Аппроксимационные свойства метода конечных суперэлементов Федоренко*

С. А. Лазарева
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия
e-mail: Lazarevas@gmail.com

This paper addresses a development of the Fedorenko finite super element method (FSEM). A priori error estimates are obtained; saturability of the method in Sobolev spaces is determined. The conditions leading to the derivatives convergence are indicated, corresponding error estimates are given. Regularity and accuracy of the numerical solution on the Sobolev class of functions are shown. The investigation deals with the Dirichlet problem, but can be extended over a general class of linear elliptic problems.

Введение

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) впервые предложен в работах Федоренко и его коллег [1, 2]. Он входит в класс численных методов, основанных на декомпозиции области в сочетании с выбором особой аппроксимации решения. Приближенное решение МКСЭ заведомо содержит в себе некоторые из свойств, присущих рассматриваемой задаче. Это позволяет проводить расчеты ряда "сложных" вычислительных задач. В работах [1–7] эффективность МКСЭ подтверждена примерами решения разнообразных физических проблем. Для их авторов преимущественный интерес представляют задачи, которые характеризуются наличием множества резких особенностей, проявляющихся на малых пространственных областях. Такие особенности могут представлять собой как "сингулярности" самого решения, так и резкие неоднородности области расчета.

Рассмотрим простую задачу Дирихле для дифференциального уравнения Лапласа в двумерной области $\Omega \subset R^2$. Расчетная область представляет собой квадрат с исключенными из него кругами, радиус которых мал по сравнению с размерами Ω. Полагаем, что в окрестностях таких мелких отверстий сосредоточены все резкие "сингулярности" решения:

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \text{ на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где u — искомая функция; $\partial\Omega$ — граница расчетной области; g — некоторая известная функция на $\partial\Omega$.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00421).

Подобно обычному методу конечных элементов (МКЭ) расчетная область разбита на некоторое число подобластей, называемых суперэлементами. Каждое место сосредоточения особенности (отверстие, неоднородность и т. п.) заключено строго в одном из суперэлементов. Каждая базисная функция МКСЭ $\Phi_i(x)$ единообразно задается в каждом из суперэлементов Ω_k и является решением задачи Дирихле следующего вида [2–5]:

$$-\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_k,$$
$$\Phi_i = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_k,$$

где граничные базисные функции φ_i, заданные на $\partial\Omega_k$, принимают значения

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{3}$$

в узлах суперэлемента P_j, $j = 1, \ldots, n$, включая возможную границу отверстия в данном суперэлементе, обозначенную через P_0; δ_{ij} — символ Кронекера. Узлы P_j с индексами $j = 1, \ldots, n$ расположены только на границе суперэлемента: на его ребрах, в углах. Функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют граничному условию первого рода на $\partial\Omega$ согласно (2):

$$\varphi_i(P_i) = g(P_i), \quad P_i \in \partial\Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

С узлов на ребра границы суперэлемента функции φ_i продолжаются некоторым “стандартным” интерполянтом: полиномиальным, кусочно-линейным, сплайн-интерполянтом и т. д.

Заметим, что сингулярности задачи в окрестностях отверстий учтены посредством базисной функции с нулевым индексом $\Phi_0(x)$ в каждом из суперэлементов. Остальные функции $\Phi_i(x)$, $i \neq 0$, при наличии отверстия в суперэлементе Ω_k обращаются в нуль на его границе согласно (3). Если в суперэлементе отверстия нет, то $\Phi_0(x) \equiv 0$.

Решение задачи внутри каждого отдельного суперэлемента будем искать при помощи построенного базиса:

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x), \quad x \in \Omega_k. \tag{5}$$

Таким образом определено приближенное решение МКСЭ $\bar{u}(x)$ во всей расчетной области $\Omega = \cup_k \Omega_k$. Неизвестные значения a_i найдены с помощью схемы метода Бубнова—Галеркина при выборе функций $\Phi_i(x)$ в качестве базисных и пробных [3–7].

