Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 1, 2008**

Классификация проблем, возникающих при численном решении задач оптимального управления*

А. Ю. Горнов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: gornov@ok.ru

Problems arising in the process of numerical studies of a wide class of optimal control problems are considered and classified. We describe the proposed approaches taking into account the specifics of the problems and addressing the formulated difficulties.

Введение

Исторически сложилось так, что термин "задача оптимального управления" (ЗОУ) соответствует большому множеству задач оптимизации динамических систем, имеющих различную структуру, различные вычислительные характеристики, различную информационную сложность. Варьируемые переменные в ЗОУ могут быть нескольких типов (управления-функции, управления-параметры, релейные управления), на траектории системы могут накладываться ограничения нескольких типов (прямые, терминальные, фазовые, смешанные, промежуточные, интегральные), система уравнений, описывающая динамику, может содержать различные особенности (запаздывание, сингулярные возмущения, разрывные правые части, нефиксированное время процесса, алгебродифференциальные связи), критерии качества — оптимизируемые функционалы — также могут иметь несколько различных видов (интегральные, терминальные, быстродействия). Таким образом, существует большое пространство типов ЗОУ, включающее множества вариантов задач и их сочетания, каждому типу задачи присущи свои специфические проблемы, и для каждого типа традиционно разрабатывались свои специальные подходы и методы.

Практика численного решения задач оптимального управления, как тестовых, так и прикладных, позволяет определить негативные факторы, проявляющиеся при применении программных средств оптимизации для исследования экстремальных свойств динамических моделей. В настоящей работе предпринята попытка классификации проблем, возникающих при численном решении ЗОУ, и обобщения подходов, применяемых для их преодоления.

*Работа выполняется при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант № 07-02-12112в) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-07-89215, № 07-07-00265 и № 08-07-00172).

1. Специфика задачи оптимального управления как экстремальной задачи

После дискретизации задача оптимального управления может рассматриваться как задача конечномерной оптимизации, и к ней может быть применен весь богатейший арсенал наработанных в этой области методов. Однако такой подход, по нашему мнению, является тупиковым и не позволяет учесть специфику ЗОУ, что приводит к малоэффективным реализациям алгоритмов.

Специфика ЗОУ, на взгляд автора, заключается в следующем.

1. Особая структура задачи — большое число близких по влиянию переменных и ограничений, соответствующих числу точек аппроксимации системы, и небольшое число ограничений принципиально другого типа, отражающих суть исходной задачи (перевод системы из точки в точку, терминальные функционалы и т. п.).

2. Наличие большого числа специфических математических результатов — необходимых и достаточных условий оптимальности различных порядков и хорошо исследованных теоретически подклассов задач: линейно-квадратичных, сингулярно возмущенных и др.

3. Специализированная терминология, позволяющая получать значительно более компактные результаты — терминологии фазовых пространств и переменных.

4. Характерное присутствие типовых особенностей: жесткости, вырожденности, разномасштабности, овражности, нефизичности моделей.

2. Негативные явления, встречающиеся при численном решении задач оптимального управления

1. Нелинейность. “Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности” [1, с. 23]. Рассмотрение нелинейных моделей значительно сужает круг математических подходов, которые можно применять для конструирования алгоритмов. Даже простые задачи, как правило, не могут быть решены в замкнутом, математически строгом виде. Для практического применения математики, очевидно, остаются численные алгоритмы.

2. Жесткость. Явление жесткости системы хорошо известно в теории дифференциальных уравнений (см., например, [2, 3]). Однако среди специалистов в этой области до сих пор нет единого мнения по поводу определения понятия жесткости. В одном из наиболее полных и авторитетных источников по жестким системам, например, дается такое определение: “Жесткой называется система, которую невозможно проинтегрировать методом Рунге — Кутты” [3]. Чаще всего явление жесткости связано с большим разбросом собственных чисел якобиана правых частей системы, что и является характеристикой степени жесткости. Для слабожестких систем (со степенью жесткости $10^3 \ldots 10^4$) удается создать вычислительные схемы за счет применения неравномерной сетки дискретизации ЗОУ и использования адаптивных методов интегрирования. Для систем с большей жесткостью необходимы либо преобразование задачи с целью улучшения ее свойств, либо применение специальных методов интегрирования и разработка алгоритмов оптимизации, учитывающих специфику этой задачи.

