Стохастическая модель кусочно-линейного процесса на пуассоновском потоке*

О. В. Сересева
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: madonna@gorodok.net

A special class of random processes on the Poisson point flows with piecewise linear trajectories is considered. The probability distributions of stochastic variables forming this process are investigated. In particular, distribution of the relative time of expectation for the Poisson point flow is investigated. Appropriate mathematical expressions for these distributions and an expression for the central tendency of a process as function of time are obtained.

Введение

При численном моделировании случайных процессов и полей традиционно используют определенный набор преобразований, которые обеспечивают желаемую вероятностную структуру процесса или поля. При моделировании гауссовских процессов и полей дискретного аргумента применяются линейные преобразования систем независимых гауссовских величин, позволяющих, в принципе, строить процессы и поля с произвольной корреляционной структурой [1, 2]. Для моделирования гауссовских процессов и полей непрерывного аргумента широко используются приближенные спектральные модели [3, 4]. Другой подход к моделированию процессов и полей непрерывного аргумента основан на использовании точечных потоков [3]. Эти модели позволяют строить стационарные процессы, однородные и однородные изотропные негауссовские поля с произвольным одномерным распределением и произвольными корреляционными функциями из класса выпуклых. Широкий класс моделей основан на функциональных преобразованиях гауссовских процессов и полей. Эти модели объединяет хорошо известный метод моделирования негауссовских процессов — метод обратных функций распределения [3, 4]. На основе этого метода можно строить негауссовские процессы и поля с произвольным одномерным распределением и достаточно широким классом корреляционных функций, в том числе и не принадлежащих классу выпуклых. При этом метод обратных функций распределения может быть успешно использован для моделирования нестационарных процессов и неоднородных полей.

Эти подходы широко используются для построения стохастических моделей реальных процессов и полей, например метеорологических и океанологических многомерных процессов, экономических и ценовых рядов. В качестве входных характеристик

*Работа выполнена при финансовой поддержке президентской программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4774.2006.1).

для моделей при таких подходах используются эмпирические корреляционные функции и одномерные распределения. В случае, когда корреляционные связи достаточно слабы, как это, например, наблюдается в ценовых рядах, целесообразно использовать другие подходы, не связанные с использованием корреляционных функций и одномерных распределений. Одним из таких подходов является кусочно-линейная аппроксимация реальных случайных процессов [5], когда параметры кусочно-линейных сегментов аппроксимирующей функции оцениваются по данным наблюдений, после чего они моделируются в соответствии с полученными оценками и строится случайная кусочно-линейная функция.

Работа посвящена исследованию некоторых специальных процессов, связанных с таким подходом, в частности кусочно-линейных процессов на точечных потоках.

1. Кусочно-линейный случайный процесс на пуассоновском потоке

Рассмотрим кусочно-линейный случайный процесс, принимающий в интервале (S_{n-1},S_n) следующие значения:

$$\begin{aligned} Y(t) &= (Y_n - Y_{n-1})\frac{t-S_{n-1}}{S_n-S_{n-1}} + Y_{n-1} = \\ &= \alpha_n \frac{t-S_{n-1}}{S_n-S_{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i, \quad S_{n-1}\le t< S_n, \quad n=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $S_0 = 0$; $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\,, n\ge 1$, X_i — независимые случайные величины, имеющие одно и то же показательное распределение с параметром λ:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

а $Y_0 = \alpha_0$, $Y_n = \sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_j\,, n\ge 1$, α_j — независимые между собой и от X_i случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[-a\,;b]$, $a,\,b>0$. Выражение для $Y(t)$ может быть использовано для численного моделирования процесса, реализации которого представляют собой кусочно-линейные функции. В данной работе исследуются среднее значение случайного процесса $Y(t)$, а также распределения некоторых вспомогательных величин, необходимых для его вычисления.

Последовательность $\{S_n\}$, $n\ge 0$, описывает пуассоновский поток точек на прямой. Случайная величина S_n, $n\ge 1$, имеет гамма-распределение с параметрами λ и n [6]. Соответствующая плотность и функция распределения выражаются равенствами

$$g_n(y)=\begin{cases}\lambda\dfrac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

$$G_n(y)=\begin{cases}\Pr(S_n\le y)=1-e^{-\lambda y}\left(\sum\limits_{m=0}^{n-1}\dfrac{(\lambda y)^m}{m!}\right), & y\ge 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

Среднее значение и дисперсия равны n/λ и n/λ^2.