Для исследования МКСЭ в работах [3, 4] предложен теоретический алгоритм, позволяющий строить его аппроксимации по отношению к широкому кругу задач математической физики. Исследования опираются на общую запись формулы Грина и охватывают слабые решения класса задач, описываемых линейными эллиптическими уравнениями. Установлена связь аппроксимаций МКСЭ с проекционными методами и показано, что для сходимости метода на пространстве слабых решений необходимо и достаточно сходимости аппроксимаций, задаваемых в пространстве их следов. Помимо качественного анализа метода проведено и его детальное численное исследование. Предложены различные варианты МКСЭ. Подтверждена расчетная эффективность для задач, содержащих резкие особенности в расчетной области как в пространственно-двумерном, так и в трехмерном случае [5, 6].

Дальнейший интерес представляет получение априорных оценок погрешностей МКСЭ. Явным образом выделяется вопрос о влиянии изначального выбора варианта аппроксимации на границе разбиения на результирующую точность расчетов метода. Невыясненным является также факт сходимости либо расходимости ошибок производных гладкого решения произвольного порядка. Данная работа посвящена результатам, полученным в ходе дальнейшей разработки и исследования МКСЭ Федоренко.

1. Аппроксимация МКСЭ в пространстве $\mathbf{H^1}(\boldsymbol{\Omega})$

Качественный анализ различных вариантов МКСЭ осуществляем на примере модельной задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1), (2) в пространственно-двумерном случае. Исследование проводим в предположении достаточной гладкости функции граничного условия g и границы области $\partial\Omega$ для того, чтобы искомое решение принадлежало пространству Соболева $H^R(\Omega)$, $R \geq 1$ [8].

Как правило, суперэлемент Ω_k является многоугольником, и необходимо учитывать тот факт, что $\partial\Omega_k$ принадлежит классу C^0 гладкости. Мы вправе рассматривать лишь тот случай, когда $\partial\Omega_k$ — многоугольная граница либо граница, состоящая из конечного числа гладких кривых, т. е. $\partial\Omega_k = \cup_l I_{kl},\ l = 1,\ldots,L$. Введем обозначения: $|I|$ — длина I_{kl}; ν — порядок граничного сплайна φ_i, построенного при разбиении границы $S = \cup_k \partial\Omega_k$ на $(N-1)$ отрезок; $\bar{u}$ — приближенное решение; $\pi_\nu^N u$ — его сплайн-интерполянт [9].

Будем говорить [9], что метод имеет насыщение (насыщаем) на классах $H^R(\Omega)$, $R > 1$, если $\exists R_0$, для которого:

1) $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{u\in H^R(\Omega)} \left\|u - \pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)} = 0$ при $R \leq R_0$;

2) $\sup\limits_{u\in H^P(\Omega)} \left\|u - \pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)} = o(\sup\limits_{u\in H^R(\Omega)} \left\|u - \pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)})$ при $R < P \leq R_0$;

3) при $R_0 < R$ существует $u \in H^R(\Omega)$ и не зависящая от ν константа $c > 0$, такая, что $\left\|u - \pi_\nu^N(u)\right\|_{H^1(\Omega)} \geq c \sup\limits_{u\in H^{R_0}(\Omega)} \left\|u - \pi_\nu^N u\right\|_{H^1(\Omega)}$.

Следующее утверждение базируется на теореме о разрешимости задачи Дирихле в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ со следами класса $H^{1/2}(S)$. Оно устанавливает свойство насыщаемости МКСЭ и априорные оценки в $H^1(\Omega)$. Его получение использует теорию интерполяции пространств [10], методы МКЭ [11], результаты насыщаемости при полиномиальной интерполяции в пространстве L_2 [12]. Исследование МКСЭ в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ сводится к работе со следами решений из $H^{1/2}(S)$, где мы можем пользоваться и свойствами стандартных оценок при их соответствующем корректном преобразовании.

Утверждение 1. Пусть МКСЭ соответствует интерполяции лагранжевыми сплайнами на границах суперэлементов S, разбиение S равномерно с характерным шагом сетки $|I|$. Тогда МКСЭ имеет насыщение по гладкости в пространстве $H^1(\Omega)$ на классах $H^s(\Omega)$, $s > 1$, $s \in R$. Классом насыщения является $H^{\nu+3/2}(\Omega)$, порядком насыщения — $O(1/N^s)$. Справедливы следующие априорные оценки погрешностей метода в пространстве $H^1(\Omega)$.

