Вычислительные технологии **Том 13, № 2, 2008**

О кинетическом уравнении

Б. Г. Кузнецов
Институт вычислительных технологий СО РАН,
Новосибирск, Россия

It is claimed that the Boltzmann—Maxwell equations are the first-level approximation to the kinetic equation and the conservation laws derived from this equation are valid for inviscid gas only. An approximation of the higher order to the kinetic equation and the corresponding conservative laws that lead to the viscous gas flow model, different from the Navier—Stokes model, are derived. The difference is that according to the proposed model, the propagation speed of a perturbation is finite, and it is equal to the speed of sound in the modeled gas.

1. Уравнение Больцмана

Уравнения движения газа могут быть получены как законы сохранения массы, импульса и энергии из уравнения Больцмана—Максвелла (см., например, [1, с. 172–174, 182–190]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{1.1}$$

Здесь $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — функция распределения, t — время, $\mathbf{x}$ — пространственная (декартова) координата, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ — внешние силы отнесенные к единице массы, $J(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — интеграл столкновений; $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ — векторные операторы, смысл которых очевиден; точка означает свертку по одному немому индексу.

В работе автора (см. [2]) установлено, что выполнения только законов сохранения недостаточно для адекватного описания движения газа, кроме этого должно быть выполнено еще одно очень важное требование: необходимо, чтобы скорость распространения возмущений (СРВ), диктуемая моделью (характеристиками системы уравнений), равнялась скорости звука моделируемого газа. Оказалось, что это естественное требование не всегда имеет место. Так, для невязкого газа (модель Эйлера) оно выполняется, а для вязкого газа СРВ имеет неограниченную величину. Последнее означает, что модель Навье–Стокса непригодна для описания движения вязкого газа. Поскольку эта модель является следствием уравнения (1.1), то либо в уравнении (1.1) имеется какая-то погрешность, либо при выводе законов сохранения из (1.1) сделаны какие-то необоснованные предположения, приводящие к бесконечной СРВ. Выяснению этих вопросов и посвящена предлагаемая работа.

2. Функция распределения

Функцию распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ можно определить через ожидаемое (вероятное) количество молекул однокомпонентного газа $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dx\, dv$ в окрестности $dx\, dv$ точки $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ фазового пространства в момент t (см. [1, с. 172]). Функция $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой, при этом величина f при неограниченном увеличении скорости $\mathbf{v}$ стремится к нулю вместе с производными так, что при интегрировании по всему пространству скоростей V величины

$$\begin{aligned} n(t, \mathbf{x}) &= \int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\, dv, \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{n(t, \mathbf{x})} \int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{v}\, dv, \\ S(t, \mathbf{x}) &= -\int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \ln(f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) dv, \end{aligned} \tag{2.1}$$

задающие плотность $n(t, \mathbf{x})$, среднюю скорость молекул $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и энтропию $S(t, \mathbf{x})$, имеют смысл.

Величину $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dv / n(t, \mathbf{x})$ можно рассматривать как ожидаемую концентрацию молекул из dv в точке $\mathbf{x}$ в момент t или, что то же, вероятность того, что наугад взятая в окрестности dx точки $\mathbf{x}$ в момент t молекула будет иметь скорость из окрестности dv скорости $\mathbf{v}$. Заметим сразу, что градиент концентрации $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\dfrac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{n(t, \mathbf{x})} \right] dv$ может быть отличным от нуля и, следовательно, может возникнуть диффузия этих молекул.

Для дальнейшего полезно ввести среднюю длину свободного пробега молекул $l(t, \mathbf{x})$ и величину $\theta(t, \mathbf{x})$, обратную средней частоте соударения молекул. Предполагается, что l и θ малы. Пусть далее какая-то из молекул рассматриваемой l-окрестности в момент t получила дополнительный импульс. Очевидно, что это изменение приведет в результате столкновений к изменению импульса какой-либо другой молекулы в среднем через промежуток времени θ, т. е. с запаздыванием. Теперь предположим, что по каким-то причинам в момент t_0 изменилась величина $f(t_0, \mathbf{x}, \mathbf{v}_0) dx\, dv_0$. Это повлечет за собой изменения и $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dx\, dv$ для всех $\mathbf{v}$, т. е. к изменению функции $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Однако существенно, что произойдет это не в момент t_0, а в среднем только к моменту $t_0 + \theta(t_0, \mathbf{x})$. Иными словами, любые изменения в характере хаотического движения молекул в окрестности точки $\mathbf{x}$ приводят к изменениям функции распределения с обязательным запаздыванием, которое необходимо учитывать при выводе кинетического уравнения.