3. Вырожденность, скользящие режимы. Вырожденные ЗОУ исследуются уже более тридцати лет, для такого типа задач разработано много теоретических подходов и основанных на них алгоритмов [4, 5]. Как правило, вырожденность задачи характеризуется неявным присутствием в системе интегральных многообразий и является следствием проблем, не решенных достаточно адекватно при создании модели. Эта серьезная проблема может приводить к неинформативности условий оптимальности, заложенных в конструкции алгоритмов и к потере их работоспособности. В случае диагностики такого явления следует либо преобразовать задачу, либо применить специализированные алгоритмы [5], способные его преодолевать.

4. Многоэкстремальность. Практически все рассматриваемые методы оптимизации носят локальный характер и могут гарантировать только достижение локального экстремума. Методы поиска глобального экстремума в ЗОУ пока находятся в стадии теоретической разработки [6]. Для преодоления этой проблемы традиционно применяется технология глобализации, основанная на идее случайного мультистарта, широко популярной в задачах математического программирования.

5. Овражность — одна из самых неприятных особенностей ЗОУ. Определение овражной функции [7, т. 3, с. 1153; 8] опирается на свойства ее гессиана: $0 < |\min \lambda_i(x)| \ll \lambda_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, где $\lambda_i(x)$ — собственные числа матрицы Гессе, упорядоченные в точке по убыванию модулей, степень овражности характеризуется числом $S = \lambda_1/|\min \lambda_i|$. Овражные функционалы возникают в ЗОУ обычно в связи с применением методов последовательной безусловной минимизации, в которых для достижения требуемой точности необходимо увеличивать штрафные коэффициенты. При этом степень овражности растет при приближении к оптимуму, что приводит ко все более неточным решениям вспомогательных задач и, в конечном итоге, к неверному результату. Для преодоления этой особенности обычно применяются алгоритмы со сверхлинейной скоростью сходимости (сопряженных градиентов, Ньютона) и “метод грубой силы” — многочасовые расчеты. Проблема разработки специализированных алгоритмов оптимизации овражных функционалов пока остается открытой.

6. Плохая обусловленность является следствием вырождения гессиана аппроксимирующей задачи на оптимальном управлении и на практике выражается в появлении в окрестности оптимума “зоны нечувствительности” большой мощности. При этом результат, выдаваемый алгоритмом, сильно зависит от начального приближения и траектории спуска. Для выявления и преодоления этой особенности на этапе постоптимизационного анализа требуется применение более точных алгоритмов и в крайних случаях метода регуляризации.

7. “Нефизичность” модели в некоторых областях вариабельного множества есть проявление ее неадекватности, обычно в виде уходящих в бесконечность траекторий, что, естественно, приводит к “авостам” при работе алгоритмов. В некоторых задачах “область физичности” оказывалась такой малой, что для нахождения начального приближения (управления, на котором систему можно проинтегрировать) приходилось формулировать и решать специальные вспомогательные задачи. В дальнейшем для недопущения повторного ухода траекторий системы в область нефизичности целесообразно применять какой-либо вариант ограничения вариаций (сужение допустимого параллелепипеда, прокси-метод).

8. Неустойчивость траекторий системы вновь может быть следствием неадекватности модели; как правило, моделируемые процессы устойчивы. В теории устойчивости существует множество методов ее оценки, однако в ЗОУ, по мнению автора, эта проблема может быть решена путем применения более точных методов интегрирования. Существует гипотеза, что попадание системы в оптимальное состояние значительно улучшает ее свойства [9], но в процессе поиска оптимального решения алгоритм вынужден иметь дело с неустойчивыми траекториями. Диагностика неустойчивости есть сигнал разработчику модели для ее коррекции.

9. Разномасштабность критериев. Функционалы, оценивающие качество управления, могут, особенно на начальных стадиях моделирования, оказывать совершенно различное влияние на задачу. Это обычно выражается в том, что все усилия алгоритма направлены на удовлетворение одного из критериев, а все остальные в процессе итераций меняются хаотически. В простых случаях может оказаться полезным масштабирование критериев с помощью весовых коэффициентов, в сложных — неизбежна коррекция модели.

10. Некорректность задачи проявляется в возможном наличии множеств и целых многообразий управлений, удовлетворяющих условиям оптимальности. “Задачи оптимального управления, в которых оптимизируемый (целевой) функционал зависит только от фазовых переменных... являются некорректно поставленными” (А.Н. Тихонов, см. [7, т. 3, с. 936]). Начиная расчеты с различных начальных приближений, пользователь получает совершенно различные результаты, что обычно воспринимается как факт ошибочной работы алгоритмов. Явление некорректности обычно устраняется уточнением постановки задачи или применением специальных методов регуляризации [10].