При $\nu \geq R - 3/2$:

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C M_{R-1/2}^{1/2} M_{R-3/2}^{1/2} \frac{1}{(\nu+1)^{R-1}} |I|^{R-1/2} |u|_{H^R(\Omega)},$$

где константа C зависит от параметров исходного оператора и постоянных в неравенствах вложения, а $M_{R-1/2}$ и $M_{R-3/2}$ зависят только от R.

При $\nu \leq R-3/2$

$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\nu \cdot |I|^{\nu+1} \, |u|_{H^{\nu+3/2}(\Omega)}\,,$$

где константа C_ν зависит только от ν, параметров исходного оператора и постоянных неравенств вложения.

Повышение порядка полиномов на суперэлементных границах повлечет за собой аппроксимант более высокой точности МКСЭ в пространстве $H^1(\Omega)$ (для $\nu \geq R-3/2$). Это подтверждено полученными оценками. В случае аппроксимации производных решения при помощи МКСЭ в пространстве $H^1(\Omega)$ такая ситуация изменится, а исследование потребует привлечения дополнительных фактов. Проблема регулярности ограничения приближенного решения МКСЭ на отдельный суперэлемент представляет как отдельный интерес, так и служит для получения оценок погрешностей производных. Далее приведем асимптотику приближенного решения МКСЭ в окрестностях углов суперэлементного разбиения и выясним свойства его гладкости. Результаты, приведенные ниже для угла суперэлемента, можно обобщить на всю расчетную область.

2. Гладкость решения. Аппроксимация производных

Утверждение 2. Пусть Λ — один из углов суперэлемента с границей $\partial\Lambda$ раствора α, $0<\alpha<\pi$; P — его вершина; $Pr\theta$ — полярная система координат, связанная с Λ. Граничные базисные функции МКСЭ в некоторой окрестности P, на границах угла $\partial\Lambda_1$ и $\partial\Lambda_2$, представляют собой полиномы порядка не выше ν. Тогда приближенное решение $\bar{u}$ МКСЭ в этой окрестности представимо в виде

$$\bar{u} = \begin{cases} \sum\limits_{q=0}^{\nu} r^q\left(\bar{a}_q\cos(q\theta)+\bar{b}_q\sin(q\theta)\right), \pi/\alpha \notin \{b\in Z, b\leq\nu\}\,, \\ \sum\limits_{\substack{q=j\pi/\alpha \\ 0\leq q\leq\nu}} \left[r^q\left(\bar{a}_q\cos(q\theta)+\bar{c}_q\theta\cos(q\theta)\right)+r^q\ln r\bar{c}_q\sin(q\theta)\right]+ \\ +\sum\limits_{\substack{q\neq j\pi/\alpha \\ 0\leq q\leq\nu}} r^q\left(\bar{a}_q\cos(q\theta)+\bar{b}_q\sin(q\theta)\right), j\pi/\alpha \in \{b\in Z, b\leq\nu\} \quad \forall j=1,2,..., \end{cases} \tag{6}$$

где $\bar{a}_q = A_q^2$; $\bar{b}_q\sin(q\alpha) = \left(A_q^1 - A_q^2\cos(q\alpha)\right)$; $\bar{c}_q = \dfrac{1}{\alpha}\left(A_q^1 - \dfrac{1}{\cos(q\alpha)}A_q^2\right)$, $q = 0,...,\nu$; A_q^1, A_q^2 — коэффициенты решения (граничного полинома $\bar{\varphi}$) на границах $\partial\Lambda_1$, $\partial\Lambda_2$ перед r^q.