3. Кинетическое уравнение

Перейдем теперь к выводу кинетического уравнения с учетом замечаний, сделанных в разд. 2. Рассмотрим произвольный подвижный объем Q с границей ∂Q, точки которого движутся со скоростями $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Предполагается, что Q достаточно мал, так что значения $\theta(t, \mathbf{x})$ в разных точках Q различаются не более, чем на θ^2. В связи с этим можно ввести величину $t_* = t + \theta(t, \mathbf{x}_1)$, где $\mathbf{x}_1$ — некая фиксированная точка Q, при этом для всех $\mathbf{x}$ из Q разность $t_* - t - \theta(t, \mathbf{x})$ не превысит θ^2. Таким образом, можно говорить о положении Q_* подвижного объема, которое объем Q займет в момент t_*. Здесь и всюду далее индексом "$*$" будем помечать величины для момента t_*, а значения без индексов будут относиться к моменту t.

Интеграл

$$\int\limits_Q \int\limits_V f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})dx\,dv = \int\limits_Q n(t,\mathbf{x})dx$$

задает ожидаемое количество молекул в объеме Q в момент t. Дифференцируя его по времени, учитывая известные формулы Эйлера, найдем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_Q n(t,\mathbf{x})dx = \int\limits_Q \left[\frac{dn}{dt} + n\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{u}\right]dx = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности объема Q, получаем закон сохранения количества частиц:

$$\frac{dn}{dt} + n\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{3.1}$$

Здесь и всюду ниже

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}.$$

Составим теперь уравнение баланса частиц из окрестности dv скорости $\mathbf{v}$ в подвижной точке $\mathbf{x}$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q_*} f_*\,dx_*\,dv = \int\limits_{\partial Q}\left\{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\left[\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{v}\right] + n\,\xi\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left[\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})}{n(t,\mathbf{x})}\right]\right\}\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds\,dv +$$

$$+\int\limits_Q\left[J(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{F}(t,\mathbf{x})\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\right]dx\,dv, \tag{3.2}$$

где $\xi = l^2/\theta$ — коэффициент диффузии, ds — элемент поверхности ∂Q, $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к этой поверхности. Здесь в левой части записана скорость изменения числа частиц из окрестности dv скорости $\mathbf{v}$ в момент $t_* = t + \theta(t,\mathbf{x})$, при этом символом f_* обозначена величина $f(t_*,\mathbf{x}_*,\mathbf{v})$, где $\mathbf{x}_* = \mathbf{x} + \theta(t,\mathbf{x})\,\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$. Вектор $\mathbf{x}_*$ задает с погрешностью θ^2 положение в момент t_* точки, занимавшей в момент t положение $\mathbf{x}$. В силу этого левую часть (3.2) можно переписать с погрешностью θ^2:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q_*} f_*\,dx_*\,dv = \frac{d}{dt}\int\limits_Q n_*\left(\frac{f_*}{n_*}\right)\frac{\partial(x_*)}{\partial(x)}dx\,dv = \frac{d}{dt}\int\limits_Q n\left(\frac{f_*}{n_*}\right)dx\,dv,$$

при этом используются очевидные равенства

$$n_*\frac{\partial(x_*)}{\partial(x)} = n(t,\mathbf{x}), \quad n_* = n(t_*,\mathbf{x}_*).$$

Далее, используя (3.1) и очевидное соотношение

$$\frac{f_*}{n_*} = \frac{f}{n} + \theta\,\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{n}\right) + o(\theta^2),$$

представим окончательно левую часть (3.2) с погрешностью θ^2 в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q_*} f_*\,dx_*\,dv = \int\limits_{Q} n\frac{d}{dt}\left[\frac{f}{n} + \theta\,\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{n}\right)\right] dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q}\left[\frac{df}{dt} + f\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{u} + n\frac{d}{dt}\left[\theta\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{n}\right)\right]\right] dx\,dv.$$

В правой части (3.2) первый член в интеграле по ∂Q характеризует скорость изменения числа частиц в dv за счет разности скоростей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а второй — за счет диффузии. Интеграл по Q представляет скорость изменения числа частиц за счет столкновений и действия поля внешних сил.

