_N}), \\ \int\limits_{\Omega} q \; \nabla \cdot \mathbf{u} = \int\limits_{\Omega} f \; q \quad \forall q \in L_2(\Omega), \end{cases} \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \Gamma_{_N}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega), \; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_{\mathrm{N}} \}$$

— замкнутое подпространство пространства

$$\mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^2, \; \nabla \cdot \mathbf{v} \in L_2(\Omega) \right\}.$$

Рассмотрим аппроксимацию задачи (1.2) по смешанному МКЭ на прямоугольной равномерной сетке. Для аппроксимации $L_2(\Omega)$ будем использовать пространство кусочно-постоянных функций, а для аппроксимации пространства $\mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega, \Gamma_{\mathrm{N}})$ — элементы Равьяра—Тома наименьшей степени $\mathbf{RT}_{[0]}$ [1]. В итоге, учитывая граничные условия на матричном уровне, мы получаем седловую систему линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{h} \\ p_{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{h} \\ f_{h} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Для различных вариантов задания граничных условий на противоположных сторонах прямоугольника $(\alpha, \beta = D, N)$ введем набор матриц $A_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, набор векторов $u^k_{\alpha\beta}$, $p^k_{\alpha\beta}$ и набор чисел $\gamma^k_{\alpha\beta}$. Чтобы излишне не перегружать работу, приведем набор матриц только для случая $\alpha\beta = \mathrm{DD}$. Набор матриц для условий Неймана слева/справа получается удалением первого/последнего столбца и строки у матриц A_{DD}, M_{DD} соответственно и первой/последней строки у матрицы B_{DD}.

Дирихле—Дирихле (DD):

$$A_{\mathrm{DD}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathrm{DD}} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

$M_{\mathrm{DD}} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, 1, .., 1, \frac{1}{2}\right)$, где матрицы имеют размерности:

$A_{\mathrm{DD}},\ M_{\mathrm{DD}} - (n+1) \times (n+1),\ B_{\mathrm{DD}} - (n) \times (n+1),$

$$\gamma^k_{\mathrm{DD}} = 2 \sin \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 1 \ldots n,$$

$$p^k_{\mathrm{DD}}(i) = \sin \frac{k\pi(2i-1)}{2n}, \quad i, k = 1 \ldots n,$$

$$u^k_{\mathrm{DD}}(i) = \cos \frac{k\pi i}{n}, \quad i, k = 0 \ldots n.$$

Дирихле—Нейман (DN):

$\gamma^k_{\text{DN}} = 2\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \quad k = 0\dots n-1,$

$p^k_{\text{DN}}(i) = \sin\dfrac{(2k+1)\pi(2i+1)}{4n} \quad i,k = 0\dots n-1,$

$u^k_{\text{DN}}(i) = \cos\dfrac{(2k+1)\pi i}{2n} \quad i,k = 0\dots n-1.$

Нейман—Дирихле (ND):

$\gamma^k_{\text{ND}} = 2\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k = 1\dots n,$

$p^k_{\text{ND}}(i) = \cos\dfrac{(2k+1)\pi(2i+1)}{4n}, \quad i,k = 1\dots n,$

$u^k_{\text{ND}}(i) = \sin\dfrac{(2k+1)\pi i}{2n}, \quad i,k = 1\dots n.$

Нейман—Нейман (NN):

$\gamma^k_{\text{NN}} = 2\sin\dfrac{k\pi}{2n}, \quad k = 0\dots n-1,$

$p^k_{\text{NN}}(i) = \cos\dfrac{k\pi(2i+1)}{2n}, \quad i,k = 0\dots n-1,$

$u^k_{\text{NN}}(i) = \sin\dfrac{k\pi i}{n}, \quad i,k = 1\dots n-1.$

Простые выкладки приводят к следующим равенствам:

$$A_{\alpha\beta}u^k_{\alpha\beta} = \frac{6-(\gamma^k_{\alpha\beta})^2}{6}M_{\alpha\beta}u^k_{\alpha\beta}, \quad B_{\alpha\beta}p^k_{\alpha\beta} = \frac{\gamma^k_{\alpha\beta}}{h}M_{\alpha\beta}u^k_{\alpha\beta}, \quad B^T_{\alpha\beta}u^k_{\alpha\beta} = \frac{\gamma^k_{\alpha\beta}}{h}p^k_{\alpha\beta}. \tag{1.4}$$

