Вычислительные технологии **Том 13, № 2, 2008**

Построение полей течений газа за фронтом расходящейся ударной волны в задаче о сферически- или цилиндрически-симметричном неавтомодельном сжатии

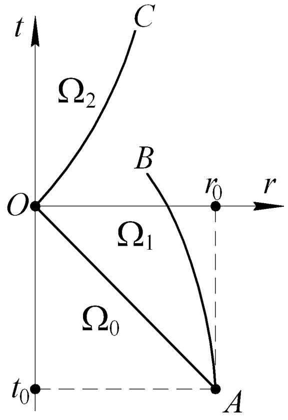
А. Л. Казаков
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: `AKazakov@math.usurt.ru`

A mathematical formulation of the problem on a non-selfsimilar compression of a symmetric gas volume without formation of shocks [1, 2] is a special initial boundary-value problem called the Generalized Cauchy Problem. Notion "Generalized Cauchy Problem" for non-linear partial differential equations is introduced on the basis of results by N.A. Lednev [3]. Existence and of uniqueness issues of analytical solutions of the Generalized Cauchy Problem are considered. The constructed gas flows could be used for simulation of a powerful compression of gas.

Введение

Продолжается [1, 2] исследование задачи о неавтомодельном безударном сжатии цилиндрически- или сферически-симметричного объема газа, когда на ось или в центр симметрии фокусируется волна сжатия, вызванная плавным вдвижением в идеальный покоящийся газ непроницаемого поршня. После фокусировки от оси или центра симметрии с конечной скоростью расходится ударная волна (УВ), на фронте которой выполнены условия Гюгонио. Тем самым обобщается на случай двух независимых переменных известное автомодельное решение Седова [4, 5]. Конфигурация соответствующих течений в плоскости переменных t (время) и r (растояние до оси или центра симметрии) приведена на рисунке, где Ω_0 — область однородного покоя, Ω_1 — область волны сжатия, OC — расходящаяся УВ. Ранее было построено решение рассматриваемой задачи в области Ω_1 [1, 2], а построение полей течений газа в области Ω_2 сведено к построению решения обобщенной задачи Коши (ОЗК) с данными на двух поверхностях для системы с особенностью [2]. Теорема существования и единственности решения этой ОЗК в классе аналитических функций была сформулирована [2] без доказательства.

В данной статье приводится доказательство теоремы, включающее построение решения в виде двойных степенных рядов и доказательство сходимости методом мажорант. Доказательство носит конструктивный характер, что делает возможным использование построенных рядов для приближенного построения полей течений газа и тестирования численных методик.



Термин “обобщенная задача Коши” предложен Н.А. Леднёвым [3]. ОЗК отличается от задачи Коши (ЗК) в традиционной постановке тем, что данные для разных функций ставятся на разных поверхностях, а от смешанной задачи — тем, что число граничных условий равно числу неизвестных функций [6]. ОЗК возникает в газовой динамике при описании течений газа с ударными волнами [7–10].

1. Постановка задачи и формулировка для нее теоремы существования и единственности аналитического решения

Рассматривается случай трех неизвестных функций, зависящих от двух независимых переменных, причем одна из неизвестных функций определена только на одной из плоскостей, несущих начальные данные, и фактически удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} u_x = a(x,y,u,v,w)u_y + b(x,y,u,v,w)v_x + f(x,y,u,v,w), \\ v_y = c(x,y,u,v,w)u_y + d(x,y,u,v,w)v_x + g(x,y,u,v,w), \\ w_x = [e(x,y,u,v,w)]|_{y=0}. \end{cases} \tag{1}$$

Начальные данные для системы (1) берутся в виде

$$\begin{cases} w|_{x=0} = w_0, \;\; u|_{x=0} = u_0(y)|_{x=0}, \quad u_0(0) = u_{00}, \\ v|_{y=0} = v_0(x,u,w)|_{y=0}, \quad v_0(0,u_{00},w_0) = v_{00}. \end{cases} \tag{2}$$

Поставленную обобщенную задачу Коши с данными на двух поверхностях будем называть задачей А3.

Предполагается, что задача А3 имеет конкретные особенности:

$$f(x,y,u,v,w) = \frac{f_1(x,y,u,v,w)}{x}, \quad e(x,y,u,v,w) = \frac{e_1(x,y,u,v,w)}{x},$$

где функции f_1, g_1 особенностей не имеют.

Решение задачи А3 будет строиться в классе аналитических функций, поэтому предполагается выполнение дополнительных условий. Пусть f_1 и e_1 имеют вид

$$f_1 = [u - u_0(y)]f_2(x,y,u,v,w) + xf_3(x,y,u,v,w),$$

$$e_1 = [u - u_0(y)]r(x,y,u,v,w) + (w - w_0)s(x,y,u,v,w) + xh(x,y,u,v,w);$$

функции $a, b, c, d, f_2, f_3, r, s, h$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $(x = 0,\ y = 0,\ u = u_{00},\ v = v_{00},\ w = w_{00})$. Функции $u_0,\ v_0$ также предполагаются аналитическими, и задача А3 записывается следующим образом:

$$\begin{cases} u_x = a(x,y,u,v,w)u_y + b(x,y,u,v,w)v_x + \dfrac{[u-u_0(y)]}{x} f_2(x,y,u,v,w)+ \\ \qquad +f_3(x,y,u,v,w), \\ v_y = c(x,y,u,v,w)u_y + d(x,y,u,v,w)v_x + g(x,y,u,v,w), \\ w_x = [r(x,y,u,v,w)\dfrac{[u-u_0(y)]}{x} + s(x,y,u,v,w)\dfrac{(w-w_0)}{x}+ \\ \qquad +h(x,y,u,v,w)]|_{y=0}, \\ \\ w|_{x=0} = w_0,\ u|_{x=0} = u_0(y)|_{x=0}, \quad u_0(0) = u_{00}, \\ v|_{y=0} = v_0(x,u,w)|_{y=0}, \quad v_0(0,u_{00},w_0) = v_{00}. \end{cases} \tag{3}$$

Теперь в задаче (3) делается замена неизвестных функций для приведения начальных данных к однородному виду. Новые неизвестные функции u', v', w' вводятся по формулам

$$u' = u - u_0(y), \quad v' = v - v_0(x,u,w)|_{y=0}, \quad w' = w - w_0. \tag{4}$$

В результате замены (4) начальные условия (2) принимают вид

$$u'|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=0}, \quad v'|_{y=0} = 0.$$

Якобиан замены (4)

$$J_2 = \begin{vmatrix} u'_u & u'_v & u'_w \\ v'_u & v'_v & v'_w \\ w'_u & w'_u & w'_w \end{vmatrix} = 1,$$

следовательно, замена (4) в некоторой окрестности точки $O(x = 0, y = 0, u = u_{00}, v = v_{00}, w = w_0)$ невырожденная.