Собирая все вместе, переходя, как обычно, к объемному интегралу, используя произвол в выборе Q и приводя подобные, получим окончательно следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left[n\,\xi\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{f}{n}\right)\right] - n\frac{d}{dt}\left[\theta\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{n}\right)\right]. \tag{3.3}$$

Полученное уравнение отличается от (1.1) наличием в правой части дополнительного члена, содержащего величины порядка θ. Параметры θ и ξ являются термодинамическими функциями.

Если пренебречь здесь величинами θ и ξ, т. е. вязкостью и теплопроводностью, то уравнение (3.3) переходит в уравнение (1.1). Иными словами, уравнение (1.1) следует считать только первым приближением к кинетическому уравнению с погрешностью порядка θ, а уравнение (3.3) — приближением с погрешностью θ^2.

4. Уравнения движения вязкого газа

Из уравнения (3.3) с помощью обычных приемов (см. [1, с. 182–190]) получим уравнения сохранения. Умножая обе части (3.3) на постоянную m — массу одной молекулы, интегрируя по всему пространству скоростей V, полагая $\rho(t,\mathbf{x}) = m\,n(t,\mathbf{x})$, получим закон сохранения массы (уравнение неразрывности):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\,\mathbf{u} = 0. \tag{4.1}$$

Заметим, что это уравнение следует и из (3.1).

Точно так же, умножая обе части уравнения (3.3) на вектор $m\,\mathbf{v}$ —импульс одной молекулы — и интегрируя по всему пространству скоростей, получим

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} + \theta\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} = \rho\,\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left[\rho\,\xi\,\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right) + \tau\right]. \tag{4.2}$$

Здесь p — давление, τ — симметричная часть тензора вязких напряжений, а $\rho\,\xi\,\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right)$ — его несимметричная часть. Величина τ задается соотношением

$$\tau = p\,I - \int\limits_{V} m f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,\mathbf{w}\,\mathbf{w}\,dv,$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, I — единичный тензор. Следуя Стоксу (см. [3, с. 196]), можно принять, что $\tau = \alpha\, I + \beta\, D + \gamma\, D^2$, где α, β, γ — функции скалярных инвариантов тензора деформации D.

Из уравнения сохранения импульса (4.2) в качестве следствия запишем уравнение сохранения момента количества движения

$$\frac{d}{dt}(\rho_*\, \mathbf{x}_* \times \mathbf{u}_*) = \rho\, \mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\tau - p\, I + \rho\, \xi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right)\right] + \rho\, \theta\; \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (4.3)$$

Обратим внимание на появление в правой части уравнения (4.3) дополнительного момента $\rho\, \theta\; \mathbf{u} \times \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, возникающего за счет запаздывания изменения функции f на интервал θ.

Умножая обе части уравнения (4.2) скалярно на вектор $\mathbf{u}$, получим второе следствие:

$$\rho \frac{d}{dt}\left[\frac{u^2}{2} + \theta\, \frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] = \rho\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\mathbf{u} \cdot \left(\tau - p\, I + \rho\, \xi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right)\right)\right] + \rho\, \theta\, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} -$$

$$- \frac{p}{\rho^2}\, \frac{d\rho}{dt} - (\tau - p\, I) : D - \rho\, \xi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right) : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right). \quad (4.4)$$

Далее, умножая обе части уравнения (3.3) на величину $m(e + v^2/2)$ и интегрируя по пространству скоростей, получим с учетом (4.4) уравнение сохранения энергии:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(E + \theta\, \frac{dE}{dt}\right) = \frac{p}{\rho}\, \frac{d\rho}{dt} - \rho\, \theta\, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \tau : D +$$

$$+ \rho\, \xi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right) : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(k \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}}\right). \quad (4.5)$$

Здесь $E(t, \mathbf{x}) = \displaystyle\int_V \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{n(t, \mathbf{x})} \left(e + \frac{w^2}{2}\right) dv$ — плотность внутренней энергии на единицу массы, $m\dfrac{v^2}{2}$ — кинетическая энергия молекулы газа, а $m\, e$ — все другие виды энергии. Возникающая при выводе этого уравнения величина

$$m \int_V \left\{ f\, \mathbf{w}\, (e + \frac{w^2}{2}) + n\, \xi \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{f}{n}(e + \frac{w^2}{2})\right]\right\} dv$$

задает поток энергии, равный $k\dfrac{\partial E}{\partial \mathbf{x}}$.