11. Неадекватность модели есть типичное явление на стартовых этапах моделирования. Поведение неадекватной модели может совершенно не соответствовать свойствам исследуемого объекта. При такой ситуации неподготовленный пользователь склонен подозревать в ошибках не самого себя, а программный комплекс, что приводит к отказу от дальнейшего его применения. Решением проблемы может стать параметризация модели и решение задачи параметрической идентификации для поиска экземпляра модели, наиболее точно приближающего имеющиеся данные и учитывающего представления специалиста в предметной области.

12. Отсутствие допустимого решения, неуправляемость системы обычно есть один из видов проявления ошибочности постановки задачи или неточности коэффициентов модели. Для четкой диагностики такой ситуации обычно формулируется и решается вспомогательная задача поиска допустимого управления без учета целевого функционала.

13. Явление “мелких вариаций” очень часто встречается в задачах со сложной геометрией поверхности минимизируемого функционала, когда последовательность приближений, генерируемых алгоритмом, сходится чрезвычайно медленно. В таких ситуациях рекомендуется поискать более удобное начальное приближение или применить другой метод оптимизации.

14. Явление “тугих фазовых ограничений”. Жесткие фазовые ограничения способны превратить решение задачи даже небольшой размерности в сложную проблему. Алгоритмы оценки двойственных переменных для таких задач работают очень медленно и нерегулярно, что, очевидно, объясняется конфликтом таких фазовых ограничений с другими ограничениями задачи. Кроме того, такая особенность может послужить причиной других негативных явлений — многоэкстремальности, некорректности и др. Одним из способов преодоления этой проблемы может быть реализация метода нелинейного приведенного градиента, специализированного для конкретной задачи.

15. Сингулярная мера при выходе траекторий на фазовые ограничения. Другой трудностью, связанной с фазовыми ограничениями, является возникновение сингулярной меры при выходе траекторий на ограничения. Это напрямую связано с понятием "глубины ограничения", т. е. степенью производной функции ограничения, в выражениях для которой в явном виде появляется управление. В какой-то степени это понятие имеет аналог в виде понятия "индекса системы", применяемого в теории алгебродифференциальных систем [11]. В интуитивном восприятии такая особенность проявляется в наличии свойства инерционности, присущего исследуемой модели. Оптимальные траектории в такой задаче должны задолго до момента касания с ограничением начать изгибаться и плавно выходить на него по касательной. Основной способ борьбы с этой особенностью — "метод грубой силы" — долгие расчеты.

16. Явление детерминированного хаоса, интенсивно изучаемое в синергетике [12], может служить причиной хаотического поведения алгоритмов. Особенно неудобными для анализа представляются случаи, когда оптимальным решением является странный аттрактор. Это легко наблюдать на модельных примерах, однако в практике решения прикладных задач таких эффектов пока не наблюдалось.

17. Шумы при вычислении градиентов вполне могут наблюдаться при выборе неподходящей схемы интегрирования сопряженной системы. При этом свойства методов могут довольно сильно измениться: "квадратичные" методы потеряют свои преимущества и станут вести себя как обычные градиентные. Чаще всего это проявляется в нулевых шагах по направлению спуска (генерации неулучшающих вариаций). Способ борьбы с данной особенностью прост — выбрать более точный метод интегрирования или участить сетку дискретизации.

18. Погранслойный эффект. В некоторых задачах оптимальные траектории и управления имеют естественное квазистационарное состояние (магистраль) [14]. В ряде случаев по виду модели легко выделяется малый параметр, тогда такие задачи относят к классу сингулярно возмущенных [9]. Проблема итеративной аппроксимации оптимального решения в таких задачах состоит в том, что обычно с магистралью не согласованы начальное фазовое состояние и терминальные ограничения. В таком случае в начале и конце интервала времени возникают участки резкого изменения переменных (погранслои). Для эффективного решения такого типа ЗОУ можно применять специальную процедуру построения магистральных участков [9, 14] и неравномерную сетку аппроксимации. Более трудный для анализа случай внутренних пограничных слоев [16] встречается на практике редко.

19. Конкуренция функционалов. В задачах с терминальными функционалами довольно часто встречаются ситуации, когда оценки двойственных переменных, генерируемые алгоритмами, сходятся очень медленно и немонотонно. Для пользователя такая ситуация выглядит жесткой борьбой части функционалов между собой. Для решения таких задач бывает целесообразно применять комбинации методов (например, метод штрафных функций — метод множителей Лагранжа — метод линеаризации), подбирая моменты переключения с метода на метод путем проб и ошибок.