Пусть $t > 0$ и

$$\nu(t) = \min\{n \geq 1 : S_n \geq t\} \in [0, \infty]. \tag{2}$$

Если $S_n > t$ для всех $n \geq 1$, то $\nu(t) = \infty$. Поскольку $S_{\nu(t)-1} < t \leq S_{\nu(t)}$, то

$$\Pr\{\nu(t) = n\} = G_{n-1}(t) - G_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, \ \ 0 < n < \infty.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{\nu(t) = n\} = e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = 1$$

и поэтому $\Pr\{\nu(t) = \infty\} = 0$. Для среднего значения $E\nu(t)$ случайной величины $\nu(t)$ верны равенства

$$E\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} = 1 + \lambda t.$$

Случайная величина $\nu(t)$ выражает номер $n = \nu(t)$ интервала длины X_n, которому принадлежит точка t.

Рассмотрим случайную величину

$$X(t) = X_{\nu(t)} = S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1}.$$

Она описывает длину интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$, накрывающего t, и имеет плотность [6]

$$f_t(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq t, \\ \lambda(1+\lambda t)e^{-\lambda x}, & x > t. \end{cases}$$

Заметим, что $f_t(x) \neq f(x)$. Случайная величина

$$W(t) = S_{\nu(t)} - t$$

описывает расстояние от точки t до конца $S_{\nu(t)}$ накрывающего ее интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$ и имеет то же экспоненциальное распределение, что и случайные величины X_n [6].

$$\Pr\{W(t) \leq x\} = \Pr\{X_n \leq x\} = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Случайная величина

$$Z(t) = t - S_{\nu(t)-1} = S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1} - (S_{\nu(t)} - t) = X(t) - W(t)$$

описывает расстояние до точки t от начала $S_{\nu(t)-1}$ накрывающего ее интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$ и имеет функцию распределения

$$H_0(t,x) = \Pr\{Z(t) \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < t, \\ 1, & x \geq t. \end{cases}$$

Заметим, что $H_0(t,x) \to F(x)$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим случайные величины

$$Q(t) = \begin{cases} \dfrac{Z(t)}{X(t)} = \dfrac{t - S_{\nu(t)-1}}{X_{\nu(t)}}, & X(t) \neq 0, \\ 1, & X(t) = 0, \end{cases}$$

$$R(t) = \begin{cases} \dfrac{W(t)}{X(t)} = \dfrac{S_{\nu(t)} - t}{X_{\nu(t)}}, & X(t) \neq 0, \\ 1, & X(t) = 0. \end{cases}$$

Они описывают относительные длины левой $[S_{\nu(t)-1}, t]$ и правой $[t, S_{\nu(t)}]$ частей интервала $[S_{\nu(t)-1}, S_{\nu(t)}]$, накрывающего точку t, соответственно. Так как

$$\Pr\{X(t) = 0\} = \Pr\{X_{\nu(t)} = 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{X_n = 0\} = 0,$$

то $\Pr\{Q(t) = 1\} = \Pr\{R(t) = 1\} = 0$. Заметим, что $Q(t) + R(t) = 1$ и поэтому достаточно рассматривать величину $Q(t)$. Нужно найти ее функцию распределения, плотность, среднее значение и дисперсию.

Найдем функцию распределения

$$H(t, u) = \Pr\{Q(t) \leq u\}$$

и плотность случайной величины $Q(t)$. Заметим, что $(t > 0, 0 < u \leq 1)$,

$$Q(t) \leq u \Leftrightarrow \frac{t - S_{\nu(t)-1}}{X_{\nu(t)}} \leq u \Leftrightarrow \frac{t - S_{\nu(t)-1}}{u} \leq X_{\nu(t)}.$$