Комбинируя эти уравнения, легко показать, что

$$B^T_{\alpha\beta}A^{-1}_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}p^k_{\alpha\beta} = \lambda^k_{\alpha\beta}p^k_{\alpha\beta}, \quad \lambda^k_{\alpha\beta} = \frac{6(\gamma^k_{\alpha\beta})^2}{(6-(\gamma^k_{\alpha\beta})^2)h^2}. \tag{1.5}$$

2. Разделение переменных для седловой задачи

Рассмотрим нумерацию, при которой сначала нумеруются компоненты u_x, u_y вектора $\mathbf{u}$, а затем p. В итоге система (1.3) с использованием тензорных произведений [5] и указанной нумерации принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} I_y\otimes A_x & 0 & I_y\otimes B_x \\ 0 & A_y\otimes I_x & B_y\otimes I_x \\ I_y\otimes B_x^T & B_y^T\otimes I_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ f \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где матрица I_s — единичная, а матрицы A_s и B_s имеют вид в зависимости от того, какие условия заданы на противоположных сторонах, перпендикулярных к направлению $s = x, y$. Далее, под u^k_s, p^k_s понимаем векторы, которые, как и матрицы A_s, M_s, B_s, определены выше.

Перейдем от седловой матрицы (2.1) к дополнению Шура для p:

$$(I_y\otimes B_x^TA_x^{-1}B_x + B_y^TA_y^{-1}B_y\otimes I_x)p = g, \tag{2.2}$$

где $g = (I_y\otimes A_x^{-1})g_x + (A_y^{-1}\otimes I_x)g_y - f$. Нам потребуется умножить g_x и g_y на матрицы, обратные к $I_y\otimes A_x$, $A_y\otimes I_x$, что можно сделать методом прогонки. Решение p будем искать в виде однократного ряда по одному из направлений, к примеру по x:

$$p = \sum_k q^k \otimes p_x^k. \tag{2.3}$$

Правую часть g представим в виде ряда Фурье:

$$g = \sum_k r^k \otimes p_x^k. \tag{2.4}$$

В итоге, подставляя (2.3) и (2.4) в систему (2.2), получим равенство двух рядов. Так как p_x^k образуют ортогональный базис, то, приравнивая покомпонентно и опуская индекс k, получим следующие системы линейных уравнений:

$$(B_y^T A_y^{-1} B_y + \lambda_x I_y)q = r. \tag{2.5}$$

Вводя новую переменную $v = -A_y^{-1} B_y q$, (2.5) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} A_y & B_y \\ B_y^T & -\lambda_x I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Дальнейшее решение системы принципиально различается для случаев $\lambda_x = 0$ и $\lambda_x \neq 0$.

I. Если $\lambda_x \neq 0$, то q выражается через v:

$$q = \frac{B_y^T v + r}{\lambda_x}. \tag{2.7}$$

В итоге получаем

$$(\lambda_x A_y + B_y B_y^T)v = -B_y r, \tag{2.8}$$

где матрица $\lambda_x A_y + B_y B_y^T$ — трехдиагональная, поскольку A_y и $B_y B_y^T$ — трехдиагональные матрицы. Так как $\lambda_x \neq 0$, эта матрица является невырожденной. Полученная система (2.8) эффективно решается методом прогонки. Далее, используя (2.7), находим искомую компоненту ряда.

II. Если $\lambda_x = 0$, что возможно, только если на обеих сторонах, перпендикулярных к направлению x, заданы условия Неймана ($\alpha\beta = NN$) и рассматривается компонента ряда при $k = 0$, система (2.6) является седловой и ее решение определяется типом граничных условий.