20. "Дефект интегрального функционала". При оптимизации интегральных критериев (например, экономического происхождения) в конце интервала времени оптимальные траектории имеют неадекватный характер. Это связано с тем, что для полной минимизации такого критерия система в конце периода готова "разрушить сама себя", получив при этом хотя бы небольшое уменьшение функционала. Для преодоления этой особенности рекомендуется продлить интервал времени на длину, заметно превышающую особый участок.

21. Рост сложности границы множества достижимости. Для задач с линейными терминальными функционалами конец траекторий на оптимальном решении находится на границе множества достижимости (МД) управляемой системы. Практика применения алгоритмов аппроксимации интегральных воронок позволила сделать вывод о существенной неоднородности границ МД, причем рост сложности задачи выражается как в усложнении геометрии границы МД с увеличением интервала времени, так и в увеличении продолжительности процесса решения в некоторых областях. Общим способом преодоления такой ситуации можно назвать перебор начальных приближений и методов оптимизации.

22. Наличие неуправляемых подсистем в модели легко выявляется при использовании графических средств визуализации решения. Проблемы могут возникнуть, когда пользователь ошибочно наложил на переменные такой подсистемы какие-либо условия, которые в принципе не могут быть удовлетворены за счет имеющегося ресурса управления.

23. Катастрофический рост погрешностей во вспомогательных задачах интегрирования систем дифференциальных уравнений вполне возможен для систем с энергично растущими траекториями. Хорошим средством диагностики таких ситуаций является правило Рунге. Решение проблемы возможно путем подбора адекватной дискретизации задачи — сетки и метода интегрирования.

24. NP-трудность. Информационная сложность задач минимизации класса унимодальных функций "фантастически велика" [8, 15]: $N(\varepsilon) \geq c(n,k)(1/\varepsilon)^{(n-1)/k}$, где $N(\varepsilon)$ — оценка трудоемкости, k — порядок используемых производных, ε — точность решения задачи, $c(n,k)$ — некоторая константа. Этому теоретическому факту до сих пор не найдено рационального объяснения. Для многоэкстремальных функций, несомненно, значительно более сложных для оптимизации, эта оценка ухудшается незначительно. На практике, как в других задачах, в ЗОУ удается найти варианты алгоритмов, поведение которых "в среднем", т. е. в некотором статистическом смысле, существенно лучше гарантированной оценки — полиномиально или даже линейно. Однако в конкретной дискретизованной задаче, аппроксимирующей непрерывную ЗОУ, при числе переменных в несколько тысяч такая оценка может выражаться чудовищным числом и никаких гарантий в такой ситуации алгоритмы не дают. Вопрос реального поведения алгоритмов для ЗОУ, по сведениям автора, пока теоретически не исследован.

Очевидно, что проблема преодоления негативных факторов при решении ЗОУ является сложной и многоаспектной. Тем не менее в каждом конкретном случае путем глубокого анализа трудностей на рассматриваемом прецеденте (задаче) можно установить природу особенности и найти пути ее преодоления.

3. Подходы к учету специфики и преодолению особенностей в задачах оптимального управления

Анализ множества решенных задач и найденных опытным путем подходов к преодолению возникающих трудностей позволил обобщить опыт применения на практике программных средств для задач оптимального управления. В ряде случаев для поиска решения требовалось найти специфический путь, применимый только в отдельно взятой задаче. Из общих подходов, хорошо работающих во многих ситуациях, можно выделить следующие.

1. Селекция алгоритмов. Количество методов, известных из литературы, довольно велико. Однако, несмотря на видимую привлекательность предлагаемых конструкций, многие из них не смогли стать основой для создания конкурентоспособных алгоритмов (возможно, просто не удалось найти подходящие модификации этих методов). Значительная часть алгоритмов была запрограммирована автором и исследована на тестовых примерах. Предлагаемые к рассмотрению варианты алгоритмов, таким образом, "выжили" в конкурентной борьбе с себе подобными и были отобраны как наилучшие. Для создания алгоритмов решения задачи Коши были исследованы многочисленные технологические находки теории численного интегрирования и выбраны наиболее подходящие для специфических задач интегрирования, возникающих при реализации методов для ЗОУ. Методы решения ЗОУ со свободным правым концом выбирались по удачности сочетания характеристик скорости сходимости и учета параллелепипедных ограничений. Методы для ЗОУ с терминальными ограничениями в основном опирались на идеи, заимствованные в теории конечномерной оптимизации. Выбранные методы для задач с фазовыми ограничениями, напротив, основаны преимущественно на теории оптимального управления.