Вводятся обозначения

$$\lambda = v_{0u}(0,u_{00},w_0), \quad \kappa = v_{0w}(0,u_{00},w_0), \quad \lambda, \kappa - \text{const}. \tag{5}$$

Для того чтобы с учетом замены (4) преобразовать систему (3), необходимо старые неизвестные u, v выразить через новые u', v'. С этой целью выполняются некоторые преобразования. Из (4) непосредственно следует, что

$$u = u' + u_0(y), \quad w = w' + w_0. \tag{6}$$

После подстановки во второе из соотношений (4) равенств (6) получается, что

$$v' = v - v_0(x,u,w)|_{y=0} = v - v_0(x, u|_{y=0}, w|_{y=0}) =$$

$$= v - v_0(x, u'|_{y=0} + u_0(0), w' + w_0) = v - v_0(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0}.$$

Таким образом, искомые выражения старых неизвестных u, v через новые неизвестные u', v' (и независимые переменные x, y) имеют вид

$$u = u' + u_0(y), \quad v = v' + v_0(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0},\ w = w' + w_0. \tag{7}$$

Прежде чем подставлять соотношения (7) в систему (3), необходимо дополнительно получить соотношения для производных. Для этого обе части соотношений (7) последовательно дифференцируются по x и по y. В результате получается, что

$$\begin{cases} u_x = u'_x, \\ u_y = u'_y + u_{0y}(y), \\ v_x = v'_x + v_{0x}(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0} + \\ + v_{0u}(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0} \cdot u'_x|_{y=0} + v_{0w}(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0} \cdot w'_x, \\ v_y = v'_y, \\ w_x = w'_x, \\ w_y = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Вводятся обозначения:

$$u_1|_{x=0} = u_{0y}(y),$$

$$v_1|_{y=0} = v_{0x}(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0} + \left[v_{0u}(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0} - \lambda\right] u'_x|_{y=0} + \tag{9}$$

$$+ \left[v_{0w}(x, u' + u_{00}, w' + w_0)|_{y=0} - \kappa\right] w'_x.$$

Функция v_1 зависит от независимых переменных x, y, неизвестных функций u', w' и их производных $u'_x|, w'_x$. Причем зависимость от производных линейная и коэффициенты перед производными обращаются в нуль в точке O $(x = 0, y = 0, u' = 0, v' = 0, w' = 0)$.

С учетом обозначений (5), (9) соотношения (8) переходят в соотношения

$$\begin{cases} u_x = u'_x, \\ u_y = u'_y + u_1|_{x=0}, \\ v_x = v'_x + \lambda u'_x|_{y=0} + \kappa w'_x|_{y=0} + v_1|_{y=0}, \\ v_y = v'_y, \\ w_x = w'_x, \\ w_y = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Теперь правые части формул (7), (10) подставляются в систему (3). В результате эта система преобразуется к виду

$$\begin{cases} u'_x = a'(u'_y + u_1|_{x=0}) + b'(v'_x + \lambda u'_x|_{y=0} + \kappa w'_x|_{y=0} + v_1|_{y=0}) + \dfrac{u'}{x} f'_2 + f'_3, \\ v_y = c'(u'_y + u_1|_{x=0}) + d'(v'_x + \lambda u'_x|_{y=0} + \kappa w'_x|_{y=0} + v_1|_{y=0}) + g', \\ w_x = \left(r' \dfrac{u'}{x} + s' \dfrac{w'}{x} + h'\right)|_{y=0}, \end{cases} \tag{11}$$

где функции a', b', c', d', f'_2, f'_3, g', r', s', h' получаются из функций a, b, c, d, f_2, f_3, g, r, s, h в результате замены (4). Для упрощения обозначений штрих у известных и искомых функций далее опускается.

Пусть

$$A = a(O),\ B = b(O),\ C = c(O),\ D = d(O),$$

$$f_0 = f_2(O),\ r_0 = r(O),\ s_0 = s(O).$$

Вводятся следующие обозначения:

$$p_1 = (a - A)u_y + xau_1|_{x=0} + (b - B)(v_x + \lambda u_x|_{y=0} + \kappa w_x|_{y=0}) + bv_1|_{y=0},$$

$$p = xp_1 + u(f_2 - f_0) + xf_3,$$
$$q = (c - C)u_y + cu_1|_{x=0} + (d - D)(v_x + \lambda u_x|_{y=0} + \kappa w_x|_{y=0}) + dv_1|_{y=0} + g, \tag{12}$$
$$t = [(r - r_0)u + (s - s_0)w + xh]|_{y=0}.$$

Обе части первого и третьего уравнений системы из задачи (11) умножаются на x. Во введенных выше обозначениях задача примет вид

$$\begin{cases} xu_x = xAu_y + xBv_x + x\lambda Bu_x|_{y=0} + x\kappa Bw_x|_{y=0} + f_0 u + p, \\ v_y = Cu_y + Dv_x + \lambda Du_x|_{y=0} + \kappa Dw_x|_{y=0} + q, \\ xw_x = [r_0 u + s_0 w + t]|_{y=0}, \\ u(0,y) = 0,\ v(x,0) = 0,\ w(0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 1.1. *Пусть в задаче* (13) *функции* f, p_1, q, t, *определяемые по формулам (12), обладают следующими свойствами: являются аналитическими в некоторой окрестности точки* O $(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0, w = 0)$ *функциями переменных* x, y, u, v, w; p_1, q *линейно зависят от производных* u_y, v_x, $u_x|_{y=0}$, $v_y|_{x=0}$, $w_x|_{y=0}$, *причем коэффициенты перед этими производными обращаются в нуль в точке* O; *для функции* t *справедливы равенства*

$$t|_{x=u=w=0} = \left.\frac{\partial t}{\partial u}\right|_{x=u=w=0} = \left.\frac{\partial t}{\partial w}\right|_{x=u=w=0} = 0.$$

Вводятся константы

$$A_n = \frac{nA}{n - f_0}, \quad B_n = \frac{nB}{n - f_0},$$
$$C_n^* = C + \left(\lambda + \frac{\kappa r_0}{n - s_0}\right) \frac{ADn}{\left(1 - B\lambda - \dfrac{B\kappa r_0}{n - s_0}\right) n - f_0}.$$

Также вводятся числовые последовательности $\delta_n, \Delta_n, \Delta_n^*$ *по формулам*

$$\delta_0 = 0; \quad \Delta_0 = 1; \quad \Delta_0^* = 1;$$
$$\delta_{n+1} = \begin{cases} 1 + A_{n+1} D \dfrac{B_n \delta_n}{B_{n+1}\Delta_n}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0; \end{cases} \tag{14}$$
$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} 1 - CB_{n+1}\delta_{n+1}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0; \end{cases} \tag{15}$$
$$\Delta_{n+1}^* = \begin{cases} 1 - C_{n+2}^* B_{n+1}\delta_{n+1}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0; \end{cases} \tag{16}$$
$$n \in N_0.$$