• Если на сторонах, перпендикулярных к направлению y, заданы различные условия ($\alpha\beta = DN$ или $\alpha\beta = ND$), то матрица B_y квадратная и невырожденная, откуда получаем $v = -(B_y^T)^{-1} r$ и $q = -B_y^{-1} A_y v$.

• Если на сторонах задано условие Дирихле ($\alpha\beta = DD$), то решение $B_y^T v = -r$ определяется с точностью до константы. Пусть $v = \acute{v} + c \cdot 1$, где единицей обозначается вектор, все компоненты которого — единицы. Частное решение $\acute{v}$ можно получить, например, полагая первую компоненту $\acute{v}$ равной единице, тогда система $B_y^T \acute{v} = -r$ однозначно разрешима. Для q получаем $B_y q = -A_y(\acute{v} + c \cdot 1)$, решение которой существует, если ее правая часть ортогональна единице, поскольку $B_y^T 1 = 0$, откуда $c = -\dfrac{(A_y \acute{v}, 1)}{(1, 1)}$. Таким образом, мы нашли v, теперь, выкидывая одну из строк матрицы B_y, например последнюю, находим q.

• Далее рассмотрим случай, когда на всех сторонах заданы условия Неймана. Как известно, решение задачи Неймана определяется с точностью до константы и существует, только если правая часть ортогональна единице. В итоге получаем, что $(f, 1) = 0$, откуда $(r, 1) = 0$, т. е. решение задачи $B_y^T v = -r$ существует и единственно. Выкидывая одну из строк матрицы B_y^T, например последнюю, находим v, так как полученная матрица двухдиагональная и невырожденная. Далее получаем, что $B_y q = -A_y v$. Решение q данной системы существует с точностью до константы. Полагая, например, первую компоненту решения равной единице, получаем однозначную разрешимость системы. Найдя все компоненты ряда q_x^k и воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для базисных векторов p_x^k, получим искомое решение.

Замечание. Аналогичным способом можно решить и трехмерную задачу. В этом случае нужно найти решение системы вида

$$\begin{pmatrix} I_z \otimes I_y \otimes A_x & 0 & 0 & I_z \otimes I_y \otimes B_x \\ 0 & I_z \otimes A_y \otimes I_x & 0 & I_z \otimes B_y \otimes I_x \\ 0 & 0 & A_z \otimes I_y \otimes I_x & B_z \otimes I_y \otimes I_x \\ I_z \otimes I_y \otimes B_x^T & I_z \otimes B_y^T \otimes I_x & B_z^T \otimes I_y \otimes I_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \\ f \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Как и для двумерного случая, перейдем к дополнению Шура для p:

$$(I_z \otimes I_y \otimes B_x^T A_x^{-1} B_x + I_z \otimes B_y^T A_y^{-1} B_y \otimes I_x + B_z^T A_z^{-1} B_z \otimes I_y \otimes I_x)p = g, \quad (2.10)$$

где $g = (I_z \otimes I_y \otimes A_x^{-1})g_x + (I_z \otimes A_y^{-1} \otimes I_x)g_y + (A_z^{-1} \otimes I_y \otimes I_x)g_z - f$.

Решение p будем искать в виде двукратного ряда по двум направлениям, к примеру x и y:

$$p = \sum_k \sum_l q^{k,l} \otimes p_y^l \otimes p_x^k. \quad (2.11)$$

Разложим правую часть g в ряд Фурье по выбранным направлениям:

$$g = \sum_k \sum_l r^{k,l} \otimes p_y^l \otimes p_x^k. \quad (2.12)$$

В итоге получим равенство двух рядов. Так как p_x^k и p_y^l образуют ортогональные базисы, приравнивая покомпонентно и опуская индексы k и l, запишем следующие системы линейных уравнений:

$$(B_z^T A_z^{-1} B_z + (\lambda_x + \lambda_y) I_z) q = r. \quad (2.13)$$

Вводя новую переменную $v = -A_z^{-1} B_z q$, (2.13) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} A_z & B_z \\ B_z^T & -(\lambda_x + \lambda_y) I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Эта система решается аналогично (2.6).