Пусть $\nu(t) = 1$. Тогда $S_{\nu(t)-1} = S_0 = 0,\ X_{\nu(t)} = X_1$ и

$$\Pr\{\nu(t) = 1,\ Q(t) \leq u\} = \Pr\left\{\frac{t}{u} \leq X_1\right\} = 1 - \Pr\left\{X_1 < \frac{t}{u}\right\} =$$
$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t/u}) = e^{-\lambda t/u}.$$

Пусть $\nu(t) = n > 1$. Тогда

$$\Pr\{\nu(t) = n,\ Q(t) \leq u\} = \Pr\left\{(x, y)\ :\ X_n = x,\, S_{n-1} = y,\, 0 < \frac{t - y}{u} \leq x\right\} =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{(t-y)/u}^{\infty} g_{n-1}(y) f(x) dx dy,$$

$$\Pr\{\nu(t) > 1,\ Q(t) \leq u\} = \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_0^t \int\limits_{(t-y)/u}^{\infty} g_{n-1}(y) f(x) dx dy =$$

$$= \int\limits_0^t \left[\left(\sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1(y)} \right) \int\limits_{(t-y)/u}^{\infty} f(x) dx \right] dy.$$

Заметим, что при $y > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1}(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda y)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} = \lambda,$$

$$\Pr\{\nu(t) > 1,\ Q(t) \le u\} = \int\limits_0^t \left(\lambda \int\limits_{(t-y)/u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda(t-y)/u} dy = u - e^{-\lambda t/u} u.$$

Следовательно,

$$H(t,u) = \Pr\{Q(t) \le u\} = \Pr\{\nu(t) = 1, Q(t) \le u\} + \Pr\{\nu(t) > 1,\ Q(t) \le u\} =$$
$$= u + (1-u) e^{-\lambda t/u}, \quad 0 < u \le 1.$$

Дифференцируя, находим плотность

$$h(t,u) = 1 - e^{-\lambda t/u} + \lambda \frac{t}{u} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) e^{-\lambda t/u}.$$

Найдем среднее значение $E(Q(t))$ и дисперсию $V(Q(t))$ случайной величины $Q(t)$. Интегрируя, получаем

$$E(Q(t)) = \int\limits_0^1 u h(t,u) du = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda t (2 + \lambda t) \Gamma(0, \lambda t) - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \right), \tag{3}$$

$$V[Q(t)] = \int\limits_0^1 (u - E[Q(t)])^2 h(t,u) du = \frac{1}{12} (1 - \lambda t \,(2(6 + \lambda t (9 + 2\lambda t)) +$$
$$+ 3\lambda t (2 + \lambda t)^2 \Gamma(0, \lambda t)) \Gamma(0, \lambda t) + (2(1 + 7\lambda t + 2\lambda^2 t^2) +$$
$$+ 6\lambda t (2 + 3\lambda t + \lambda^2 t^2) \Gamma(0, \lambda t) - 3e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)^2) e^{-\lambda t}). \tag{4}$$

В (3) и (4) $\Gamma(a,\, z)$ обозначает неполную гамма-функцию:

$$\Gamma(a,\, z) = \int\limits_z^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Используя обозначения (2), представим выражение для $Y(t)$ в виде

$$Y(t) = (Y_{\nu(t)} - Y_{\nu(t)-1}) \frac{t - S_{\nu(t)-1}}{S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1}} + Y_{\nu(t)-1} =$$
$$= \alpha_{\nu(t)}\, Q(t) + \sum_{i=0}^{\nu(t)-1} \alpha_i, \quad S_{\nu(t)-1} \le t < S_{\nu(t)}.$$

С учетом (3) среднее $E(Y(t))$ процесса (1) имеет вид

$$E(Y(t)) = \frac{b-a}{2} (E(Q(t)) + 1 + t\lambda) =$$
$$= \frac{b-a}{4} \left(3 + \lambda t \left((2 + \lambda t) \Gamma(0, \lambda t) + 2 \right) - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \right).$$

Список литературы

[1] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.

[2] Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical modeling of random processes and fields: algorithms and applications. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1996.

[3] Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1986. [Engl. Transl.: Springer-Verlag, 1992].

[4] Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.

[5] Novikov A.V., Ogorodnikov V.A. Stochastic model of price series // Proc. Intern. Conf. on Comp. Math. Novosibirsk, 2002. P. 243–248.

[6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения Т. 2. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.