Если выполняются условия

$$f_0 \neq n, \quad s_0 \neq n, \quad \left(1 - B\lambda - \frac{B\kappa r_0}{n - s_0}\right) n - f_0 \neq 0, \quad \Delta_n^* \neq 0, \quad \Delta_n \neq 0; \quad n \in N; \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_\infty, \quad |\delta_\infty| < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \Delta_\infty \neq 0, \quad |\Delta_\infty| < +\infty; \tag{18}$$

$$\frac{|AD|}{\Delta_\infty^2} < 1; \tag{19}$$

то у задачи (13) *существует в некоторой окрестности точки O единственное аналитическое решение. При этом условия* (17) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных степенных рядов.*

2. Построение формального решения

Прежде чем строить решение задачи (13) в виде формальных степенных рядов, а затем доказывать их сходимость, в задаче (13) делается замена переменных:

$$x' = \varepsilon_1 x, \quad y' = \varepsilon_2 y, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 - \mathrm{const} > 0,$$

где ε_1 и ε_2 выбираются следующим образом. Если

$$|A| < |\Delta_\infty|, \quad |D| < |\Delta_\infty|, \tag{20}$$

то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, т. е. замена не производится. Если $|A| < |\Delta_\infty| \leq |D|$, то $\varepsilon_2 = 1$, а за ε_1 выбирается любое число, удовлетворяющее неравенствам $|A|/|\Delta_\infty| < \varepsilon_1 < |\Delta_\infty|/|D|$. Это возможно в силу (18), (19), поскольку $0 < |\Delta_\infty| \leq |D|$. Если же $|D| < |\Delta_\infty| \leq |A|$, то $\varepsilon_1 = 1$, а за ε_2 выбирается число, удовлетворяющее неравенствам $|D|/|\Delta_\infty| < \varepsilon_2 < |\Delta_\infty|/|A|$, что также возможно при условиях (18), (19). Случай $|\Delta_\infty| \leq |A|$, $|\Delta_\infty| \leq |D|$ невозможен в силу условия (19). В результате такой замены задача (13) перейдет в задачу

$$\begin{cases} x'u_{x'} = x'Au_{y'} + x'Bv_{x'} + x'\lambda Bu_{x'}|_{y'=0} + x'\kappa Bw_{x'}|_{y'=0} + f_0 u + p', \\ v_{y'} = Cu_{y'} + Dv_{x'} + \lambda Du_{x'}|_{y'=0} + \kappa Dw_{x'}|_{y'=0} + q', \\ x'w_{x'} = [r_0 u + s_0 w + t']|_{y'=0}, \\ u(0, y') = 0, \ v(x', 0) = 0, \ w(0) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

где в аргументах у функций надо заменить x, y на x'/ε_1, y'/ε_2 соответственно. У задачи (21) значения констант $\Delta_n', (\Delta_n^*)', \delta_n', \Delta_\infty', \delta_\infty'$ совпадают со значениями соответствующих констант (15) задачи (13). Однако за счет выбора $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ будут выполняться неравенства

$$|A'| = \left|\frac{\varepsilon_2 A}{\varepsilon_1}\right| < |\Delta_\infty|, \quad |D'| = \left|\frac{\varepsilon_1 D}{\varepsilon_2}\right| < |\Delta_\infty|.$$

Далее предполагается, что соответствующая замена сделана, у новой задачи для облегчения написания штрихи опускаются, т. е. за преобразованной задачей сохраняется написание (13) и тогда справедливо неравенство (20).

Решение задачи (13) будет строиться в виде рядов (символ z обозначает u, v):

$$z(x, y) = \sum_{k,l \in N_0} \frac{z_{k,l} x^k y^l}{k!l!}, \quad z_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l} z}{\partial x^k \partial y^l}\right|_{x=y=0},$$

$$w(x) = \sum_{n \in N_0} \frac{w_n x^n}{n!}, \quad w_k = \left.\frac{d^k w}{dx^k}\right|_{x=0}. \tag{22}$$

Пусть

$$q_{k,l}=\left.\frac{\partial^{k+l}r}{\partial x^k\partial y^l}\right|_{x=y=u=v=w=0},\quad p_{k,l}=\left.\frac{\partial^{k+l+1}r}{\partial x^{k+1}\partial y^l}\right|_{x=y=u=v=w=0},\quad t_n=\left.\frac{\partial^{n+1}t|_{y=0}}{\partial x^{n+1}}\right|_{x=u=v=w=0},$$

$$\mathbf{z}_n=(z_{n,0};z_{n-1,1};\ldots;z_{0,n}),\quad \mathbf{r}_n=(r_{n,0};r_{n-1,1};\ldots;r_{0,n}).$$

Символ r принимает значения p,q. В $r_{k,l};\ t_n$ будут входить компоненты векторов $(\mathbf{z}_m,w_m)$ при $0\le m\le l+k=n-1$ и не будут входить компоненты векторов $(\mathbf{z}_m,w_m)$ при $m\ge l+k=n$.

Возможность однозначного определения коэффициентов рядов (22) доказывается индукцией по $n=k+l$. В силу начальных условий

$$u_{0,l}=v_{k,0}=w_0=0;\quad k,l\in N_0, \tag{23}$$

и в частности, $w_0=u_{0,0}=v_{0,0}=0$. Следовательно, $\mathbf{z}_0,w_0$ однозначно определяются начальными условиями. Пусть все $\mathbf{z}_0,w_0,\ldots,\mathbf{z}_n,w_n,\ n\ge 0$, найдены. Чтобы найти $\mathbf{z}_{n+1},w_{n+1}$, первое и третье уравнения (13) дифференцируются $k+1$ раз по x, $n-k$ раз по y; второе уравнение (13) дифференцируется k раз по x, $n-k$ раз по y, полагаются $x=y=u=v=w=0$ и учитываются начальные условия в виде (23), а также тот факт, что w от y не зависит. В результате получаются соотношения

$$\begin{cases}
(n+1)w_{n+1}=r_0u_{n+1,0}+s_0w_{n+1}+t_{n+1},\\
u_{0,n+1}=0,\\
u_{1,n}=Au_{0,n+1}+Bv_{1,n}+f_0u_{1,n}+p_{1,n},\\
v_{0,n+1}=Cu_{0,n+1}+Dv_{1,n}+q_{0,n},\\
\qquad\ldots\\
(k+1)u_{k+1,n-k}=\\
\qquad=(k+1)Au_{k,n-k+1}+(k+1)Bv_{k+1,n-k}+f_0u_{k+1,n-k}+p_{k+1,n-k},\\
v_{k,n+1-k}=Cu_{k,n+1-k}+Dv_{k+1,n-k}+q_{k,n-k},\\
\qquad\ldots\\
nu_{n,1}=nAu_{n-1,2}+nBv_{n,1}+f_0u_{n,1}+p_{n,1},\\
v_{n-1,2}=Cu_{n-1,2}+Dv_{n,1}+q_{n-1,1},\\
(n+1)u_{n+1,0}=(n+1)Au_{n,1}+(n+1)Bv_{n+1,0}+f_0u_{n+1,0}+\\
\qquad+(n+1)\lambda Bu_{n+1,0}+(n+1)\kappa Bw_{n+1}+p_{n+1,0},\\
v_{n,1}=Cu_{n,1}+Dv_{n+1,0}+\lambda Du_{n+1,0}+\kappa Dw_{n+1}+q_{n,0},\\
v_{n+1,0}=0,
\end{cases} \tag{24}$$

являющиеся системой линейных алгебраических уравнений для $\mathbf{u}_{n+1},\ \mathbf{v}_{n+1},\ w_{n+1}$.