Заметим, что при столкновениях молекул сохраняется их количество, импульс и энергия, и потому интегралы по V, связанные с величиной $J(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, не дают какого-либо вклада в законы сохранения. Следует обратить внимание на то, что в правой части к величине

$$\left[\tau : D + \rho\, \xi \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right) : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{u}\right)\right],$$

задающей скорость диссипации механической энергии, добавлена величина $\left(-\rho\, \theta\, \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$, что существенно меняет характер связи между механической энергией и тепловой.

Итак, уравнение (3.3) приводит к модифицированным уравнениям (4.1), (4.2), (4.5), описывающим движение вязкого газа. К этим уравнениям следует добавить еще и соотношения, задающие свойства среды: τ, $p(\rho, E)$, $\theta(\rho, E)$, $\xi(\rho, E)$. Кроме того, нужно учесть соотношения Гиббса

$$\frac{\partial E(\rho, S)}{\partial \rho} = p/\rho^2, \quad \frac{\partial E(\rho, S)}{\partial S} = T, \tag{4.6}$$

где $T(t, \mathbf{x})$ — абсолютная температура, а $S(t, \mathbf{x})$, как указывалось выше (см. (2.1)), — энтропия.

5. Распространение возмущений

Перейдем теперь к изучению скорости распространения возмущений, диктуемой уравнениями (4.1), (4.2), (4.5). Для определенности рассмотрим газ, в котором симметричная часть тензора напряжений задается формулой

$$\tau = I\,\zeta \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} + 2\,\mu\, D, \tag{5.1}$$

где I — единичный тензор, а D — тензор деформации. Далее, ради простоты, ограничимся случаем одномерного движения в окрестности состояния покоя. Приближенные уравнения такого движения имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\
\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(u + \theta_0 \frac{\partial u}{\partial t}\right) + a_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + b_0 \frac{\partial E}{\partial x} = q_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(E + \theta_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \left(\frac{p}{\rho}\right)_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + k_0 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2},
\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $a = \dfrac{\partial p(\rho, E)}{\partial \rho}$, $b = \dfrac{\partial p(\rho, E)}{\partial E}$ и, в соответствии с (5.1),

$$q = \zeta + 2\,\mu + \rho\,\xi. \tag{5.3}$$

Индекс 0 приписан величинам в состоянии покоя.

Как обычно, граница между возмущенным и невозмущенным потоками газа является поверхностью слабого разрыва. Для ее определения следует поставить общую задачу Коши и найти кривые $\omega(t, x) = \mathrm{const}$, на которых эта задача может иметь неоднозначное решение. Обратим внимание на то, что в систему (5.2) плотность $\rho(t, x)$ входит только первыми производными, в то время как $u(t, x)$ и $E(t, x)$ имеют там вторые производные. В связи с этим, в качестве данных Коши на кривых ω следует задать ρ, u, E, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, $\dfrac{\partial E}{\partial \nu}$ (ν — нормаль к кривой $\omega = \mathrm{const}$), а $\dfrac{\partial \rho}{\partial \nu}$ задавать не следует. Далее, с помощью этих данных и уравнений (5.2), требуется найти на ω значения $\dfrac{\partial \rho}{\partial \nu}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial \nu^2}$. Условием, обеспечивающим неединственность решения этой задачи, будет:

$$\begin{vmatrix} \omega_t, & 0, & 0 \\ a_0\,\omega_x, & \rho_0\,\theta_0{\omega_t}^2 - q_0\,{\omega_x}^2, & 0 \\ -\left(\dfrac{p}{\rho}\right)_0 \omega_t, & 0, & \rho_0\,\theta_0\,{\omega_t}^2 - k_0\,{\omega_x}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, возможные линии слабого разрыва должны удовлетворять одному из уравнений:

$$\omega_t = 0, \quad {\omega_t}^2 = \frac{q_0}{\rho_0\,\theta_0}{\omega_x}^2, \quad {\omega_t}^2 = \frac{k_0}{\rho_0\,\theta_0}{\omega_x}^2. \tag{5.4}$$