Полученное выражение определяет и гладкость приближенного решения $\bar{u}$ МКСЭ в соболевских пространствах. Если $\pi/\alpha \in Z$ и $\pi/\alpha \leq \nu$, то решение $\bar{u}$ нерегулярно по отношению к граничному условию так, что $\bar{u} \in H^{\pi/\alpha}(\Omega_k)$ для произвольных $\bar{a}_q$, $\bar{b}_q$, $\bar{c}_q$. В противном случае решение в угле Λ обладает бесконечной гладкостью, а приближенное решение в суперэлементе Ω_k имеет максимальную гладкость по отношению к граничному условию на $\partial\Omega_k$.

С использованием асимптотики приближенного решения в углах суперэлементов могут быть получены априорные оценки погрешностей производных решения МКСЭ локально — в данных углах. Для этого использовано разложение произвольной гармонической функции в области суперэлемента Ω_k со следами класса $\prod\limits_l H^{R-1/2}(I_{kl})$. Разложение может быть найдено из результатов для весовых пространств Соболева “с неоднородной нормой” [13].

Сведем сначала результаты для априорных оценок погрешностей приближения производных решения первого порядка в МКСЭ в норме пространства $H^1(\Lambda)$ (или, что одно и то же, оценок самого решения в норме $H^2(\Lambda)$ в угле Λ).

Утверждение 3. Пусть вариант МКСЭ соответствует полиномиальной аппроксимации порядка не выше ν на границах $\partial\Lambda$ в окрестности угла Λ суперэлементного разбиения раствора $0 < \alpha < \pi$. Тогда априорные оценки погрешностей МКСЭ в пространстве $H^2(\Lambda)$ в этом угле имеют следующий вид.

1. Случай $\pi/\alpha \notin \{b \in Z, b \leq \nu\}$. Для многоугольного суперэлемента это эквивалентно выполнению: α/π не принадлежит множеству рациональных приведенных дробей, или же для рационального дробного раствора α/π выполнено $\nu = 0, 1$, или $\nu = 2$ при $\alpha < \pi/2$. Тогда при $\nu \leq R - 3/2$

$$\|u - \bar{u}\|_{2,\Lambda} \leq C_\nu \, |I|^\nu \left[|u|_{H^{\nu+1}(\partial\Lambda)} + |\partial u/\partial n|_{H^\nu(\partial\Lambda)} \right],$$

где C_ν зависит только от ν, при $\nu \geq R - 3/2$

$$\|u - \bar{u}\|_{2,\Lambda} \leq c M_{R-3/2}^{1/2} M_{R-5/2}^{1/2} \frac{|I|^{R-3/2}}{\nu^{R-5/2}} \left[|u|_{H^{R-1/2}(\partial\Lambda)} + |\partial u/\partial n|_{H^{R-3/2}(\partial\Lambda)} \right],$$

где константы $M_{R-3/2}$, $M_{R-5/2}$ зависят только от R.

2. Случай $\pi/\alpha \in \{b \in Z, b \leq \nu\}$. Для многоугольного суперэлемента это эквивалентно выполнению: величина α/π представима в виде приведенной рациональной дроби и $\nu \geq 3$, либо $\nu = 2$ и $\alpha = \pi/2$. Тогда при $\nu \leq R - 3/2$

$$\|u - \bar{u}\|_{2,\Lambda} \leq |I|^\nu \left[C_\nu \, |u|_{H^{\nu+1}(\partial\Lambda)} + C'' \, |\partial u/\partial n|_{H^\nu(\partial\Lambda)} \right] + C''' \sum_{\partial\Lambda_i} \sum_{q=1}^{\nu} |\bar{c}_q|,$$

где константы зависят только от ν, $\bar{c}_q$ соответствуют (6). Погрешность МКСЭ на классе $H^R(\Omega)$ в пространстве $H^2(\Omega)$, т. е. величина $\sup\limits_{u \in H^R(\Omega)} \|u - \pi_\nu u\|_{2,\Omega}$ не обладает сходимостью к нулю при $|I| \to 0$. Существует некоторая константная погрешность, и справедливо

$$C_{\nu,\alpha} \leq \sup_{u \in H^R(\Omega)} \|u - \pi_\nu u\|_{2,\Omega}.$$

При $\nu \geq R - 3/2$

$$\|u - \bar{u}\|_{2,\Lambda} \leq \frac{|I|^{R-3/2}}{\nu^{R-5/2}} \left[C'_R \, |u|_{H^{R-1/2}(\partial\Lambda)} + C''_R \, |\partial u/\partial n|_{H^{R-3/2}(\partial\Lambda)} \right] + C'''_R \sum_{\partial\Lambda_i} \sum_{q=1}^{R-3/2} |\bar{c}_q|$$