Далее СЛАУ (24) преобразуется к более удобному виду. Разрешается первое уравнение относительно w_{n+1}:

$$w_{n+1}=\frac{r_0}{n+1-s_0}u_{n+1,0}+\frac{t_{n+1}}{n+1-s_0}.$$

Разрешается $(2k+3)$-е уравнение системы относительно $u_{k+1,n-k}$:

$$u_{k+1,n-k}=\frac{k+1}{k+1-f_0}Au_{k,n+1-k}+\frac{k+1}{k+1-f_0}Bv_{k+1,n-k}+$$

$$+\frac{p_{k+1,n-k}}{k+1-f_0} = A_{k+1}u_{k,n+1-k} + B_{k+1}v_{k+1,n-k} + \frac{p_{k+1,n-k}}{k+1-f_0}.$$

Наконец, $(n+3)$-е и $(n+4)$-е уравнения преобразуются следующим образом: в них подставляются выражения для w_{n+1} и значение $v_{n+1,0}=0$. Получается, что

$$(n+1)u_{n+1,0} = (n+1)Au_{n,1} + f_0 u_{n+1,0} + (n+1)B\lambda u_{n+1,0} +$$

$$+B\kappa(n+1)\left(\frac{r_0}{n+1-s_0}u_{n+1,0} + \frac{t_{n+1}}{n+1-s_0}\right) + p_{n+1,0}, \tag{25}$$

$$v_{n,1} = Cu_{n,1} + \lambda D u_{n+1,0} + \kappa D\left(\frac{r_0}{n+1-s_0}u_{n+1,0} + \frac{t_{n+1}}{n+1-s_0}\right) + q_{n,0}. \tag{26}$$

Из уравнения (25) имеем, что

$$u_{n+1,0} = \frac{A(n+1)}{(n+1)\left(1 - B\lambda - \dfrac{B\kappa r_0}{n+1-s_0}\right) - f_0}u_{n,1} +$$

$$+\frac{\dfrac{B\kappa(n+1)t_{n+1}}{n+1-s_0} + p_{n,0}}{(n+1)\left(1 - B\lambda - \dfrac{B\kappa r_0}{n+1-s_0}\right) - f_0} = A^*_{n+1}u_{n,1} + P^*_n.$$

Таким образом, получено уравнение

$$u_{n+1,0} = A^*_{n+1}u_{n,1} + P^*_n, \tag{27}$$

где

$$A^*_{n+1} = \frac{A(n+1)}{(n+1)\left(1 - B\lambda - \dfrac{B\kappa r_0}{n+1-s_0}\right) - f_0},$$

$$P^*_n = \frac{\dfrac{B\kappa(n+1)t_{n+1}}{n+1-s_0} + p_{n,0}}{(n+1)\left(1 - B\lambda - \dfrac{B\kappa r_0}{n+1-s_0}\right) - f_0}.$$

Из (26) и (27) следует, что

$$v_{1,n} = Cu_{1,n} + \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right)u_{n+1,0} + \frac{\kappa D t_{n+1}}{n+1-s_0} + q_{n,0} =$$

$$= Cu_{1,n} + \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right)(A^*_{n+1}u_{n,1} + P^*_n) + \frac{\kappa D t_{n+1}}{n+1-s_0} + q_{n,0} =$$

$$= \left[C + \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right)A^*_{n+1}\right]u_{n,1} + \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right)P^*_n + \frac{\kappa D t_{n+1}}{n+1-s_0} + q_{n,0}.$$

Пусть

$$T_n = \frac{t_{n+1}}{n+1-s_0},\ P_{k,n-k} = \frac{p_{k+1,n-k}}{k+1-f_0},\ Q_{k,n-k} = q_{k,n-k},$$

$$Q^*_n = \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right)P^*_n + \frac{\kappa D t_{n+1}}{n+1-s_0} + q_{n,0},$$

$$r_{n+1} = \frac{r_0}{n+1-s_0},$$

$$C^*_{n+1} = C + \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right) A^*_{n+1} =$$

$$= C + \left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right) \frac{A(n+1)}{(n+1)\left(1 - B\lambda - \dfrac{B\kappa r_0}{n+1-s_0}\right) - f_0}.$$

Используя введенные выше обозначения, систему (24) можно переписать в виде

$$\begin{cases} w_{n+1} = r_{n+1} u_{n+1,0} + T_n, \\ v_{0,n+1} = D v_{1,n} + Q_{0,n}, \\ v_{1,n} = D v_{2,n-1} + C u_{1,n} + Q_{1,n-1}, \\ \qquad \ldots \\ v_{k,n+1-k} = D v_{k+1,n-k} + C u_{k,n+1-k} + Q_{k,n-k}, \\ \qquad \ldots \\ v_{n-1,2} = D v_{n,1} + C u_{n-1,2} + Q_{n-1,1}, \\ v_{n,1} = C^*_{n+1} u_{n,1} + Q^*_n, \\ u_{n+1,0} = A^*_{n+1} u_{n,1} + P^*_n, \\ u_{n,1} = A_n u_{n-1,2} + B_n v_{n,1} + P_{n-1,1}, \\ \qquad \ldots \\ u_{k+1,n-k} = A_{k+1} u_{k,n+1-k} + B_{k+1} v_{k+1,n-k} + P_{k,n-k}, \\ \qquad \ldots \\ u_{2,n-1} = A_2 u_{1,n} + B_2 v_{2,n-1} + P_{1,n-1}, \\ u_{1,n} = B_1 v_{1,n} + P_{0,n}. \end{cases} \tag{28}$$

СЛАУ (28) в каждом уравнении содержит, в отличие от СЛАУ (24), не более трех неизвестных, а поэтому решать ее удобнее.