В силу линейности уравнений (5.2) общее решение можно искать в виде

$$\rho = R(y), \quad u = U(y), \quad E = E(y), \quad y = c\,t + x.$$

При этом c может принимать одно из значений:

$$0; \quad \pm\sqrt{q_0/\rho_0\,\theta_0}; \quad \pm\sqrt{k_0/\rho_0\,\theta_0}.$$

Подставляя эти выражения функций ρ, u, E в уравнения (5.2), найдем

$$c\,R' + U' = 0; \quad \rho_0\,c(U' + c\theta_0\,U'') + a_0\,R' + b_0\,E' = q_0\,U'';$$

$$\rho_0\,c(E' + c\,\theta_0 E'') = \left(\frac{p}{\rho}\right)_0 c\,R' + k_0\,E'',$$

где штрихом обозначены производные по аргументу y.

Отметим, что на границе, отделяющей область возмущенного течения от невозмущенного, терпят разрыв R', U'', E'', а R, U, U', E, E' — разрыва не терпят. Заметим еще одно важное обстоятельство: возмущения, внесенные в начальный момент, должны иметь функциональный произвол, которым мы можем распоряжаться. Следовательно, далее нас будут интересовать не просто какие-то решения уравнений (5.2), а решения, обладающие функциональным произволом. Нетрудно убедиться, что это возможно только в том случае, если

$$c^2 = \frac{q_0}{\rho_0\,\theta_0} = \frac{k_0}{\rho_0\,\theta_0} = \left[\frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}\right]_0.$$

Отсюда следует, что $k = q$ и что возможна только одна поверхность слабого разрыва, определяемая уравнением

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 = c^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2$$

и распространяющаяся по газу со скоростью, равной скорости звука.

В общем случае трехмерного движения газа характеристики должны удовлетворять (вместо (5.4)) одному из следующих уравнений:

$$\frac{d\,\omega}{dt} = 0, \quad \rho\,\theta\left(\frac{d\,\omega}{dt}\right)^2 = q\,\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{x}}\,, \quad \left(\frac{d\,\omega}{dt}\right)^2 = \frac{k}{\rho\,\theta}\,\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{x}}\,.$$

При этом СРВ определяется формулой

$$c^2 = \frac{q}{\rho\,\theta} = \frac{k}{\rho\,\theta} = \frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}.$$

6. Второй закон термодинамики

Естественно возникает вопрос: будет ли выполняться второй закон термодинамики для модифицированных уравнений? Рассмотрим в связи с этим фиксированную область пространства Q с границей ∂Q, заполненную вязким газом. Предположим, что газ полностью изолирован от внешних воздействий. Величина

$$S(t) = -\int\limits_Q\int\limits_V f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,\ln f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,dx\,dv$$

задает полную энтропию этого объема газа в момент t. Обозначим далее через $f_0(\mathbf{v})$ равновесную функцию распределения, а через $\varphi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ —разность $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - f_0(\mathbf{v})$.

Утверждается, что полная энтропия рассматриваемого объема газа в состоянии равновесия достигает своего максимального значения. Доказательство проведем с помощью вариационного метода. Рассмотрим функционал

$$S(\varphi) = -\int\limits_Q\int\limits_V [(f_0+\varphi)\,\ln(f_0+\varphi)]\,dx\,dv.$$

При $\varphi \equiv 0$ он задает полную энтропию в состоянии покоя. На функцию $\varphi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ следует при этом наложить два условия:

$$\int\limits_Q\int\limits_V \varphi\,dx\,dv = 0, \qquad \int\limits_Q\int\limits_V \varphi\,\ln f_0\,dx\,dv = 0.$$

Первое из них связано с тем обстоятельством, что количество молекул в рассматриваемом объеме одинаково при любых t. Второе условие задает поведение функции $\varphi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ при неограниченном росте величины скорости $\mathbf{v}$ и обеспечивает отсутствие потоков энергии через границу ∂Q. Пользуясь известным методом неопределенных множителей Лагранжа, перейдем к разысканию безусловного экстремума функционала

$$S_1(\varphi, C_1, C_2) = -\int\limits_Q\int\limits_V [(f_0+\varphi)\,\ln(f_0+\varphi) + C_1\,\varphi + C_2\,\varphi\,\ln f_0]\,dx\,dv,$$

где $C_1,\ C_2$ — постоянные.