2. Мультиметодный подход применяется на всех уровнях иерархии алгоритмов. Ни один из отобранных алгоритмов не обладает неоспоримым преимуществом перед другими на всем многообразии задач и ситуаций оптимизации динамических задач. Зато в комбинациях методов, как правило, легко достигаются новые свойства и со временем у каждого из сохраненных алгоритмов выявляется своя "экологическая ниша".

3. Методы редукции одного типа задач к другим являются важнейшим инструментом как расширения сферы применимости программных средств для ЗОУ, так и повышения эффективности применяемых алгоритмов. Можно утверждать, что в пространстве ЗОУ существуют "точки входа" (в нашем случае ЗОУ со свободным правым концом, ЗОУ с терминальными ограничениями и ЗОУ с фазовыми ограничениями), опираясь на которые можно сконструировать компактные вычислительные технологии оптимизации, не теряя общности и широты класса решаемых задач. С другой стороны, наблюдалось множество прецедентов, когда переформулировка задачи в математически эквивалентный вид позволяла на порядок уменьшить время, требуемое для получения решения.

4. Параметризация. Метод продолжения по параметру, широко применяемый в математике, и при конструировании вычислительных технологий решения ЗОУ показал себя с наилучшей стороны. Погружая задачу в некоторое параметрическое пространство и строя последовательность задач, в каждой из которых в качестве начального приближения используется оптимальное решение предыдущей, можно достичь как скорости работы алгоритмов, так и точности получения результата. Метод параметризации с успехом применялся практически ко всем компонентам постановки ЗОУ: интервалу времени, правым частям системы, параллелепипедным ограничениям, терминальным ограничениям, фазовым ограничениям. Фактически во всех сложных прикладных задачах осуществлялся поиск специальных подходов путем введения в задачу новых параметров. Заметим, что применение метода параметризации вполне соответствует методологическим принципам математических исследований, сформулированным Д. Пойа [17, с. 176, 186]: 1) "если вы не в состоянии решить предложенную задачу, то попробуйте найти близкую к ней более легкую задачу"; 2) "использовать накопленную ранее информацию как оперативную базу для получения дальнейшей информации".

5. Декомпозиция. Методы декомпозиции хорошо работают при любых типах разномасштабности переменных в задаче. Декомпозиция ограничений позволяет значительно легче достигать требуемой точности решения. Декомпозиция вариабельного множества управлений позволяет строить своеобразные обобщения метода покоординатного спуска, весьма эффективные при существенно различающихся по мощности управляющих воздействиях. Большинство сложных задач быстродействия, в которых вариация времени, как правило, много более "влиятельна", чем вариации остальных управлений, потребовали применения метода декомпозиции.

6. Ограничение вариаций есть важнейший инструмент достижения надежности работы алгоритмов при наличии в задаче областей нефизичности. Большие, "размашистые" вариации управления могут заводить вычислительный процесс в области "мелких вариаций", возврат из которых чрезвычайно трудоемок. Достижение регулярности процесса оптимизации, возможное с применением этого подхода, очень полезно как для понимания пользователем внутреннего устройства его модели, так и при конструировании автоматических схем решения ЗОУ.

7. Последовательное повышение качества дискретизации можно рассматривать как один из важнейших путей повышения быстродействия алгоритмов. Большая часть процесса вычислений не требует высокой точности аппроксимации непрерывной задачи, достаточно обеспечить качественное совпадение картины решения и только при уточнении оптимума и постоптимизационном анализе необходимо точно отследить количественную близость исходной задачи и ее конечномерной аппроксимации. В данном случае "в чистом виде" может быть реализован известный тезис о том, что ошибкой является как слишком грубое, так и слишком точное решение.

8. Перебор начальных приближений позволяет решить несколько серьезных проблем, возникающих при численном решении ЗОУ: избежать областей "нефизичности", избежать областей "мелких вариаций", найти несколько локальных экстремумов и, возможно, глобальный. Кроме того, этот подход при использовании случайных стартовых управлений может быть полезен для визуализации множества достижимости оптимизируемой системы и тем самым для более глубокого понимания пользователем возможностей исследуемой модели.