Решается система (28) методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). "Прямой ход" метода состоит в следующем. Из второго уравнения (28) имеем

$$v_{0,n+1} = D v_{1,n} + Q_{0,n} = \frac{D v_{1,n}}{\Delta_0} + \psi_{1,n},$$

где

$$\Delta_0 = 1, \quad \psi_{1,n} = \frac{Q_{0,n}}{\Delta_0};$$

из последнего уравнения (28) следует, что

$$u_{1,n} = B_1 v_{1,n} + P_{0,n} = B_1 \delta_1 v_{1,n} + \chi_{1,n},$$

где

$$\delta_1 = 1, \quad \chi_{1,n} = P_{0,n};$$

из третьего уравнения (28) имеем

$$v_{1,n} = D v_{2,n-1} + C u_{1,n} + Q_{1,n-1} = D v_{2,n-1} + C(B_1 \delta_1 v_{1,n} + \chi_{1,n}) + Q_{1,n-1}.$$

Отсюда следует справедливость равенства

$$v_{1,n} = \frac{D}{1-CB_1\delta_1}v_{2,n-1} + \frac{C\chi_{1,n}+Q_{1,n-1}}{1-CB_1\delta_1} = \frac{D}{\Delta_1}v_{2,n-1} + \psi_{2,n-1},$$

где

$$\Delta_1 = 1 - CB_1\delta_1, \quad \psi_{2,n-1} = \frac{C\chi_{1,n}+Q_{1,n-1}}{\Delta_1}.$$

Из последнего уравнения (28) имеем

$$u_{2,n-1} = A_2u_{1,n} + B_2v_{2,n-1} + P_{1,n-1} =$$

$$= A_2(B_1\delta_1v_{1,n} + \chi_{1,n}) + P_{1,n-1} + B_2v_{2,n-1} =$$

$$= A_2B_1\delta_1\left(\frac{D}{\Delta_1}v_{2,n-1} + \psi_{2,n-1}\right) + A_2\chi_{1,n} + P_{1,n-1} + B_2v_{2,n-1} =$$

$$= B_2\left(1 + \frac{B_1}{B_2}A_2D\frac{\delta_1}{\Delta_1}\right)v_{2,n-1} + A_2(B_1\delta_1\psi_{2,n-1} + \chi_{1,n}) + P_{1,n-1} =$$

$$= B_2\delta_2v_{2,n-1} + \chi_{2,n-1},$$

где

$$\delta_2 = \begin{cases} 1 + \dfrac{B_1}{B_2}A_2D\dfrac{\delta_1}{\Delta_1}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0, \end{cases}$$

$$\chi_{2,n-1} = A_2(B_1\delta_1\psi_{2,n-1} + \chi_{1,n}) + P_{1,n-1},$$

и так далее, с каждым шагом продвигаясь к центру системы. В результате получается, что

$$v_{k,n-k+1} = \frac{D}{\Delta_k}v_{k+1,n-k} + \psi_{k+1,n-k},$$

$$u_{k+1,n-k} = B_{k+1}\delta_{k+1}v_{k+1,n-k} + \chi_{k+1,n-k}, \quad k = 0,\ldots,n-1,$$

где

$$\chi_{k+1,n-k} = A_{k+1}(B_k\delta_k\psi_{k+1,n-k} + \chi_{k,n-k+1}) + P_{k,n-k},$$

$$\psi_{k+1,n-k} = \frac{C\chi_{k,n+1-k}+Q_{k,n-k}}{\Delta_k}, \ \Delta_k = 1 - CB_k\delta_k,$$

$$\delta_{k+1} = \begin{cases} 1 + \dfrac{B_k}{B_{k+1}}A_{k+1}D\dfrac{\delta_k}{\Delta_k}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0. \end{cases}$$

Наконец,

$$v_{n,1} = \psi^*_{n+1},$$

где

$$\psi^*_{n+1} = \frac{C^*_{n+1}\chi_{n,1}+Q^*_n}{\Delta^*_n}, \ \Delta^*_n = 1 - C^*_{n+1}B_n\delta_n,$$

$$u_{n+1,0} = \chi^*_{n+1},$$

$$\chi^*_{n+1} = A^*_{n+1}(B_n\delta_n\psi^*_{n+1} + \chi_{n,1}) + P^*_n.$$

“Обратный ход” метода состоит в последовательном определении значений $u_{k+1,n-k}$, $v_{k,n-k+1}$. При выполнении условий (17) $\mathbf{u}_{n+1},\ \mathbf{v}_{n+1}$ однозначно определяются:

$$v_{n+1,0} = 0,$$

$$v_{n,1} = \psi^*_{n+1},\ u_{n+1,0} = \chi^*_{n+1},$$

$$v_{n-1,2} = \frac{D}{\Delta_{n-1}} v_{n,1} + \psi_{n,1}, \quad u_{n,1} = B_n \delta_n v_{n,1} + \chi_{n,1},$$

$$\ldots$$

$$v_{0,n+1} = \frac{D}{\Delta_0} v_{1,n} + \psi_{1,n}, \quad u_{1,n} = B_1 \delta_1 v_{1,n} + \chi_{1,n}.$$

Для доказательства сходимости рядов (22) удобно перейти от рекуррентных формул для $\chi_{k+1,n-k}$ к явным через A_i, B_i, Δ_i, Δ^*_n, δ_i, $P_{k,l}$, $Q_{k,l}$. Как уже показано,

$$\psi_{1,n} = \frac{Q_{0,n}}{\Delta_0}, \quad \chi_{1,n} = P_{0,n}, \quad \psi_{2,n-1} = \frac{CP_{0,n} + Q_{1,n-1}}{\Delta_1}.$$

Выражения для $\psi_{2,n-1}, \chi_{1,n}$ подставляются в формулу для $\chi_{2,n-1}$:

$$\chi_{2,n-1} = A_2(B_1\delta_1\psi_{2,n-1} + \chi_{1,n}) + P_{1,n-1} = A_2\left[\frac{B_1\delta_1(C\chi_{1,n} + Q_{1,n})}{\Delta_1} + \chi_{1,n}\right] + P_{1,n-1} =$$

$$= A_2\left(\frac{B_1 C\delta_1}{\Delta_1} + 1\right) P_{0,n} + \frac{B_1 A_2 \delta_1 Q_{1,n-1}}{\Delta_1} + P_{1,n-1} = \frac{A_2}{\Delta_1} P_{0,n} + P_{1,n-1} + \frac{B_1 A_2 \delta_1 Q_{1,n-1}}{\Delta_1}.$$

Доказывается, что для $\chi_{k+1,n-k}$ справедлива следующая формула:

$$\chi_{k+1,n-k} = \left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right) P_{i-1,n+1-i}\right] + P_{k,n-k}\right\} +$$

$$+ \left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right) B_i\delta_i Q_{i,n-i}\right]\right\}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{29}$$