3. Численные эксперименты

Приведем численное сравнение переобусловливателя на основе дополнения Шура для седловой задачи и переобусловливателя на основе прямой постановки. Для этой цели рассмотрим следующие уравнения с переменным коэффициентом:

$$\int\limits_{\Omega} \rho \nabla p \nabla q = \int\limits_{\Omega} f\ q \quad \forall q \in \mathbf{H}^1_0(\Omega),$$

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\rho}\mathbf{u}\mathbf{v} - \int\limits_{\Omega} p\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathrm{div}}(\Omega), \\ -\int\limits_{\Omega} q\ \nabla\mathbf{u} = -\int\limits_{\Omega} f\ q \quad \forall q \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

— соответственно прямые и смешанные постановки для неоднородной задачи Пуассона в области $\Omega = (0,1)^2$ с однородными условиями Дирихле, а в качестве коэффициента выбирается функция $\rho(x,y) = (x+y)*\lambda + 1$. Тогда

$$A_1(\lambda)p_h = f_1, \quad \begin{pmatrix} A_2(\lambda) & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

— соответствующие прямая и смешанная сеточные задачи на равномерной сетке, причем прямая постановка аппроксимируется билинейными функциями, а смешанная — элементами Равьяра—Тома. Обозначим $A(\lambda) = B^T A_2^{-1}(\lambda)B$ дополнение Шура для седловой системы.

В табл. 1 и 2 приведены значения $\mathrm{cond}_2(C^{-1}A(\lambda))$, вычисленные с помощью степенного метода. В качестве C в табл. 1 бралась матрица $A_1(0)$, которую мы можем эффективно обратить [4], а в табл. 2 — матрица $A(0)$, эффективному обращению которой и посвящена данная работа. В строках этих таблиц указывается параметр равномерной сетки $n = 1/h$, а в столбцах — соответствующее значение λ, по которому строится плотность ρ. Отметим, что n в таблицах различается на единицу из-за быстрого дискретного преобразования Фурье, которые реализованы для степеней двойки.

Из таблиц видно, что на больших размерностях $\mathrm{cond}_2(A^{-1}(0)A(\lambda))$ меньше $\mathrm{cond}_2(A_1^{-1}(0)A(\lambda))$ в несколько раз. Необходимо отметить, что при реализации обоих

Таблица 1. $\mathrm{cond}_2(A_1^{-1}(0)A(\lambda))$

λ	Параметр сетки n								
	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
2	3.26	6.46	9.51	12.29	14.52	16.23	17.46	18.29	18.87
4	3.49	7.73	12.69	17.80	22.57	26.44	29.41	31.51	33.01
8	3.66	8.90	16.22	25.17	34.59	43.20	50.35	50.20	59.70
16	3.80	9.78	19.45	33.23	50.21	68.15	84.61	97.96	108.49

Таблица 2. $\mathrm{cond}_2(A^{-1}(0)A(\lambda))$

λ	Параметр сетки n								
	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2	2.66	3.54	4.17	4.55	4.77	4.88	4.94	4.96	4.97
4	3.42	5.11	6.57	7.61	8.28	8.62	8.81	8.89	8.93
8	4.14	6.98	10.02	12.64	14.50	15.70	16.32	16.61	16.78
16	4.70	8.76	14.10	19.83	24.77	28.44	30.55	31.62	32.24

переобусловливателей по два раза применяется метод быстрого дискретного преобразования Фурье и один раз метод прогонки, а для реализации предложенного нами переобусловливателя дополнительно используется еще по одному умножению на двухдиагональные матрицы B и B^T, что практически не повышает трудозатрат. Таким образом, предложенный подход дает существенное уменьшение числа обусловленности.

Список литературы

[1] Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. N.Y.: Springer-Verlag, 1991.

[2] Kuznetsov Y.A., Wheeler M.F. Optimal order substructuring preconditioners for mixed finite element methods on nonmatching grids // East-West J. Num. Math. 1995. Vol. 3. P. 127–143.

[3] Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002. 239 с.

[4] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

[5] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Методы вычислений. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.