9. Автоматическое дифференцирование в алгоритмах для ЗОУ реализуется при вычислении градиентов путем интегрирования сопряженной системы. Для простых методов интегрирования из семейства Рунге — Кутты такой подход привел к созданию изящных "согласованных схем" [13], применение которых гарантирует адекватность градиента дискретизованной задачи. Однако, даже применяя значительно более сложные алгоритмы интегрирования (с переменным шагом и переменным порядком), для которых такие методики пока не разработаны, удается на этом пути достичь значительной экономии времени при вычислении градиентов функционалов.

10. Масштабирование традиционно рассматривается как хороший способ уменьшения погрешностей вычислений. Однако в ЗОУ этот прием может послужить также хорошим инструментом и для достижения других важных целей: повышения точности, надежности и эффективности решения.

11. Верификация формул аналитических производных, задаваемых пользователем, есть удобный инструмент достижения корректности постановки задачи. Верификация качества дискретизации по правилу Рунге позволяет, пусть косвенным способом, избежать "хвостов" и ошибок, связанных с преждевременным прекращением сходимости алгоритмов. Верификация решения (постоптимизационный анализ) может придать пользователю уверенность в правильности полученного результата. Можно утверждать, что достижение надежности решения при отсутствии инструментов такого типа проблематично.

12. Учет доступных градиентов. Не все требуемые для работы алгоритмов производные являются труднодоступными. Типична ситуация, когда в сложной модели производные по одним переменным находятся очень просто, по другим переменным требуют многих часов утомительной аналитической работы, чреватой ошибками. Естественной представляется мысль о покоординатном комбинировании доступных аналитических формул для производных с разностными схемами для всех остальных.

13. Настройка алгоритмических параметров. При реализации любого алгоритма естественным путем возникают алгоритмические параметры, управляющие его работой (точность решения вспомогательных задач, коэффициент изменения внутренних переменных алгоритма, ограничители ресурсов алгоритма). Для многих алгоритмов от удачного выбора этих параметров существенным образом зависит их эффективность (известны прецеденты, когда за счет ручной настройки параметров удавалось ускорить получение решения в 100 раз). Значения параметров “по умолчанию”, рассчитанные на самый общий случай, обычно не являются наилучшими в конкретной задаче и не могут гибко учитывать специфику ситуации. Настраивая параметры методов, квалифицированный пользователь получает возможность достигать результата значительно более коротким путем. Для неинформированного пользователя необходимо создавать механизмы настройки параметров и, если возможно, сводить все алгоритмические параметры к одному, работающему по принципу “грубо — точно”. В любом случае аппарат алгоритмических параметров остается мощным средством обеспечения свойств вариабельности и адаптивности алгоритма, обычно требуемых для включения его в состав развитого пакета программ.

Заключение

Задачи оптимального управления как класс задач оптимизации обладают ярко выраженными специфическими особенностями, позволяющими конструировать для них алгоритмы с улучшенными характеристиками. Существуют алгоритмические схемы, включающие последовательную дискретизацию системы, демонстрирующие полиномиальный рост трудоемкости решения от числа точек дискретизации, от размерности аппроксимирующей задачи математического программирования в большинстве решенных задач. Практически для любой корректно поставленной задачи оптимального управления рассматриваемого класса удается найти в предложенном пространстве алгоритмов вычислительную схему, позволяющую эффективно получить решение.

Список литературы

[1] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

[2] Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.

[3] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

[4] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.

[5] Батурин В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука, 1997. 174 с.

[6] Krotov V.F. Global Methods in Optimal Control Theory. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1996.

[7] Математическая энциклопедия: В 5 т. / Под ред. И.М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1982.

[8] Ларичев О.И., Горвиц Г.Г. Методы поиска локального экстремума овражных функций. М.: Наука, 1989. 95 с.

[9] Дмитриев М.Г., Клишевич А.М. Итерационные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач условно устойчивого типа // Журн. вычисл. математики. 1987. Т. 27, № 12. С. 1812–1823.

[10] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

[11] Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебродифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000. 223 с.

[12] Хакен Г. Информация и самоорганизация. М.: Мир, 1991.

[13] Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

[14] Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.

[15] Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979. 383 с.

[16] Белокопытов С.В., Герасимов В.А., Горнов А.Ю. и др. Внутренние и внешние погранслои в задачах оптимального управления. Асимптотические и численные методы расчета // Тез. докл. IV Междунар. конф. по пограничным и внутренним слоям. Новосибирск, 1986. С. 20.

[17] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.

Поступила в редакцию 25 января 2008 г.