и константы зависят от показателя гладкости R, $\bar{c}_q$ соответствуют (6). Погрешность МКСЭ на классе $H^R(\Omega)$ в пространстве $H^2(\Omega)$ не обладает сходимостью к нулю при $|I| \to 0$. Существует некоторая константная погрешность, и справедливо:

$$C_{R,\alpha} \leq \sup_{u \in H^R(\Omega)} \|u - \pi_\nu u\|_{2,\Omega}.$$

Утверждение 4. Для сходимости погрешности метода к нулю в пространстве $H^2(\Lambda)$ при $\pi/\alpha \in \{b \in Z, b \leq \nu\}$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$A_q^1 \cos(q\alpha) - A_q^2 = 0, \quad \forall q = j\pi/\alpha, \quad q = 1, ..., \min\{\nu, R - 3/2\}, \quad j = 1, 2, ...$$

Соответствующие оценки совпадают с п. 1 предыдущего утверждения.

Утверждение 5. Пусть Pxy — система координат такая, что ось Px направлена по одной стороне угла Λ и ось Py — по другой его стороне. Для сходимости погрешности метода к нулю в пространстве $H^2(\Lambda)$ при $\pi/\alpha \in \{b \in Z, b \leq \nu\}$ необходимо и достаточно, чтобы след граничного интерполянта $\bar{\varphi}$ на сторонах угла $\partial\Lambda_i$, $i = 1, 2$, был следом некоторого гармонического полинома $p_H(x, y)$ в координатах Oxy в этом угле.

Можно показать, что при $M \in Z, M \geq 3$ норма ошибки $\|u - \bar{u}\|_{M,\Lambda}$ расходится. Метод конечных суперэлементов не аппроксимирует производные решения порядка больше единицы в норме $H^1(\Omega)$.

Заключение

Работа посвящена качественному анализу МКСЭ Федоренко. Получены априорные оценки погрешностей МКСЭ в шкале пространств Соболева на примере задачи Дирихле. Данный вопрос связан с получением аппроксимантов повышенного порядка точности. Определена гладкость приближенного решения. Разрешен вопрос о сходимости производных любого порядка, при наличии такой сходимости результат подтвержден характерными априорными оценками. Метод конечных суперэлементов позволяет разрешать задачи, содержащие мелкие "сингулярности" в расчетной области, обладая при этом погрешностями приближения решения, оцениваемыми только относительно ограничений этого решения на гладких частях суперэлементных границ. Это не требует использования сеток, сгущающихся в окрестностях "сингулярностей", и связано с выбором особых аппроксимирующих пространств. Исследование позволяет установить особенности, свойственные специфике аппроксимаций МКСЭ.

Список литературы

[1] Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии / В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко и др. М., 2001 (Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 8).

[2] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.

[3] Galanin M., Savenkov E. Fedorenko finite superelement method as special Galerkin approximation // Math. Modelling and Analysis. 2002. Vol. 7, N 1. P. 41–50.

[4] Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 5. С. 711–727.

[5] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko finite superelement method and its applications // Comp. Methods in Appl. Math. 2007. Vol. 7, N 1. P. 3–24.

[6] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical investigation of the finite superelement method for the 3D elasticity problems // Math. Modelling and Analysis. 2007. Vol. 12, N 1. P. 39–50.

[7] Galanin M., Savenkov E., Temis J. Finite Ssperelements Method for elasticity problems // Math. Modelling and Analysis. 2005. Vol. 10, N 3. P. 237–246.

[8] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[9] Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. М.: Янус, 1995.

[10] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[11] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

[12] Бабенко К.И. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1979.

[13] Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: AMS, 1997.

Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.