Доказательство проводится индукцией по k. Случай $k = 1$ уже рассмотрен. Пусть до k включительно формула (29) справедлива. Доказывается, что тогда она верна и для $k+1$. В самом деле

$$\chi_{k+2,n-k-1} = A_{k+2}(B_{k+1}\delta_{k+1}\psi_{k+2,n-k-1} + \chi_{k+1,n-k}) + P_{k+1,n-k-1} =$$

$$= A_{k+2}\left[\frac{B_{k+1}\delta_{k+1}(C\chi_{k+1,n-k} + Q_{k+1,n-k-1})}{\Delta_{k+1}} + \chi_{k+1,n-k}\right] + P_{k+1,n-k-1} =$$

$$= A_{k+2}\left(\frac{B_{k+1}C\delta_{k+1}}{\Delta_{k+1}} + 1\right)\chi_{k+1,n-k} + P_{k+1,n-k-1} + \frac{A_{k+2}B_{k+1}\delta_{k+1}Q_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1}} =$$

$$= \frac{A_{k+2}\chi_{k+1,n-k}}{\Delta_{k+1}} + P_{k+1,n-k-1} + \frac{A_{k+2}B_{k+1}\delta_{k+1}Q_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1}}.$$

С учетом предположения индукции последнее равенство преобразуется как

$$\chi_{k+2,n-k-1} = \frac{A_{k+2}}{\Delta_{k+1}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right) P_{i-1,n+1-i}\right] + P_{k,n-k}\right\} +$$

$$+\frac{A_{k+2}}{\Delta_{k+1}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\prod_{j=i}^{k}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right)B_i\delta_i Q_{i,n-i}\right]\right\}+P_{k+1,n-k-1}+\frac{A_{k+2}B_{k+1}\delta_{k+1}Q_{k+1,n-k-1}}{\Delta_{k+1}}=$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{k+1}\left[\left(\prod_{j=i}^{k+1}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right)P_{i-1,n+1-i}\right]+P_{k+1,n-k-1}\right\}+\left\{\sum_{i=1}^{k+1}\left[\left(\prod_{j=i}^{k+1}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right)B_i\delta_i Q_{i,n-i}\right]\right\},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство того, что

$$\chi^*_{n+1}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A^*_{n+1}}{\Delta^*_n}\left(\prod_{j=i}^{n-1}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right)P_{i-1,n+1-i}\right]+P^*_n\right\}+$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{A^*_{n+1}}{\Delta^*_n}\left(\prod_{j=i}^{n-1}\frac{A_{j+1}}{\Delta_j}\right)B_i\delta_i Q_{i,n-i}\right]+\frac{A^*_{n+1}}{\Delta^*_n}B_n\delta_n Q^*_n\right\}, \tag{30}$$

проводится аналогично.

Теперь $v_{k,n-k+1}$ выражаются через $\psi_{i,n-i}$:

$$v_{n,1}=\psi^*_{n+1},$$

$$v_{n-1,2}=\frac{D}{\Delta_{n-1}}\psi^*_{n+1}+\psi_{n,1},$$

$$\cdots$$

$$v_{k,n-k+1}=\sum_{i=k+1}^{n-1}\left[\left(\prod_{j=k+1}^{i}\frac{D}{\Delta_{j-1}}\right)\psi_{i+1,n-i}\right]+\psi_{k+1,n-k}+\left(\prod_{j=k+1}^{n}\frac{D}{\Delta_{j-1}}\right)\psi^*_{n+1}, \tag{31}$$

$$k=0,1,\ldots,n.$$

Равенства (31) доказываются индукцией по k. Доказательство очевидно и здесь не приводится.

3. Доказательство сходимости рядов

Сходимость рядов (22) доказывается методом мажорант.

Для задачи (13) мажорантная задача строится следующим образом. Вначале выбираются положительные константы M,ρ такие, чтобы функция

$$R(x,y,u,v,w)=\frac{M[(x+y+u+v+w)(u_y+v_x+w_x)+1]}{\left[1-\dfrac{(x+y+u+v+w)}{\rho}\right]}$$

обладала следующими свойствами:

$$R\gg L_1p_x,\quad R\gg q,$$

$$R|_{y=0}\gg L_2t_x|_{y=0},\quad R|_{y=0}\gg q|_{y=0}+L_3p_x|_{y=0}+L_4t_x|_{y=0},$$

где константы $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$ определяются из соотношений

$$L_1 = \max_{n\in N}\left\{1,\ \frac{1}{|n-f_0|}\right\},\quad L_2 = \max_{n\in N}\left\{1,\ \frac{1}{|n-s_0|}\right\},$$

$$L_3 = \max_{n\in N}\left\{1,\ \frac{1}{|\kappa_n^*|},\ \left|\left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right)\frac{1}{\kappa_n^*}\right|\right\},$$

$$L_4 = \max_{n\in N}\left\{1,\ \left|\frac{B\kappa n}{(n-s_0)\kappa_n^*}\right|,\ \left|\frac{B\kappa n}{(n-s_0)\kappa_n^*}\left(\lambda D + \frac{\kappa D r_0}{n+1-s_0}\right) + \frac{\kappa D}{n-s_0}\right|\right\},$$

где

$$\kappa_n^* = \left(1 - B\lambda - \frac{B\kappa r_0}{n-s_0}\right)n - f_0.$$

Это возможно при условии $U \gg u$, $V \gg v$, $W \gg w$ в силу аналитичности функций p, q, t.

Тогда справедливы неравенства

$$R_{k,l} \geq |P_{k,l}|,\quad R_{k,l} \geq |Q_{k,l}|,$$

$$R_{n,0} \geq |T_n|,\quad R_{n,0} \geq |P_n^*|,\quad R_{n,0} \geq |Q_n^*|,$$

где

$$R_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l} R(x,y,U,V,W)}{\partial x^k \partial y^l}\right|_{x=y=U=V=W=0}.$$

Из условий (18), (19) следует, что существуют константы M_1, M_2, q_* такие, что

$$M_1 \geq 1,\quad M_2 \geq 1,\quad 0 < q_* < 1,$$

и при всех $k, l \in N_0$

$$\left(\prod_{i=n}^{k+n}\frac{|A_{i+1}|}{|\Delta_i|}\right) \leq M_1 q_*^k,\quad \frac{|A_{n+1}^*|}{|\Delta_n^*|} \leq M_1,\quad \left(\prod_{i=n}^{n+k}\frac{|D|}{|\Delta_i|}\right) \leq M_1 q_*^k,$$

$$|r_{n+1}| < M_1,\quad \frac{1}{|\Delta_k|} \leq M_2,\quad \frac{1}{|\Delta_k^*|} \leq M_2,\ |B_n\delta_n| \leq M_2,$$

$$\frac{|C|}{|\Delta_n|} \leq M_2,\quad |A_k| \leq M_2,\quad \frac{|C_{n+1}^*|}{|\Delta_n^*|} \leq M_2,\quad |A_k^*| \leq M_2.$$