Необходимые условия экстремума для него имеют вид

$$1 + \ln(f_0+\varphi) + C_1 + C_2\,\ln f_0] = 0,$$

$$\int\limits_Q\int\limits_V \varphi\,dx\,dv = 0, \qquad \int\limits_Q\int\limits_V \varphi\,\ln f_0\,dx\,dv = 0.$$

Они будут выполнены при $\varphi \equiv 0,\ C_1 = -1,\ C_2 = -1$.

Вторая вариация функционала $S_1(\varphi)$ будет отрицательна, так что при $\varphi \equiv 0$, а именно в условиях равновесия, функционал $S(\varphi)$ достигает максимума. Что и требовалось доказать.

Рассматривая медленное движение газа внутри Q, мы можем воспользоваться для его описания приближенными линейными уравнениями, вытекающими из (4.1), (4.2), (4.5). При этом скорости газа будут стремиться к нулю, правда не обязательно монотонно. Иными словами, полная энтропия объема газа стремится к своему максимальному (равновесному) значению, не обязательно монотонно.

Заключение

В заключение отметим, что полученное кинетическое уравнение, записанное с погрешностью θ^2, существенно изменило уравнения движения вязкого газа. Вместо параболической возникла гиперболическая система уравнений, что привело к совершенно новой постановке задач: необходимы дополнительные начальные условия, а при сверхзвуковом движении *не следует* задавать, в отличие от модели Навье—Стокса, краевые условия на границе вниз по потоку. Существенно меняется и характер течения газа. Проиллюстрировать это можно на таком примере. Рассмотрим одномерное установившееся движение вязкого газа.

Уравнения такого движения при отсутствии внешних сил, с учетом (5.3), имеют вид

$$\frac{d}{dx}(\rho\, u) = 0, \quad \frac{d}{dx}(p + \rho\, u^2) = \frac{d}{dx}\left[(q - \rho\,\theta\, u^2)\frac{du}{dx}\right],$$
$$\frac{d}{dx}\left[\rho\, u\,(E + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho})\right] = \frac{d}{dx}\left[(q - \rho\,\theta\, u^2)\,\frac{dE}{dx}\right].$$

Нетрудно видеть, что $(q - \rho\,\theta\, u^2)$ меняет знак при переходе через скорость звука, так что поведение величин $(p + \rho\, u^2)$ и $\left(E + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p}{\rho}\right)$ будет разным в до- и сверхзвуковом потоках. Из уравнений приведенных выше также следует, что они допускают возможность наличия скачка уплотнения (разрыва ρ, u, E) при переходе сверхзвукового течения в дозвуковое, в то время как в модели Навье—Стокса (т. е. при $\theta = 0$) такие скачки невозможны, поскольку невозможно само существование сверхзвукового движения.

Остановимся на причине появления бесконечной СРВ. Поскольку уравнение (1.1) является приближенным с погрешностью θ, согласно изложенному в разд. 3, то очевидно, что не имеет смысла вводить тензор вязких напряжений, содержащий величины порядка θ, в законы сохранения, вытекающие из (1.1). Именно введение такого тензора и приводит к бесконечной СРВ.

Следует также еще раз обратить внимание на тот факт, что для модифицированной модели в уравнении сохранения момента количества движения (4.3) возникает дополнительный момент сил $\rho\,\theta\, \mathbf{u} \times \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, который может существенно влиять на формирование вихрей в потоке газа.

Список литературы

[1] Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967.

[2] Кузнецов Б.Г. Гиперболическая модификация уравнения Навье—Стокса // ПМТФ. 1993. № 6. С. 133–141.

[3] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд. иностр. лит-ры, 1963.

Поступила в редакцию 30 октября 2007 г.