Константы $U_{k,l}$, $V_{k,l}$ строятся по нижеследующим формулам, и индукцией по $n = k+l$ устанавливается, что $|U_{k,l}| \geq |u_{k,l}|$, $|V_{k,l}| \geq |v_{k,l}|$:

$$V_{k,0} = U_{0,l} = 0,\quad V_{0,1} = U_{1,0} = W_1 = R_{0,0}.$$

Из построения функции R следует, что

$$|V_{0,1}| \geq |v_{0,1}|,\quad |U_{1,0}| \geq |u_{1,0}|.$$

Пусть $U_{k,l} \geq |u_{k,l}|,\quad V_{k,l} \geq |v_{k,l}|,\quad W_m \geq |w_m|;\quad k+l=m,\quad m=1,\ldots,n;$

$$V_{n,1} = \Psi_{n+1,0},\quad V_{n-1,2} = M_1(q_*\Psi_{n+1,0} + \Psi_{n,1});$$

$$V_{k,n+1-k} = M_1 \sum_{i=k}^{n} (q_*^{i-k} \Psi_{i+1,n-i}), \quad k = n-1, \dots, 0;$$

$$U_{k+1,n-k} = M_2 V_{k+1,n-k} + X_{k+1,n-k}, \quad k = 0, \dots, n+1;$$

$$W_{n+1} = M_1 U_{n+1,0} + R_{n,0},$$

где

$$X_{1,n} = R_{0,n},$$

$$X_{k+1,n-k} = M_1 \sum_{i=1}^{k} (q_*^{k-i+1} R_{i-1,n-i+1}) + R_{k,n-k} + M_1 M_2 \sum_{i=1}^{k} (q_*^{k-i+1} R_{i,n-i}), \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\Psi_{k+1,n-k} = M_2 (X_{k,n-k+1} + R_{k,n-k}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Из построения функции R, констант M_1, M_2, q_* и предположения индукции следует, что $V_{k,l} \geq | v_{k,l} |$, $U_{k,l} \geq | u_{k,l} |$, $k + l = n$, $W_n \geq | w_n |$, следовательно,

$$U(x,y) = \sum_{k,l \in N_0} \frac{U_{k,l} x^k y^l}{k! l!} \gg u(x,y), \quad V(x,y) = \sum_{k,l \in N_0} \frac{V_{k,l} x^k y^l}{k! l!} \gg v(x,y),$$

$$W(x) = \sum_{n \in N_0} \frac{W_n x^n}{n!} \gg w(x). \tag{32}$$

Далее доказывается сходимость рядов (32). Пусть

$$R^* = \frac{M}{\left[1 - \dfrac{(\tau + 2Z^* + W^*)}{\rho}\right]} [(\tau + 2Z^* + W^*)(2Z_\tau^* + W_\tau^*) + 1]$$

и константы Z_n^* строятся по формулам

$$W_0^* = Z_0^* = 0;$$

$$Z_1^* = V_{1,0} = U_{0,1} = R_0^* > U_{0,1} = V_{0,1} = 0, \quad W_1^* = M_1 Z_1^* + R_0^* > W_1,$$

$$Z_{n+1}^* = M_6 R_n^*, W_{n+1}^* = M_1 Z_{n+1}^* + R_n^*, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$R_n^* = \left. \frac{d^n R^*}{d\tau^n} \right|_{\tau = W^* = Z^* = 0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M_6 = M_2 M_5 + M_3, \quad M_5 = M_1 M_4 \frac{1}{1 - q_*},$$

$$M_4 = M_2 (M_3 + 1), \quad M_3 = 1 + M_1 \frac{1 + M_2}{1 - q_*}.$$

Тогда $Z_n^* \geq \max\limits_{k+l=n} \{U_{k,l}; V_{k,l}\}$, $W_n^* \geq |W_n|$.

Построение коэффициентов рядов $\sum\limits_{n\in N_0} Z_n^*\tau^n/n!$, $\sum\limits_{n\in N_0} W_n^*\tau^n/n!$ по изложенной процедуре равносильно решению задачи Коши:

$$\begin{cases} Z_\tau^* = \dfrac{M_6 M}{\left[1-\dfrac{(\tau+2Z^*+W^*)}{\rho}\right]}[(\tau+2Z^*+W^*)(2Z_\tau^*+W_\tau^*)+1],\ Z^*(0)=0, \\ W_\tau^* = \dfrac{(1+M_1M_6)M}{\left[1-\dfrac{(\tau+2Z^*+W^*)}{\rho}\right]}[(\tau+2Z^*+W^*)(2Z_\tau^*+W_\tau^*)+1],\ W^*(0)=0. \end{cases} \tag{33}$$

Так как $W^* = M_7 Z^*$, где $M_7 = (1+M_1M_6)/M_6$, то при увеличении константы-сомножителя в правой части первого уравнения (33) получается, что задача (33) мажорируется задачей Коши для одного уравнения

$$N_\tau^* = \frac{MM_7M_6}{\left[1-\dfrac{(\tau+3N^*)}{\rho}\right]}[(\tau+3N^*)3N_\tau^*+1], \quad N^*(0)=0.$$

Если последнюю задачу записать в нормальном виде:

$$N_\tau^* = G_1(\tau, N^*), \quad N^*(0)=0, \tag{34}$$

где

$$G_1 = \frac{M_8}{1-\left[\dfrac{(\tau+3N^*)}{\rho}+3M_8(\tau+3N^*)\right]}, \quad M_8 = MM_6M_7,$$

то правая часть дифференциального уравнения — функция $G_1(\tau, N^*)$ — является аналитической в окрестности точки $(\tau=0, N^*=0)$ функцией, мажорирующей нуль.

По теореме Коши задача (34) имеет единственное аналитическое, мажорирующее нуль решение. Из способа построения задачи (34) следует, что она является мажорантной для задачи (13).

Теорема 1.1 доказана. □

4. Достаточные условия аналитической разрешимости задачи (13) и обобщение теоремы 1.1

Теорема 4.1. *Пусть в задаче* (13) *функции* f, p_1, q, t, *определяемые по формулам* (12), *удовлетворяют условиям теоремы 1.1.*

Если выполнены неравенства

$$A>0, \quad B<0, \quad C>0, \quad D>0,$$

$$\lambda>0, \quad \kappa<0, \quad f_0<0, \quad r_0>0, \quad s_0<0, \quad \lambda+\frac{\kappa r_0}{1-s_0}>0, \tag{35}$$

то у задачи (13) *существует в некоторой окрестности точки* O *единственное аналитическое решение.*

Теорема 4.1 доказывается сведением к теореме 1.1. Индукцией по n устанавливается, что при условии (35) справедливы неравенства

$$\delta_n > 1, \quad \Delta_n > 1.$$

Кроме того,

$$-B\left(\lambda+\frac{\kappa r_0}{n-s_0}\right)>-B\left(\lambda+\frac{\kappa r_0}{1-s_0}\right)>0,$$

а значит,

$$n\left(1-B\lambda-\frac{B\kappa r_0}{n-s_0}\right)-f_0>0,\quad C_n^*>0.$$

Условия

$$f_0\neq n,\quad s_0\neq n,\quad n\in N,$$

выполнены, поскольку $f_0<0,\ s_0<0$. Таким образом, все условия (17) существования и единственности формального решения выполнены.

Для доказательства сходимости рядов соотношения (15) переписываются в виде

$$\Delta_{n+1}=1+A_nD-B_nC-\frac{A_nD}{\Delta_n}. \tag{36}$$

Из (36), в частности, следует, что Δ_∞ (если существует) удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\infty=1+AD-BC-\frac{AD}{\Delta_\infty},$$

которое при выполнении неравенств (35) имеет два корня:

$$\Delta_\pm=1+AD-BC\pm\sqrt{(1+AD-BC)^2-4AD}\ .$$

Причем дискриминант положителен, так как

$$(1+AD-BC)^2-4AD>(1+AD)^2-4AD=(1-AD)^2>0.$$

Поскольку $\Delta_n>1$, то $\Delta_\infty\geq 1$, а значит,

$$\Delta_\infty=1+AD-BC+\sqrt{(1+AD-BC)^2-4AD}>1+AD.$$

Таким образом, установлено, что последовательность Δ_n сходится, причем

$$0<\frac{AD}{\Delta_\infty}<1.$$

Из сходимости последовательности Δ_n очевидно следует сходимость последовательности δ_n.

Все условия (17)–(19) выполнены, а значит, справедливость теоремы 4.1 следует из теоремы 1.1. □

Теорема 4.2. *Пусть в задаче*

$$\begin{cases} xu_x=xAu_y+xBv_x+xB\lambda u_x|_{y=0}+xB\kappa w_x|_{y=0}+fu+x\varepsilon_1 z_x+xp,\\ v_y=Cu_y+Dv_x+D\lambda u_x|_{y=0}+D\kappa w_x|_{y=0}+\varepsilon_2 z_x+q,\\ xw_x=\left[r_0u+s_0w+X\right]\big|_{y=0},\\ z_y=Y,\\ w(0)=0,\quad u(0,y)=0,\quad v(x,0)=0, z(x,0)=0 \end{cases} \tag{37}$$

функции f, p, q, X, Y *являются аналитическими в некоторой окрестности точки* O $(x=0, y=0, u=0, v=0, w=0, z=0)$; *функции* p, q, Y *зависят от независимых переменных* x, y, *неизвестных функций* u, v, z, w *и их производных* u_y, v_x, z_x, $u_x|_{y=0}$, $w_x|_{y=0}$, *причем линейны относительно производных и коэффициенты перед этими производными обращаются в нуль в точке* O; *функции* f, X *зависят от* x, y, u, v, z, w,

$$X|_{x=y=u=w=0} = \left.\frac{\partial X}{\partial u}\right|_{x=y=u=w=0} = \left.\frac{\partial X}{\partial w}\right|_{x=y=u=w=0} = 0.$$

Если выполнены неравенства (35) $(f_0 = f(O))$, *то у задачи* (37) *существует в некоторой окрестности точки* O *единственное аналитическое решение.*

Доказательство теоремы 4.2 в основном повторяет доказательство теоремы 4.1 и поэтому здесь не приводится.

Нижеследующая теорема 4.3 была ранее сформулирована без доказательства существования и единственности аналитического решения ОЗК [2, теорема 2.1].

Теорема 4.3. *Пусть в задаче*

$$\begin{cases} xu_x = x(1-M_0^2)u_y - xv_x - x\lambda(u_x)|_{y=0} - x\kappa(w_x)|_{y=0} - \dfrac{\nu D}{(D_0+w)}u- \\ \qquad -xK_2 z_x + xY_1, \\ v_y = \ M_0^2 u_y + v_x + \lambda(u_x)|_{y=0} + \kappa(w_x)|_{y=0} + K_2 z_x + Y_2, \\ z_y = Y_3, \\ xw_x = \left[\alpha u - (\varepsilon+1)w + Y_4\right]\big|_{y=0}, \end{cases} \tag{38}$$

$$w(0) = 0, u(0,y) = 0, v(x,0) = 0, z(x,0) = 0, \tag{39}$$

функции Y_i, $i = 1,2,3$, *зависят от независимых переменных* x, y, *неизвестных функций* u, v, z, w *и их первых производных, являются аналитическими в некоторой окрестности точки* O $(x=0, y=0, u=0, v=0, w=0)$, *линейны относительно производных* u_y, v_x, z_x, $u_x|_{y=0}$, $w_x|_{y=0}$, *и коэффициенты перед этими производными обращаются в нуль в точке* O; D, Y_4 — *аналитические в некоторой окрестности точки* O *функции переменных* x, y, u, v, z, w,

$$Y_4|_{x=u=w=0} = \left.\frac{\partial Y_4}{\partial u}\right|_{x=u=w=0} = \left.\frac{\partial Y_4}{\partial w}\right|_{x=u=w=0} = 0.$$

Константы $M_0, \lambda, \kappa, D_0, \alpha, \varepsilon$ *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < M_0 < 1, \quad \lambda > 0, \quad \kappa < 0, \quad D_0 < 0, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon < 0;$$

$\nu = 1, 2$; K_2 — *произвольная константа. Тогда задача* (38), (39) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки* O. *Задача* (38), (39) *описывает течения в области* Ω_2 *(см. рисунок), точно удовлетворяющие условиям Гюгонио.*

Доказательство существования и единственности аналитического решения задачи (38), (39) состоит в сведении к теореме 4.2, является тривиальным и здесь не приводится.

То, что задача (38), (39) описывает течения в области Ω_2, в том числе траекторию движения расходящейся от оси или центра симметрии ударной волны, на фронте которой выполняются условия Гюгонио, установлено в [2].

Автор признателен Сергею Петровичу Баутину за полезные обсуждения этой работы.

Список литературы

[1] Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997. 160 с.

[2] Казаков А.Л. Неавтомодельное безударное сжатие симметричного объема газа // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 56–70.

[3] Леднёв Н.А. Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Математический сборник. 1948. Вып. 2. С. 205–266.

[4] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 448 с.

[5] Забабахин И.Е., Симоненко В.А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 3. С. 573–576.

[6] Баутин С.П., Казаков А.Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006. 399 с.

[7] Тешуков В.М. Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. 1978. Вып. 33. С. 114–133.

[8] Тешуков В.М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // Прикладная механика и техническая физика. 1980. № 2. С. 126–133.

[9] Тешуков В.М. О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 225–234.

[10] Блохин А.М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2007 г.